J.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

33869

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass, von Helmholtz, Schroeter, Fuchs

von

L. Kronecker.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 105.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1889.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 105.

Seite

Czuber, E. Berechnung der krummen Oberfläche und des körperlichen Inhalts eines Kugel-Ausschnitts zwischen zwei beliebigen, die Kugel und einander schneidenden Ebenen. 180

Frobenius, G. Ueber die *Jacobi*schen Functionen dreier Variabeln. . . . 35—100

Günther, P. Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten. . . . . 1— 34

Hensel, K. Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen. . . . . 329—344

Königsberger, L. Ueber eine Determinantenbeziehung in der Theorie der Differentialgleichungen. . . . . 170—179

Kronecker, L. Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. 157—159

— — Summirung der *Gauss*schen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$ . . . . . 267—268

— — Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. (Fortsetzung des auf S. 157 bis 159 abgedruckten Aufsatzes.) . . . . 345—354

Lampe, E. Ueber eine Maximalaufgabe zur angeblichen Dreitheilung eines Winkels von *Averdieck*. . . . . 355—356

Lipschitz, R. Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen. . . . . 127—156

Schlesinger, L. Zur Theorie der *Fuchs*schen Functionen. . . . . 181—232

Seite

Schottky, F. Ueber die Beziehungen zwischen den sechzehn Thetafunctionen von zwei Variabeln. . . . . 233—249

— — Eine algebraische Untersuchung über Thetafunctionen von drei Argumenten.. . . . . 269—297

Staude, O. Ueber bedingt periodische Functionen eines beschränkt veränderlichen complexen Argumentes und Anwendungen derselben auf Mechanik. Hierzu Figurentafel I. . . . . 298—328

Stern, M. A. Beweis eines *Liouville*schen Satzes. . . . . 250—266

Sturm, R. Rein geometrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen. . . . . 101—126

Tano, F. Sur quelques théorèmes de *Dirichlet*. . . . . 160—169

Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten.

(Von Herrn *Paul Günther*.)

Die folgenden Untersuchungen, welche begonnen wurden in Folge einer Anregung meiner hochverehrten Lehrer und Gönner, der Herren ***Fuchs*** und ***Hamburger,*** bezwecken eine Fortsetzung der im 103. Bande des Journ. für Math. veröffentlichten Abhandlung des Herrn ***Hamburger:*** „Ueber eine specielle Klasse linearer Differentialgleichungen". Es sei mir gestattet, beiden genannten Herren, sowie Herrn ***Kronecker,*** durch dessen gütige Vermittelung mir das bereits zum Druck eingereichte Manuscript der angeführten Abhandlung zugänglich wurde, für mannigfach ertheilte Rathschläge auch von dieser Stelle aus meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Herr ***Hamburger*** behandelt in der genannten Abhandlung die Frage nach der Existenz von „Normalintegralen" (vgl. ***Thomé,*** Journ. für Math. Bd. 95) der Form $e^{G(x^{-1})}.x^{A}.\mathfrak{P}(x)$ (G eine ganze rationale Function von x^{-1}) für eine von ihm in seiner Abhandlung „Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen u. s. w." (Journ. für Math. Bd. 83, S. 200 ff.) aufgestellte Klasse linearer Differentialgleichungen, deren allgemeine Form

$$(1.) \qquad x^{n}\cdot\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+x^{n-1}.\mathfrak{P}_{1}(x^{-1})\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+\mathfrak{P}_{n}(x^{-1}).y \;=\; 0$$

ist, wo $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_n$ beständig (ausser für $x=0$) convergente Potenzreihen des Arguments x^{-1} bedeuten (vgl. ***Hamburger,*** Bd. 103, S. 252). Ein Fundamentalsystem von Integralen dieser Differentialgleichung wird, unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln $r_1, \ldots r_n$ der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$r(r+1)\ldots(r+n-1)-r(r+1)\ldots(r+n-2)\mathfrak{P}_{1}(0)+\cdots+(-1)^{n}.\mathfrak{P}_{n}(0) \;=\; 0$$

nicht um ganze Zahlen oder Null von einander verschieden sind, gegeben durch

$$(2.) \qquad x^{-r_1}\varphi_1(x^{-1}), \quad \ldots \quad x^{-r_n}\varphi_n(x^{-1}),$$

wo auch $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ beständig convergente Potenzreihen von x^{-1} bedeuten.

Wenn nun die Gleichung (1.) ein Normalintegral obiger Form besitzt, so muss es mit einem der Elemente des Systems (2.) bis auf einen constanten Factor identisch sein; hieraus folgt aber sofort, dass die (offenbar beständig convergente) Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ nur eine ganze rationale Function $g(x)$ sein kann, weil sich von $x^A.\mathfrak{P}(x)$ ein Factor x^{-r_i} so abtrennen lassen muss, dass im übrig bleibenden Theile nur negative ganze Potenzen von x auftreten. Dieser Umstand allein ermöglicht es, die Untersuchung der Frage nach der Existenz von Normalintegralen bei den Gleichungen der *Hamburger*schen Klasse ohne specielle Convergenzbetrachtungen zu erledigen, während dies bei den allgemeinen linearen homogenen Differentialgleichungen zur Zeit noch nicht möglich ist. Es verdient nämlich hervorgehoben zu werden, dass die in der Abhandlung des Herrn *Hamburger* und im Folgenden auseinandergesetzten Methoden zur Bestimmung der „determinirenden Factoren" (*Thomé*, Journ. für Math. Bd. 95, S. 75; Bd. 96, S. 201) $e^{G(x^{-1})}$ sofort auf allgemeine lineare Differentialgleichungen übertragen werden können; aber wir besitzen zur Zeit noch kein Mittel, über die wirkliche Existenz solcher Integrale $e^{G([x-a]^{-1})}.(x-a)^A.\mathfrak{P}(x-a)$ durch allgemeine Untersuchung der Convergenz der formell zu entwickelnden Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ von vornherein zu entscheiden.

Es werde nur der Fall betrachtet, wo die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) rationale Functionen sind. Herr *Hamburger* bringt alsdann diese Gleichung auf die Form

$$(3.) \qquad x^{n(m+1)}.\frac{d^n y}{dx^n} + x^{(n-1)(m+1)}.p_1(x).\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x).y = 0,$$

wo

$$p_i(x) = a_{ii}x^{im} + a_{i,i+1}x^{im-1} + \cdots + a_{i,i(m+1)} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

ist; m bedeutet den höchsten möglichen Grad der Function

$$G(x^{-1}) = A_1x^{-1} + A_2x^{-2} + \cdots + A_mx^{-m}.$$

Ist nun v_0 eine einfache Wurzel der Gleichung

$$v^n + p_1(0)v^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(0)v + p_n(0) = 0,$$

so gehört zu ihr ein Ausdruck $G(x^{-1})$, welcher erhalten wird, indem man von der mit v_0 beginnenden Entwickelung der durch die Gleichung

$$f(x, v) = v^n + p_1(x)v^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)v + p_n(x) = 0$$

definirten algebraischen Function in der Umgebung von $x = 0$ die m ersten Glieder

$$u = v_0 + v_1 x + \cdots + v_{m-1} x^{m-1}$$

abtrennt und dann $u.x^{-(m+1)} = \frac{dG(x^{-1})}{dx}$, also

$$-m.A_m = v_0, \quad -(m-1)A_{m-1} = v_1, \quad \ldots \quad -A_1 = v_{m-1}$$

setzt. Es beruht dies darauf, dass, wenn

$$y = e^{G(x^{-1})}.x^A.g(x), \qquad \frac{y^{(i)}}{y} = x^{-i(m+1)}.\mathfrak{P}_i(x) \qquad (i = 1, \ldots n)$$

gesetzt wird, alsdann

$$\mathfrak{P}_i(x) = \mathfrak{P}_1(x)^i + x^m.\mathfrak{P}_i'(x)$$

ist und daher die Gleichung (3.) in

$$(4.) \qquad \mathfrak{P}_1^n + p_1\mathfrak{P}_1^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\mathfrak{P}_1 + p_n = x^m.\mathfrak{P}_0(x)$$

übergeht; ist dann $v_0 = -m.A_m = \mathfrak{P}_1(0)$ eine einfache Wurzel der obigen Gleichung, so erhält man, wenn man (4.) $(m-1)$-mal nach x differentiirt und dann $x = 0$, $\mathfrak{P}_1(0) = v_0$ setzt, die Coefficienten in $\mathfrak{P}_1(x)$ bis zu demjenigen von x^{m-1} successive eindeutig bestimmt und zwar übereinstimmend mit den entsprechenden in u.

Dieser günstige Umstand fällt fort, wenn v_0 eine mehrfache Wurzel der obigen Gleichung ist. Denn selbst wenn in diesem Falle auf die eben angegebene Weise für die m ersten Coefficienten in $\mathfrak{P}_1(x)$ sich endliche Werthe ergeben, so reichen doch, wie unten gezeigt werden wird, die $m-1$ Gleichungen, welche man aus (4.) durch Differentiation und Einsetzen von $x = 0$, $\mathfrak{P}_1(0) = v_0$ erhält, nicht aus, um die Coefficienten von $x^1, x^2, \ldots x^{m-1}$ in $\mathfrak{P}_1$ zu bestimmen, sondern es lässt sich aus ihnen stets nur eine geringere Anzahl von Coefficienten berechnen. Man ist daher darauf angewiesen, nachdem man ein Werthsystem von Coefficienten, etwa $A_m, A_{m-1}, \ldots A_{m-r+1}$, gefunden hat, welches jenen Gleichungen genügt, die Differentialgleichung durch die Substitution

$$y = e^{G'(x^{-1})}.\eta, \quad G'(x^{-1}) = A_m x^{-m} + \cdots + A_{m-r+1} x^{-(m-r+1)}$$

zu transformiren und diejenigen determinirenden Factoren der Differential-

gleichung für η aufzusuchen, deren wirklicher Grad $\leqq m-r$ ist. Die transformirte Differentialgleichung wird aber nach Herrn ***Hamburger*** (a. a. O. S. 263), wenn

$$P'_\lambda = x^{\lambda(m+1)}.e^{-G'(x^{-1})}.\frac{d^\lambda e^{G'(x^{-1})}}{dx^\lambda}, \quad p'_\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda}(n-i)_{\lambda-i}.P'_{\lambda-i}p_i$$

gesetzt wird,

$$(5.) \qquad x^{n(m+1)}.\frac{d^n\eta}{dx^n}+x^{(n-1)(m+1)}.p'_1.\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+\cdots+p'_n\eta = 0.$$

Hier hat man zu bilden die algebraische Gleichung

$$f'(x,t) = t^n+p'_1t^{n-1}+\cdots+p'_{n-1}t+p'_n = 0,$$

und zwar können nur solche Entwickelungen von t in Betracht kommen, welche mit x^r beginnen.

Da, wenn $P'_1 = u'$ gesetzt wird, $P'_\lambda = u'^\lambda+x^m.G_\lambda(x)$ ist, so kommt

$$p'_\lambda = \frac{1}{(n-\lambda)!}\cdot\frac{\partial^{n-\lambda}f(x,u')}{\partial u'^{n-\lambda}}+x^m.g_\lambda(x)$$

und daher

$$f'(x,t) = f(x,u'+t)+x^m.G_0(x).$$

Hieraus erkennt man, dass in der That ein Zweig der algebraischen Function t existirt, in dessen Entwickelung nach Potenzen von x solche Potenzen, deren Exponent $< r$, nicht vorkommen, da die Ableitungen dieses Functionszweiges bis zur $(r-1)$ten einschliesslich für $x=0$ verschwinden; um aber diese Ableitungen zu erhalten, ist $(m-1)$-malige Differentiation der Gleichung $f'(x,t)=0$ nöthig, und man ist daher nicht im Stande, auf diese Art und Weise noch weitere Coefficienten von $G(x^{-1})$ zu bestimmen.

Man wird also, um auch die den vielfachen Wurzeln der Gleichung $f(0,v)=0$ entsprechenden determinirenden Factoren behandeln zu können, sich nicht darauf beschränken dürfen, nur mit einem einzigen Werthe von m zu rechnen, sondern man wird solche determinirenden Factoren besonders in Betracht ziehen müssen, deren wirklicher Grad kleiner als der grösstmögliche (oben mit m bezeichnete) ist. Dies ist unbedingt nothwendig für die aus (1.) durch eine Transformation der angegebenen Art hergeleiteten Differentialgleichungen, es empfiehlt sich aber auch schon für die ursprüngliche Differentialgleichung (1.) selbst, um die Betrachtung der Wurzel $v_0=0$, die ja im Allgemeinen eine vielfache sein wird, zu vermeiden.

Hat man nun einen determinirenden Factor $e^{G(x^{-1})}$ ermittelt, so muss man die Differentialgleichung (1.) durch die Substitution $y = e^{G(x^{-1})}.\eta$ trans-

formiren und die eventuellen regulären Integrale der Differentialgleichung für η, insbesondere zunächst ihre Exponenten A, aufzustellen suchen.

Herr ***Hamburger*** hat bewiesen (a. a. O. S. 265), dass zu jedem determinirenden Factor, welcher einer einfachen Wurzel v_0 der Gleichung $f(0, v) = 0$ entspricht, der zugehörige Exponent A eindeutig bestimmt ist (Bd. 103, S. 265; ***Thomé,*** Bd. 76, S. 299).

Man kann dieses Ergebniss, wie unten gezeigt werden soll, auch dadurch herleiten, dass man eine algebraische Gleichung $F(x, v) = 0$ herstellt, welche in den Gliedern mit $x^0, x^1, \ldots x^{m-1}$ mit $f(x, v) = 0$ übereinstimmt, sodass die m ersten Glieder einer einfachen regulären Entwickelung von v aus $F = 0$ identisch sind mit denen einer entsprechenden Entwickelung aus $f = 0$, während der Coefficient von x^m in ersterer Entwickelung direct den zugehörigen Exponenten A liefert. Die Benutzung der Gleichung $F = 0$ an Stelle von $f = 0$ ist dann weiter auch für die mehrfachen Wurzeln von Vortheil, da $F = 0$ zur Berechnung der Coefficienten in $G(x^{-1})$ eine m-malige Differentiation gestattet, wodurch in manchen Fällen die Anzahl der nothwendigen Transformationen der Gleichung (1.) verringert wird.

Nach diesen Vorbemerkungen treten wir in die eigentliche Untersuchung ein.

I.

Die gegebene Differentialgleichung habe die Form

$$(1.) \quad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n(x).y = 0,$$

worin

$$q_i(x) = a_{ii}x^{-i} + a_{i,i+1}x^{-(i+1)} + \cdots + a_{i,\pi_i}x^{-\pi_i} \qquad (a_{i,\pi_i} \neq 0;\ i = 1, 2, \ldots n)$$

sein möge. Es werde mit h der „charakteristische Index" der Differentialgleichung (1.) bezeichnet, d. h. derjenige Stellenzeiger, welcher den Bedingungen

$$\pi_\alpha - \alpha \underset{(\alpha < h)}{<} \pi_h - h \underset{(\beta > h)}{\geqq} \pi_\beta - \beta$$

genügt, sodass $n - h$ der Grad der zu $x = 0$ gehörigen determinirenden Function der Gleichung (1.) ist.

Wenn es sich um die Ermittelung der determinirenden Factoren

$$e^{G(x^{-1})} = e^{A_m x^{-m} + \cdots + A_1 x^{-1}}$$

dieser Differentialgleichung handelt, so kann man zuerst die möglichen Werthe des Grades m bestimmen, für welche der zugehörige Coefficient des höchsten Gliedes, A_m, von Null verschieden ist. Nach der Methode, welche Herr ***Thomé*** hierfür angegeben hat (Journ. für Math. Bd. 76, S. 295 f.; Bd. 83, S. 118; Bd. 96, S. 204 f.), und welche sich, beiläufig bemerkt, in ähnlicher Weise wie das bekannte ***Puiseux***'sche Verfahren graphisch darstellen lässt, hat man zunächst gewisse Indices c, c', ... $c^{(\nu-1)}$, $c^{(\nu)}$ zu bestimmen und erhält dann in

$$g_0 = \frac{\pi_c}{c}, \quad g_1 = \frac{\pi_{c'} - \pi_c}{c' - c}, \quad \ldots \quad g_\nu = \frac{\pi_{c^{(\nu)}} - \pi_{c^{(\nu-1)}}}{c^{(\nu)} - c^{(\nu-1)}}, \quad \ldots$$

eine Reihe von stets abnehmenden positiven Zahlen, von denen diejenigen, welche ganzzahlig und grösser als 1 sind, die möglichen Werthe der Zahl $m+1$ bestimmen.

Es sei nun z. B. g_ν eine der obigen Zahlen, welche den gestellten Anforderungen entspricht, und es werde $m+1 = g_\nu$ gesetzt. Wir wollen die zugehörigen determinirenden Factoren untersuchen.

Für ein Normalintegral der Gleichung (1.), welches die Form

$$y = e^{A_m x^{-m} + \cdots + A_1 x^{-1}} . x^A . g(x) \qquad (g(0) \neq 0)$$

besitzt, ist von der grössten Wichtigkeit die Betrachtung der logarithmischen Ableitung

$$(2.) \quad z = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -mA_m x^{-m} - \cdots - A_1 x^{-2} + Ax^{-1} + \mathfrak{P}(x).$$

Wir setzen

$$(3.) \quad x^{m+1} . z = w + x^{m+1} . \mathfrak{P}(x),$$

also

$$(4.) \quad \begin{cases} w = -m . A_m - (m-1) A_{m-1} x - \cdots - A_1 x^{m-1} + A . x^m \\ \quad = v_0 + v_1 x + \cdots + v_{m-1} x^{m-1} + v_m x^m, \end{cases}$$

und stellen uns die Aufgabe, w aus den Entwickelungen einer algebraischen Function zu bestimmen in ähnlicher Art, wie dies Herr ***Hamburger*** (unter der Voraussetzung, dass v_0 eine einfache Wurzel der diese Grösse bestimmenden algebraischen Gleichung sein sollte) für die Function $u = w - A . x^m$ gethan hat. Hierzu wollen wir die Grössen $\frac{1}{y} \cdot \frac{d^i y}{dx^i}$ $(i = 1, \ldots n)$ durch z ausdrücken, was mit Hülfe der Theorie der independenten Darstellung höherer Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen ohne Schwierigkeit geschehen kann.

Ist allgemein

$$y = F(t), \quad t = \varphi(x), \quad \varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\frac{d^\lambda \varphi}{dx^\lambda},$$

so erhält man leicht die Formel

$$(5.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^i y}{dx^i} = \sum\limits_{\varkappa,\lambda,\mu} \dfrac{i!}{\mu_1!\mu_2!\ldots} \dfrac{d^\varkappa F(\varphi)}{d\varphi^\varkappa} \cdot \varphi_{\lambda_1}^{\mu_1} \varphi_{\lambda_2}^{\mu_2} \ldots, \\ (1 \leqq \varkappa \leqq i, \quad \Sigma \mu_a = \varkappa, \quad \Sigma \lambda_a . \mu_a = i, \quad \lambda_a \geqq 1). \end{cases}$$

Um hieraus für unseren Fall die gewünschte Darstellung von $\frac{y^{(i)}}{y}$ durch z zu erhalten, braucht man nur zu setzen

$$y = F(t) = e^t, \quad t = \varphi(x) = \int z\, dx,$$

dann wird

$$\frac{d^\varkappa F}{d\varphi^\varkappa} = y, \quad \varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\frac{d^{\lambda-1} z}{dx^{\lambda-1}} = \frac{1}{\lambda} \cdot z_{\lambda-1},$$

also, wenn λ durch $\lambda+1$ ersetzt wird,

$$(6.) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{d^i y}{dx^i} = \sum\limits_{\varkappa,\lambda,\mu} \dfrac{i!}{\mu_1!\mu_2!\ldots(\lambda_1+1)^{\mu_1}(\lambda_2+1)^{\mu_2}\ldots} z_{\lambda_1}^{\mu_1} z_{\lambda_2}^{\mu_2} \ldots, \\ (1 \leqq \varkappa \leqq i, \quad \Sigma \mu_a = \varkappa, \quad \Sigma \lambda_a \mu_a = i - \varkappa, \quad \lambda_a \geqq 0). \end{cases}$$

Aus (3.) folgt nun durch λ-malige Differentiation

$$x^{m+1+\lambda} . z_\lambda = (-1)^\lambda . (m+\lambda)_\lambda . w + x . \mathfrak{P}_\lambda(x),$$

wobei zu beachten, dass für $\lambda = 0$

$$\mathfrak{P}_0(x) = x^m . \mathfrak{P}_0'(x)$$

ist. Also wird

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{d^i y}{dx^i} = x^{-i(m+1)} . \sum \frac{i! x^{m(i-\varkappa)}}{\mu_1!\ldots(\lambda_1+1)^{\mu_1}\ldots} [(-1)^{\lambda_1}(m+\lambda_1)_{\lambda_1} w + x \mathfrak{P}_{\lambda_1}(x)]^{\mu_1} \ldots,$$
$$(1 \leqq \varkappa \leqq i, \quad \Sigma \mu_a = \varkappa, \quad \Sigma \lambda_a \mu_a = i - \varkappa, \quad \lambda_a \geqq 0).$$

Hebt man aus dem Aggregat unter dem Summenzeichen die Glieder mit den Potenzen $x^0, x^1, \ldots x^m$ heraus, so ergiebt sich

$$(7.) \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{d^i y}{dx^i} = x^{-i(m+1)} . [w^i - i_2 (m+1) x^m w^{i-1} + x^{m+1} . \bar{\mathfrak{P}}_i(x)].$$

Wird dies nun in die Differentialgleichung (1.) eingeführt und zugleich $m+1 = g_\nu$ gesetzt, so ergiebt sich nach Multiplication mit x^{ng_ν}:

$$(8.) \quad \begin{cases} w^n - n_2 g_\nu x^{g_\nu - 1} . w^{n-1} + x^{g_\nu} . \bar{\mathfrak{P}}_n(x) \\ \quad + x^{g_\nu} . q_1 (w^{n-1} - (n-1)_2 g_\nu x^{g_\nu - 1} . w^{n-2} + x^{g_\nu} . \bar{\mathfrak{P}}_{n-1}(x)) \\ \quad + x^{2g_\nu} . q_2 (w^{n-2} - (n-2)_2 g_\nu . x^{g_\nu - 1} w^{n-3} + x^{g_\nu} . \bar{\mathfrak{P}}_{n-2}(x)) \\ \quad + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \quad + x^{(n-1)g_\nu} . q_{n-1} w + x^{ng_\nu} . q_n = 0. \end{cases}$$

dieser Differentialgleichung handelt, so kann man zuerst die möglichen Werthe des Grades m bestimmen, für welche der zugehörige Coefficient des höchsten Gliedes, A_m, von Null verschieden ist. Nach der Methode, welche Herr ***Thomé*** hierfür angegeben hat (Journ. für Math. Bd. 76, S. 295 f.; Bd. 83, S. 118; Bd. 96, S. 204 f.), und welche sich, beiläufig bemerkt, in ähnlicher Weise wie das bekannte ***Puiseux***'sche Verfahren graphisch darstellen lässt, hat man zunächst gewisse Indices c, c', ... $c^{(\nu-1)}$, $c^{(\nu)}$ zu bestimmen und erhält dann in

$$g_0 = \frac{\pi_c}{c}, \quad g_1 = \frac{\pi_{c'} - \pi_c}{c' - c}, \quad \ldots \quad g_\nu = \frac{\pi_{c^{(\nu)}} - \pi_{c^{(\nu-1)}}}{c^{(\nu)} - c^{(\nu-1)}}, \quad \ldots$$

eine Reihe von stets abnehmenden positiven Zahlen, von denen diejenigen, welche ganzzahlig und grösser als 1 sind, die möglichen Werthe der Zahl $m+1$ bestimmen.

Es sei nun z. B. g_ν eine der obigen Zahlen, welche den gestellten Anforderungen entspricht, und es werde $m+1 = g_\nu$ gesetzt. Wir wollen die zugehörigen determinirenden Factoren untersuchen.

Für ein Normalintegral der Gleichung (1.), welches die Form

$$y = e^{A_m x^{-m} + \cdots + A_1 x^{-1}} . x^A . g(x) \qquad (g(0) \neq 0)$$

besitzt, ist von der grössten Wichtigkeit die Betrachtung der logarithmischen Ableitung

$$(2.) \quad z = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -mA_m x^{-m} - \cdots - A_1 x^{-2} + Ax^{-1} + \mathfrak{P}(x).$$

Wir setzen

$$(3.) \quad x^{m+1} . z = w + x^{m+1} . \mathfrak{P}(x),$$

also

$$(4.) \quad \begin{cases} w = -m . A_m - (m-1) A_{m-1} x - \cdots - A_1 x^{m-1} + A . x^m \\ \quad = v_0 + v_1 x + \cdots + v_{m-1} x^{m-1} + v_m x^m, \end{cases}$$

und stellen uns die Aufgabe, w aus den Entwickelungen einer algebraischen Function zu bestimmen in ähnlicher Art, wie dies Herr ***Hamburger*** (unter der Voraussetzung, dass v_0 eine einfache Wurzel der diese Grösse bestimmenden algebraischen Gleichung sein sollte) für die Function $u = w - A . x^m$ gethan hat. Hierzu wollen wir die Grössen $\frac{1}{y} \cdot \frac{d^i y}{dx^i}$ $(i = 1, \ldots n)$ durch z ausdrücken, was mit Hülfe der Theorie der independenten Darstellung höherer Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen ohne Schwierigkeit geschehen kann.

Ist allgemein

$$y = F(t), \quad t = \varphi(x), \quad \varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\frac{d^\lambda \varphi}{dx^\lambda},$$

so erhält man leicht die Formel

$$(5.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^i y}{dx^i} = \sum\limits_{\varkappa,\lambda,\mu} \dfrac{i!}{\mu_1!\mu_2!\ldots} \dfrac{d^\varkappa F(\varphi)}{d\varphi^\varkappa} \cdot \varphi_{\lambda_1}^{\mu_1} \varphi_{\lambda_2}^{\mu_2} \ldots, \\ (1 \leqq \varkappa \leqq i, \quad \Sigma \mu_a = \varkappa, \quad \Sigma \lambda_a . \mu_a = i, \quad \lambda_a \geqq 1). \end{cases}$$

Um hieraus für unseren Fall die gewünschte Darstellung von $\frac{y^{(i)}}{y}$ durch z zu erhalten, braucht man nur zu setzen

$$y = F(t) = e^t, \quad t = \varphi(x) = \int z\,dx,$$

dann wird

$$\frac{d^\varkappa F}{d\varphi^\varkappa} = y, \quad \varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\frac{d^{\lambda-1} z}{dx^{\lambda-1}} = \frac{1}{\lambda} \cdot z_{\lambda-1},$$

also, wenn λ durch $\lambda+1$ ersetzt wird,

$$(6.) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{d^i y}{dx^i} = \sum\limits_{\varkappa,\lambda,\mu} \dfrac{i!}{\mu_1!\mu_2!\ldots(\lambda_1+1)^{\mu_1}(\lambda_2+1)^{\mu_2}\ldots} z_{\lambda_1}^{\mu_1} z_{\lambda_2}^{\mu_2} \ldots, \\ (1 \leqq \varkappa \leqq i, \quad \Sigma \mu_a = \varkappa, \quad \Sigma \lambda_a \mu_a = i - \varkappa, \quad \lambda_a \geqq 0). \end{cases}$$

Aus (3.) folgt nun durch λ-malige Differentiation

$$x^{m+1+\lambda} . z_\lambda = (-1)^\lambda . (m+\lambda)_\lambda . w + x . \mathfrak{P}_\lambda(x),$$

wobei zu beachten, dass für $\lambda = 0$

$$\mathfrak{P}_0(x) = x^m . \mathfrak{P}_0'(x)$$

ist. Also wird

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{d^i y}{dx^i} = x^{-i(m+1)} . \sum \frac{i! x^{m(i-\varkappa)}}{\mu_1!\ldots(\lambda_1+1)^{\mu_1}\ldots} [(-1)^{\lambda_1}(m+\lambda_1)_{\lambda_1} w + x \mathfrak{P}_{\lambda_1}(x)]^{\mu_1} \ldots,$$

$$(1 \leqq \varkappa \leqq i, \quad \Sigma \mu_a = \varkappa, \quad \Sigma \lambda_a \mu_a = i - \varkappa, \quad \lambda_a \geqq 0).$$

Hebt man aus dem Aggregat unter dem Summenzeichen die Glieder mit den Potenzen x^0, x^1, ... x^m heraus, so ergiebt sich

$$(7.) \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{d^i y}{dx^i} = x^{-i(m+1)} . [w^i - i_2 (m+1) x^m w^{i-1} + x^{m+1} . \overline{\mathfrak{P}}_i(x)].$$

Wird dies nun in die Differentialgleichung (1.) eingeführt und zugleich $m+1 = g_\nu$ gesetzt, so ergiebt sich nach Multiplication mit x^{ng_ν}:

$$(8.) \quad \begin{cases} w^n - n_2 g_\nu x^{g_\nu - 1} . w^{n-1} + x^{g_\nu} . \overline{\mathfrak{P}}_n(x) \\ \quad + x^{g_\nu} . q_1 (w^{n-1} - (n-1)_2 g_\nu x^{g_\nu - 1} . w^{n-2} + x^{g_\nu} . \overline{\mathfrak{P}}_{n-1}(x)) \\ \quad + x^{2g_\nu} . q_2 (w^{n-2} - (n-2)_2 g_\nu . x^{g_\nu - 1} w^{n-3} + x^{g_\nu} . \overline{\mathfrak{P}}_{n-2}(x)) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + x^{(n-1)g_\nu} . q_{n-1} w + x^{ng_\nu} . q_n = 0. \end{cases}$$

Die Exponenten der niedrigsten Potenzen von x, welche hier in den einzelnen Gliedern auftreten, sind gegeben durch die Zahlen

$$ig_\nu - \pi_i \qquad (i = 1, 2, \dots n);$$

wird also Gleichung (8.) mit $x^{\pi_{c^{(\nu-1)}} - c^{(\nu-1)} \cdot g_\nu} = x^{\alpha_\nu}$ (wo $\alpha_\nu \geqq 0$) multiplizirt, so lauten die niedrigsten Exponenten

$$g_\nu (i - c^{(\nu-1)}) - (\pi_i - \pi_{c^{(\nu-1)}}) \qquad (i = 1, \dots n).$$

Aus der Definition von g_ν geht aber hervor, dass diese Exponenten nie negativ und mindestens zweimal (für $i = c^{(\nu-1)}$ und $i = c^{(\nu)}$) gleich Null sind. Setzen wir also

$$x^{\alpha_\nu + ig_\nu} . q_i = p_{i\nu} \qquad (i = 0, 1, \dots n;\ q_0 = 1),$$

so sind die $p_{i\nu}$ ganze rationale Functionen von x, von denen für $x = 0$ wenigstens zwei nicht verschwinden; die Gleichungen (1.) und (8.) können nunmehr in folgender Form geschrieben werden:

$$(1^a.) \qquad x^{ng_\nu} . p_{0\nu} . y^{(n)} + x^{(n-1)g_\nu} . p_{1\nu} . y^{(n-1)} + \dots + p_{n\nu} y = 0,$$

$$(8^a.) \qquad \begin{cases} p_{0\nu} w^n + (p_{1\nu} - n_2 g_\nu x^{g_\nu - 1} . p_{0\nu}) w^{n-1} + (p_{2\nu} - (n-1)_2 g_\nu x^{g_\nu - 1} . p_{1\nu}) w^{n-2} + \dots \\ \qquad \dots + (p_{n-1,\nu} - g_\nu x^{g_\nu - 1} . p_{n-2,\nu}) w + p_{n\nu} = x^{g_\nu} . \mathfrak{P}(x). \end{cases}$$

Hiernach kann die Ermittelung derjenigen determinirenden Factoren, deren wirklicher Grad $= g_\nu - 1$ ist, in Verbindung gebracht werden mit der Betrachtung einer gewissen algebraischen Gleichung

$$F_\nu(x, v) = f_\nu(x, v) - \tfrac{1}{2} g_\nu . v . \frac{\partial^2 f_\nu(x,v)}{\partial v^2} \cdot x^m = 0,$$

wenn

$$f_\nu(x, v) = \sum_{h=0}^{n} p_{h\nu} v^{n-h}$$

gesetzt ist. Dabei brauchen in F_ν von den Functionen $p_{h\nu}$, resp. $x^{g_\nu - 1} . p_{h-1,\nu}$ jedesmal nur die Glieder mit $x^0, x^1, \dots x^{g_\nu - 1}$ beibehalten zu werden.

Man erhält zunächst die möglichen Werthe des höchsten Coefficienten $A_{g_\nu - 1}$ in $G(x^{-1})$, indem man v_0 als Wurzel der Gleichung

$$F_\nu(0, v) \doteq f_\nu(0, v) = 0$$

bestimmt und $-(g_\nu - 1) . A_{g_\nu - 1} = v_0$ setzt. Aus der oben über die Functionen $p_{h\nu}$ gemachten Bemerkung geht unmittelbar hervor, dass sich aus der Gleichung für v_0 stets mindestens ein endlicher und von Null verschiedener Werth dieser Grösse ergeben muss.

Bei der weiteren Verfolgung des Zusammenhanges jener algebraischen Gleichung mit der Bestimmung der determinirenden Factoren wollen wir aber der Bequemlichkeit halber von jetzt an den Index ν fortlassen, indem wir voraussetzen, dass für irgend einen der in Betracht kommenden Werthe von m die zugehörige Gleichung

$$(9.) \qquad F(x,v) = f(x,v) - \tfrac{1}{2}(m+1)x^m . v \frac{\partial^2 f(x,v)}{\partial v^2} = 0$$

aufgestellt sei, wobei

$$f(x,v) = \sum_{h=0}^{n} p_h v^{n-h}, \quad p_h = x^{h(m+1)+a} . q_h$$

gesetzt ist. Nach (8^a.) ist dann

$$(10.) \qquad F(x,w) = x^{m+1} . \mathfrak{P}(x),$$

und es hat gleichzeitig die gegebene Differentialgleichung die Form

$$(11.) \qquad x^{n(m+1)} . p_0 \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + x^{(n-1)(m+1)} . p_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0.$$

Ist nun zunächst v_0 eine ***einfache*** Wurzel der Gleichung

$$F(0,v) = f(0,v) = 0,$$

so ergeben sich aus (10.) durch m-malige Differentiation und Einsetzen der Werthe $x = 0$, $w = v_0$ die weiteren Coefficienten in w der Reihe nach eindeutig, endlich und gleich den entsprechenden Coefficienten in der zu v_0 gehörigen Entwickelung der durch (9.) definirten algebraischen Function v. Jeder einfachen Wurzel v_0 entspricht also ein eindeutig bestimmter determinirender Factor und ein einziger wohlbestimmter Werth des die Verzweigung des Normalintegrals bestimmenden Exponenten A, wie dies von Herrn ***Hamburger*** (wenigstens für den Fall, wo m den grösstmöglichen Werth besitzt) auf anderem Wege bewiesen ist (vgl. auch ***Thomé***, Journ. für Math. Bd. 76, S. 299). Man kann auch leicht nachweisen, dass der nach der oben angegebenen Art und Weise berechnete Werth von A mit dem von Herrn ***Hamburger*** gegebenen übereinstimmt, worauf wir aber hier nicht eingehen wollen.

Ehe wir nun zur Betrachtung der mehrfachen Wurzeln v_0 übergehen, müssen wir kurz auf die Bestimmung der Coefficienten der ganzen rationalen Function $g(x)$, welche in dem Normalintegral $x^A . e^{G(x^{-1})} . g(x)$ auftritt, sowie auf die Bedingungen, welche zur wirklichen Existenz dieses Integrals (in welchem $G(x^{-1})$ und A auf die angegebene Weise gefunden worden sind)

erfüllt sein müssen, eingehen. Die von Herrn ***Hamburger*** angestellten Betrachtungen erfahren hier so gut wie gar keine Aenderungen.

Wird die Differentialgleichung (11.) durch die Substitution $y = e^{G(x^{-1})}.\eta$ transformirt, so geht sie, wenn noch $\frac{d^i\eta}{dx^i} = u_i x^{A-i}$ $(i = 0, 1, \ldots n)$ eingeführt wird, über in (a. a. O. S. 264)

$$(12.) \quad \begin{cases} x^{m(n-1)}.p_0 u_n + (np_0P_1 + p_1)x^{m(n-2)}.u_{n-1} + \cdots \\ \cdots + (np_0P_{n-1} + (n-1)p_1P_{n-2} + \cdots + p_{n-1})u_1 \\ \quad + (p_0P_n + p_1P_{n-1} + \cdots + p_n)x^{-m}.u_0 = 0. \end{cases}$$

Die ganze rationale Function p_i ist, wie aus ihrer Definition hervorgeht, vom Grade $i(m+1)+\alpha$, P_i vom Grade $im-1$; also ist $x^{m(n-1)+\alpha}$ die höchste Potenz von x, die in (12.) in den Coefficienten von $u_n, \ldots u_0$ auftritt.

Nun ist für die Existenz unseres Normalintegrals vor Allem nothwendig, dass der oben bestimmte Werth A mit irgend einer Wurzel r der determinirenden Fundamentalgleichung

$$r(r+1)\ldots(r+n-1) - a_{11}r(r+1)\ldots(r+n-2) + \cdots + (-1)^n a_{nn} = 0$$

durch die Gleichung

$$(13.) \quad -r = A + \varkappa$$

verbunden sei, wo $\varkappa$ eine positive ganze Zahl bedeutet, welche den Grad der ganzen rationalen Function $g(x)$ angiebt, wenn das Normalintegral überhaupt existirt.

Ist die Bedingung (13.) erfüllt, so findet man, wenn

$$g(x) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_\varkappa x^\varkappa \qquad (B_0 \neq 0)$$

gesetzt wird, die $\varkappa$ Verhältnisse $\frac{B_1}{B_0}, \ldots \frac{B_\varkappa}{B_0}$, indem man die Coefficienten von $x^1, x^2, \ldots x^{m(n-1)+\varkappa+\alpha-1}$ in (12.) gleich Null setzt; damit die sich so ergebenden Gleichungen unter einander verträglich seien, müssen $m(n-1)+\alpha-1$ Bedingungen erfüllt sein, welche in Verbindung mit (13.) zugleich nothwendig und hinreichend sind, damit das auf die angegebene Weise bestimmte Integral wirklich existire.

II.

Es sei nun v_0 eine ***mehrfache*** Wurzel der Gleichung $F(0, v) = 0$, also

$$\left(\frac{\partial F(x, v)}{\partial v}\right)_{\substack{x=0 \\ v=v_0}} = 0.$$

Soll dieser Wurzel ein determinirender Factor (oder mehrere) entsprechen, so müssen die aus $F(x, v) = 0$ durch m-maliges Differentiiren und Einsetzen der Werthe $x = 0$, $v = v_0$ folgenden Gleichungen (wir wollen sie kurz als die zu $F = 0$ gehörigen *Ableitungsgleichungen* bezeichnen, da sie die Ableitungen der algebraischen Function v bestimmen) für die Grössen $v_1, v_2, \ldots$ der Reihe nach endliche Werthe ergeben, was im Allgemeinen nicht der Fall ist, da schon die erste dieser Gleichungen

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\v=v_0}} + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{\substack{x=0\\v=v_0}} . v_1 = 0$$

für v_1 einen unendlich grossen Werth liefert, wenn nicht auch $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\v=v_0}} = 0$ ist.

Wir müssen also zuerst die Bedingungen aufsuchen, welche hinreichend und nothwendig sind, damit den Ableitungsgleichungen die eben erwähnte Eigenschaft zukomme.

Es werde

$$F_{ix} = \left[\frac{\partial^{i+x} F(x, v)}{\partial x^i \partial v^x}\right]_{\substack{x=0\\v=v_0}}, \quad v_h = \frac{1}{h!}\left(\frac{d^h v}{dx^h}\right)_0, \quad \Phi_r = \sum_{x=0}^{r} \frac{1}{(r-x)!\,x!} F_{r-x,x} . v_1^x$$

gesetzt. Alsdann lässt sich das System der zu $F = 0$ gehörigen Ableitungsgleichungen für $x = 0$, $v = v_0$ folgendermassen schreiben (vergl. *Stolz*, „Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven", Math. Annalen Bd. 8, S. 417 f.):

$$(1.) \quad \begin{cases} \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i F(x, v)}{dx^i}\right]_{\substack{x=0\\v=v_0}} = K_i = \sum_{x,\lambda,\varrho} \frac{1}{\varrho_1!\varrho_2!\ldots} \cdot \frac{\partial^x \Phi_r}{\partial v_1^x} \cdot v_{\lambda_1}^{\varrho_1} v_{\lambda_2}^{\varrho_2} \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \\ (\Sigma \varrho_\alpha = x, \ \Sigma \lambda_\alpha \varrho_\alpha = i + x - r, \ \lambda_\alpha \geqq 2, \ 2 \leqq r + x \leqq i, \ x \leqq r) \end{cases}$$

oder auch, wenn derjenige Theil der $i$ten Ableitungsgleichung, welcher $v_h, v_{h+1}, \ldots$ nicht enthält, sondern nur $v_1, \ldots v_{h-1}$, mit $\Phi_i^{(h-2)}$ bezeichnet wird (*Stolz*, a. a. O. S. 424),

$$(2.) \quad \begin{cases} K_i = \sum_{l,\mu,\sigma} \frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\ldots} \frac{\partial^l \Phi_s^{(h-2)}}{\partial v_{h-1}^l} \cdot v_{\mu_1}^{\sigma_1} v_{\mu_2}^{\sigma_2} \ldots = 0, \\ (\Sigma \sigma_\alpha = l, \ \Sigma \mu_\alpha \sigma_\alpha = i + (h-1)l - s, \ h \leqq s + l \leqq i, \ \mu_\alpha \geqq h). \end{cases}$$

Dabei ist, wie man leicht aus (2.) herleiten kann,

$$(3.) \quad \Phi_i^{(h-1)} = \sum_{l=0}^{\left[\frac{i}{h}\right]} \frac{1}{l!} \cdot \frac{\partial^l \Phi_{i-l}^{(h-2)}}{\partial v_{h-1}^l} \cdot v_h^l .$$

Die ersten Ableitungsgleichungen lauten nun, ausgeschrieben,

$$F_{10}+F_{01}v_1 = 0,$$
$$\frac{1}{2!}F_{20}+F_{11}v_1+\frac{1}{2!}F_{02}v_1^2+F_{01}v_2 = 0,$$
$$\frac{1}{3!}F_{30}+\frac{1}{2!}F_{21}v_1+\frac{1}{2!}F_{12}v_1^2+\frac{1}{3!}F_{03}v_1^3+F_{11}v_2+F_{02}v_1v_2+F_{01}v_3 = 0.$$

Wie schon oben bemerkt, würde, da der Voraussetzung zufolge $F_{01}=0$ ist, kein endlicher Werth v_1 existiren können, wenn nicht zugleich $F_{10}=0$ wäre. Ist diese Bedingung erfüllt, so liefert die zweite Gleichung einen oder zwei endliche Werthe für v_1, falls nicht F_{11} und F_{02} beide Null sind. Wenn aber dies der Fall ist, so muss, damit ein solcher endlicher Werth existiren kann, auch $F_{20}=0$ sein; dann aber liefert die dritte Gleichung einen, zwei oder drei endliche Werthe für v_1, wenn nicht F_{21}, F_{12}, F_{03} gleichzeitig Null sind, u. s. w.

Um die Untersuchung allgemein zu halten, wollen wir annehmen, es sei ν_1 die kleinste Zahl, für welche noch sämmtliche Grössen $F_{\nu_1-1-\varkappa,\varkappa}$ ($\varkappa=1, 2, \dots \nu_1-1$) gleich Null sind, dagegen nicht mehr sämmtliche Grössen $F_{\nu_1-\varkappa,\varkappa}$ ($\varkappa=1, 2, \dots \nu_1$), so würde offenbar die den Werth von v_1 bestimmende Gleichung lauter unendliche Wurzeln haben, wenn nicht auch gleichzeitig

$$(A.) \qquad F_{10}=F_{20}=F_{30}=\cdots=F_{\nu_1-1,0}=0$$

wären; ist dies aber der Fall, so werden die ν_1-1 ersten Ableitungsgleichungen identisch erfüllt, da für $i<\nu_1$ $\Phi_i\equiv 0$, $\frac{\partial^\varkappa\Phi_i}{\partial v_1^\varkappa}\equiv 0$ ist, und es wird die $\nu_1$te Ableitungsgleichung, welche den Werth von v_1 bestimmt, nämlich

$$\Phi_{\nu_1}=\sum_{\varkappa=0}^{\nu_1}\frac{1}{(\nu_1-\varkappa)!\varkappa!}F_{\nu_1-\varkappa,\varkappa}v_1^\varkappa=0$$

(„Finalgleichung für v_1“ nach der Bezeichnung des Herrn ***Hamburger*** in der Abhandlung „Ueber die Entwickelung algebraischer Functionen in Reihen“, ***Schlömilchs*** Zeitschrift, Bd. 16, S. 473), eine oder mehrere endliche Wurzeln besitzen, da die Coefficienten von v_1, v_1^2, $\dots$ $v_1^{\nu_1}$ nicht alle Null sind.

Die folgenden Ableitungsgleichungen können nun, wenn man

$$i=\nu_1+i', \quad r=\nu_1+r'$$

setzt, auf die Form

$$\Sigma\frac{1}{\varrho_1!\varrho_2!\dots}\frac{\partial^z\Phi_{\nu_1+r'}}{\partial v_1^z}\cdot v_{\lambda_1}^{\varrho_1}v_{\lambda_2}^{\varrho_2}\dots=0$$
$$(\Sigma\varrho_a=z,\ \Sigma\lambda_a\varrho_a=i'+z-r',\ 1\leqq r'+z\leqq i',\ z\leqq\nu_1+r')$$

gebracht werden (***Stolz***, a. a. O. S. 422), d. h. wenn nur die ersten Glei-

chungen hingeschrieben werden,

$$\Phi_{\nu_1+1}+\frac{\partial\Phi_{\nu_1}}{\partial v_1}\cdot v_2 = 0,$$

$$\Phi_{\nu_1+1}+\frac{\partial\Phi_{\nu_1+1}}{\partial v_1}v_1+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\Phi_{\nu_1}}{\partial v_1^2}.v_2^2+\frac{\partial\Phi_{\nu_1}}{\partial v_1}.v_3 = 0,$$

u. s. f.

Ist nun v_1 eine endliche Wurzel der Gleichung $\Phi_{\nu_1}=0$, und zwar zunächst eine einfache, also $\frac{\partial\Phi_{\nu_1}}{\partial v_1}\neq 0$, so folgen aus den obigen Gleichungen auch endliche, eindeutig bestimmte Werthe von v_2, v_3, ...; es existirt dann eine zu v_0, v_1 gehörige reguläre (nach ganzen Potenzen von x fortschreitende) Entwickelung von v, wie dies ja bekannt ist. Ist aber v_1 eine mehrfache endliche Wurzel von $\Phi_{\nu_1}=0$, also $\frac{\partial\Phi_{\nu_1}}{\partial v_1}=0$, so wollen wir der Allgemeinheit wegen gleich annehmen, es sei ν_2 die kleinste Zahl, für welche noch alle Grössen $\frac{\partial^\varkappa\Phi_{\nu_2-1-\varkappa}}{\partial v_1^\varkappa}\left(\varkappa=1,\ 2,\ \ldots\left[\frac{\nu_2-1}{2}\right]\right)$ gleich Null sind, dagegen nicht mehr sämmtliche Grössen $\frac{\partial^\varkappa\Phi_{\nu_2-\varkappa}}{\partial v_1^\varkappa}\left(\varkappa=1,\ 2,\ \ldots\left[\frac{\nu_2}{2}\right]\right)$, so müssen, damit die Finalgleichung für v_2 wenigstens eine endliche Wurzel habe, die Bedingungen

$$(B.)\qquad \Phi_{\nu_1+1}(v_1)=\Phi_{\nu_1+2}(v_1)=\cdots=\Phi_{\nu_2-1}(v_1)=0$$

erfüllt sein, wenn für v_1 der hier betrachtete Werth gesetzt wird; und ist dies der Fall, so wird diese Finalgleichung, nämlich

$$\Phi'_{\nu_2}=\sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{\nu_2}{2}\right]}\frac{1}{\varkappa!}\frac{\partial^\varkappa\Phi_{\nu_2-\varkappa}}{\partial v_1^\varkappa}v_2^\varkappa=0,$$

eine oder mehrere endliche Wurzeln besitzen. Das weitere Schlussverfahren ist nun ganz analog.

Man bringe zunächst (indem man in (2.) $h=3$ nimmt) die Ableitungsgleichungen von der (ν_2+1)ten an auf die Form

$$K_i=\Sigma\frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\ldots}\cdot\frac{\partial^l\Phi'_s}{\partial v_2^l}v_{\mu_1}^{\sigma_1}v_{\mu_2}^{\sigma_2}\ldots=0\quad(\Sigma\sigma_a=l,\ \Sigma\mu_a\sigma_a=i+2l-s,\ 3\leqq s+l\leqq i)$$

und setze $i=\nu_2+i'$, $\mu_a=\delta_a+1$, $s=\nu_2+s'$; alsdann wird

$$\Sigma\sigma_a=l,\quad \Sigma\delta_a\sigma_a=i'+l-s',\quad 1\leqq s'+l\leqq i'$$

(der Minimalwerth von $s'+l$ ist $=1$, da offenbar das Werthepaar $s'=0$, $l=1$ vorkommt), woraus hervorgeht, dass diese Gleichungen (für $s'=1,\ 2,\ \ldots$)

in der Form grosse Aehnlichkeit mit den früheren haben, nur dass statt v_{δ_α} hier $v_{\delta_\alpha+1}$, statt $\Phi_{\nu_1+s'}$ hier $\Phi'_{\nu_2+s'}$ steht. Die ersten dieser Gleichungen lauten

$$\Phi'_{\nu_2+1}+\frac{\partial\Phi'_{\nu_2}}{\partial v_2}\cdot v_3=0,$$

$$\Phi'_{\nu_2+2}+\frac{\partial\Phi'_{\nu_2+1}}{\partial v_2}\cdot v_3+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\Phi'_{\nu_2}}{\partial v_2^2}\cdot v_3^2+\frac{\partial\Phi'_{\nu_2}}{\partial v_2}\cdot v_4=0$$

u. s. w.

Hieraus ergeben sich nun wieder, genau wie vorher, folgende Bedingungen.

Ist v_2 eine endliche Wurzel der Gleichung $\Phi'_{\nu_2}=0$ und ν_3 die kleinste Zahl, für welche noch sämmtliche Grössen $\frac{\partial^\varkappa\Phi'_{\nu_3-1-\varkappa}}{\partial v_2^\varkappa}\left(\varkappa=1, 2, \ldots \left[\frac{\nu_3-1}{3}\right]\right)$ verschwinden, wenn für v_0, v_1, v_2 die hier betrachteten Werthe eingesetzt werden, dagegen nicht mehr alle Grössen $\frac{\partial^\varkappa\Phi'_{\nu_3-\varkappa}}{\partial v_2^\varkappa}\left(\varkappa=1, 2, \ldots \left[\frac{\nu_3}{3}\right]\right)$ gleich Null sind, so ist nothwendig, dass für diese Werthe von v_0, v_1, v_2

$$(C.)\qquad \Phi'_{\nu_2+1}(v_2)=\Phi'_{\nu_2+2}(v_2)=\cdots=\Phi'_{\nu_3-1}(v_2)=0$$

sei, damit die Finalgleichung für v_3, welche dann

$$\Phi''_{\nu_3}=\sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{\nu_3}{3}\right]}\frac{1}{\varkappa!}\frac{\partial^\varkappa\Phi'_{\nu_3-\varkappa}}{\partial v_2^\varkappa}\cdot v_3^\varkappa=0$$

wird, für v_3 wenigstens *einen* endlichen Werth liefere.

Es ist unmittelbar ersichtlich, wie man weiter fortzufahren hat. Vor allem muss man darauf achten, dass man, der Gleichung $F(x,w)=x^{m+1}.\mathfrak{P}(x)$ zufolge, nur die m ersten Ableitungsgleichungen der Gleichung $F(x,v)=0$ berücksichtigen darf. Werden die Zahlen ν_4, ν_5, ... in analoger Weise wie ν_1, ν_2, ν_3 definirt und ist für ein bestimmtes System auf einander folgender Werthe v_0, v_1, v_2, ...

$$\nu_{r-1}\leqq m<\nu_r,$$

so müssen ausser den Bedingungen (*A.*), (*B.*), (*C.*) noch die folgenden erfüllt sein:

$$(D.)\qquad \Phi''_{\nu_3+1}(v_3)=\Phi''_{\nu_3+2}(v_3)=\cdots=\Phi''_{\nu_4-1}(v_3)=0,$$

. . . . . .

$$(Q.)\qquad \Phi^{(r-3)}_{\nu_{r-2}+1}(v_{r-2})=\Phi^{(r-3)}_{\nu_{r-2}+2}(v_{r-2})=\cdots=\Phi^{(r-3)}_{\nu_{r-1}-1}(v_{r-2})=0,$$

wozu für $\nu_{r-1}<m$ noch die folgenden kommen:

$$(R.)\qquad \Phi^{(r-2)}_{\nu_{r-1}+1}(v_{r-1})=\Phi^{(r-2)}_{\nu_{r-1}+2}(v_{r-1})=\cdots=\Phi^{(r-2)}_{m}(v_{r-1})=0.$$

Und sind diese Bedingungen erfüllt, so erhalten wir aus den m ersten Ableitungsgleichungen von $F(x,v)=0$ ein System von endlichen Werthen $v_0, v_1, \ldots v_{r-1}$, während die Werthe der weiteren Coefficienten $v_r, v_{r+1}, \ldots$, welche gerade diesem System $(v_0, v_1, \ldots v_{r-1})$ entsprechen, aus den m ersten Ableitungsgleichungen von $F(x,v)=0$ nicht berechnet werden können.

III.

Um diese Coefficienten bestimmen zu können, muss man, wie schon bemerkt, zu einer Transformation der gegebenen Differentialgleichung seine Zuflucht nehmen.

Man setze

$$(1.)\quad \begin{cases} u' = v_0+v_1x+\cdots+v_{r-1}x^{r-1}, \\ \dfrac{dG'(x^{-1})}{dx} = u'.x^{-(m+1)}, \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned} G'(x^{-1}) &= -\frac{1}{m}v_0x^{-m}-\frac{1}{m-1}v_1x^{-(m-1)}-\cdots-\frac{1}{m-r+1}v_{r-1}x^{-(m-r+1)} \\ &= A_mx^{-m}+A_{m-1}x^{-(m-1)}+\cdots+A_{m-r+1}x^{-(m-r+1)} \end{aligned}$$

und transformire die gegebene Differentialgleichung (11.), No. I, durch die Substitution

$$(2.)\quad y = e^{G'(x^{-1})}.\eta.$$

Für η ergiebt sich alsdann folgende Differentialgleichung:

$$(3.)\quad x^{n(m+1)}.p'_0.\frac{d^n\eta}{dx^n}+x^{(n-1)(m+1)}.p'_1.\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+\cdots+p'_n\eta = 0,$$

wo, wenn

$$P'_\lambda = x^{\lambda(m+1)}.e^{-G'(x^{-1})}.\frac{d^\lambda e^{G'(x^{-1})}}{dx^\lambda}$$

gesetzt wird,

$$p'_{n-\lambda} = \sum_{i=0}^{n-\lambda}(n-i)_\lambda P'_{n-\lambda-i}p_i$$

ist, sodass auch die p'_i ganze rationale Functionen von x sind. Wir wollen versuchen, etwas darüber festzustellen, von welcher Ordnung diese Functionen für $x=0$ verschwinden.

Man findet leicht

$$(4.)\quad P'_i = u'^i-i_2(m+1)x^m.u'^{i-1}+x^{m+1}.g'_i(x),$$

also

$$(5.) \qquad p'_n = F(x,u') + x^{m+1}.g_n(x), \quad p'_{n-\lambda} = \frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda F(x,u')}{\partial u'^\lambda} + x^m.g_{n-\lambda}(x).$$

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen von S. 11 ist daher für $i < m+1$

$$\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i p'_n}{dx^i}\right]_0 = K_i = 0,$$

(denn die Coefficienten in u' wurden ja aus den Gleichungen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, ... $K_m = 0$ berechnet), sodass p'_n mindestens von der $(m+1)$ten Ordnung für $x = 0$ verschwindet.

Um die entsprechende Bestimmung für die Functionen $p'_{n-\lambda}$ auszuführen, werden wir die den K_i entsprechenden Grössen

$$K_i^{(\lambda)} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\partial^\lambda F(x,v)}{\partial v^\lambda}\right)\right]_{\substack{x=0\\ v=v_0}}$$

zu untersuchen haben.

Es lässt sich nun zeigen, dass allgemein für jedes i, λ

$$(6.) \qquad K_i^{(\lambda)} = \frac{\partial^\lambda K_{i+2\lambda}}{\partial v_2^\lambda}$$

ist. Für $\lambda = 1$ ist der Satz von Herrn ***Stolz*** (a. a. O. S. 427, $(\gamma.)$) bewiesen; gesetzt nun, er sei überhaupt für irgend einen bestimmten Werth $\lambda = \varkappa$ als richtig dargethan, so ist, da $K_i^{(\varkappa+1)}$ aus $K_i^{(\varkappa)}$ gerade so hervorgeht, wie $K_i^{(1)}$ aus K_i,

$$K_i^{(\varkappa+1)} = \frac{\partial K_{i+2}^{(\varkappa)}}{\partial v_2} = \frac{\partial^{\varkappa+1} K_{i+2(\varkappa+1)}}{\partial v_2^{\varkappa+1}},$$

sodass der Satz dann auch für $\lambda = \varkappa+1$ gilt, womit er allgemein bewiesen ist. Man kann den Beweis auch unabhängig von der angegebenen speciellen Formel führen, worauf wir aber hier nicht eingehen.

Zur Transformation der Gleichung (6.) kann folgende Formel dienen, die man in ähnlicher Weise wie die vorstehende entweder direct herleiten oder vermittelst einer von Herrn ***Stolz*** (a. a. O., S. 428, $(\delta.)$) aufgestellten durch den Schluss von $\varkappa$ auf $\varkappa+1$ beweisen kann, nämlich die Gleichung

$$(7.) \qquad \frac{\partial^\varkappa \Phi_s^{(h-1)}}{\partial v_2^\varkappa} = \frac{\partial^\varkappa \Phi_{s+\varkappa(h-2)}^{(h-1)}}{\partial v_h^\varkappa}.$$

Die Formeln (6.) und (7.) wollen wir benutzen, um etwas darüber festzustellen, bis zu welchen Indices i die Grössen $K_i^{(\lambda)}$ verschwinden, wenn für die Ableitungen von v an der Stelle $x = 0$, $v = v_0$ die oben betrachteten

Werthe $v_1, v_2, \ldots v_{r-1}$ gesetzt werden, für welche die Bedingungen der No. II gelten.

Hierzu bringen wir die linken Seiten der Ableitungsgleichungen von $F=0$ (für $x=0,\ v=v_0,\ \ldots$) auf die Form

$$K_i = \Sigma \frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\ldots} \frac{\partial^l \Phi_s^{(r-2)}}{\partial v_{r-1}^l} \cdot v_{\mu_1}^{\sigma_1} v_{\mu_2}^{\sigma_2} \ldots$$

$$(\Sigma\sigma_a = l,\ \Sigma\mu_a\sigma_a = i+l(r-1)-s,\ r \leqq l+s \leqq i),$$

wobei zu beachten, dass den Bedingungen der No. II zufolge für $s < \nu_{r-1}$ stets

$$\frac{\partial^l \Phi_s^{(r-2)}}{\partial v_{r-1}^l} = 0 \qquad (l \geqq 0) \tag{8.}$$

ist.

Nach (6.) und (7.) wird dann für $r \geqq 3$

$$K_i^{(\lambda)} = \Sigma \frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\ldots} \frac{\partial^l}{\partial v_{r-1}^l} \left(\frac{\partial^\lambda \Phi_s^{(r-2)}}{\partial v_2^\lambda} \right) v_{\mu_1}^{\sigma_1} v_{\mu_2}^{\sigma_2} \ldots$$

$$= \Sigma \frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\ldots} \frac{\partial^{l+\lambda} \Phi_{s+\lambda(r-3)}^{(r-2)}}{\partial v_{r-1}^{l+\lambda}} v_{\mu_1}^{\sigma_1} v_{\mu_2}^{\sigma_2} \ldots$$

$$(\Sigma\sigma_a = l,\quad \Sigma\mu_a\sigma_a = i+2\lambda+l(r-1)-s,\quad r \leqq l+s \leqq i+2\lambda).$$

Nach (8.) ist daher sicher $K_i^{(\lambda)} = 0$ für alle i, für welche

$$i+2\lambda+\lambda(r-3) < \nu_{r-1},\ \text{d. h. } i < \nu_{r-1}-\lambda(r-1).$$

Für $r \leqq 2$ kann man aus der Gleichung (S. 11)

$$\begin{cases} K_i^{(\lambda)} = \Sigma \dfrac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\ldots} \dfrac{\partial^{l+\lambda} \Phi_{s+\lambda}}{\partial v_1^{l+\lambda}} v_{\mu_1}^{\sigma_1} v_{\mu_2}^{\sigma_2} \ldots \\ (\Sigma\sigma_a = l,\ \Sigma\mu_a\sigma_a = i+l-s,\ 2 \leqq s+l \leqq i) \end{cases} \tag{9.}$$

auf ganz analoge Weise erschliessen, dass $K_i^{(\lambda)}$ sicher Null ist für $i < \nu_1 - \lambda$ (wo ν_1 für $r=1$ durch m zu ersetzen ist); für $r=2$ kann also der obige Ausspruch beibehalten werden. — Eine genaue Bestimmung des ersten Index i, für welchen $K_i^{(\lambda)}$ bei gegebenem λ nicht mehr verschwindet, ist (von einem sogleich zu betrachtenden wichtigen Falle abgesehen) allgemein nicht möglich, da auf sicher verschwindende Grössen $K_i^{(\lambda)}$ solche folgen, in denen Glieder auftreten, die durch die Bedingungen der No. II gar nicht berührt werden (vgl. S. 28). In der That hat auch diese Bestimmung mit der Natur der algebraischen Function v nichts zu thun.

Der soeben erwähnte Fall, in welchem doch, wenigstens für $\lambda=1$, eine genaue Bestimmung des ersten Index i, für den $K_i^{(1)} \neq 0$, möglich ist,

tritt ein, wenn v_{r-1} eine einfache Wurzel der Gleichung $\Phi_{\nu_{r-1}}^{(r-2)}(v_{r-1}) = 0$ ist. Da v_{r-1} der letzte Coefficient sein sollte, der sich für das betrachtete Werthsystem $(v_0, v_1, \ldots)$ aus den Gleichungen $K_1 = 0, \ldots K_m = 0$ berechnen lässt, so wird hier $\nu_{r-1} = m$ sein. Man betrachte nun, zunächst für $r \geqq 3$,

$$K_{m-r+1}^{(1)} = \Sigma \frac{1}{\sigma_1!\,\sigma_2!\ldots} \frac{\partial^{l+1}\Phi_{s+r-3}^{(r-2)}}{\partial v_{r-1}^{l+1}} v_{\mu_1}^{\sigma_1} v_{\mu_2}^{\sigma_2} \ldots$$

$$(\Sigma\sigma_a = l,\ \Sigma\mu_a\sigma_a = m-r+3+l(r-1)-s,\ r \leqq l+s \leqq m-r+3).$$

Da $\frac{\partial^{l+1}\Phi_{s+r-3}^{(r-2)}}{\partial v_{r-1}^{l+1}} = 0$ für $s < m-r+3$, so kommt nur dasjenige Glied in Betracht, wo $l = 0$, $s = m-r+3$ ist; sodass $K_{m-r+1}^{(1)} = \frac{\partial \Phi_m^{(r-2)}}{\partial v_{r-1}} \neq 0$ (nach der Voraussetzung) ist. Hier ist also $i = m-r+1$ der erste Index, für welchen $K_i^{(1)}$ nicht verschwindet. Für $r = 2$ leitet man dasselbe Resultat aus (9.) her; der Fall $r = 1$ braucht nicht in Betracht gezogen zu werden. —

Um nun diese Ergebnisse mit der Untersuchung der obigen Functionen $p'_{n-\lambda}$ in Verbindung zu setzen, beachte man, dass die Grösse $\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\partial^\lambda F(x,u')}{\partial u'^\lambda}\right)\right]_0$ aus $K_i^{(\lambda)}$ dadurch hervorgeht, dass man die Grössen $\Phi_r^{(h-1)}$, welche in dem Ausdruck der letzteren auftreten, ersetzt durch solche Grössen, die sich von den $\Phi_r^{(h-1)}$ insofern unterscheiden, als in ihnen v durch u' ersetzt ist; für $r \leqq m$ stimmen aber diese beiden Arten von Grössen $\Phi_r^{(h-1)}$ mit einander überein (den Bedingungen der No. II zufolge), woraus sich ergiebt, dass für die oben betrachteten Werthe von i

$$\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i p'_{n-\lambda}}{dx^i}\right]_0 = K_i^{(\lambda)}$$

ist. Hiernach können wir sagen, dass $p'_{n-\lambda}$ mindestens von der Ordnung $\nu_{r-1} - \lambda(r-1)$ für $x = 0$ verschwindet (für $r = 1$ ist diese Zahl durch $m-\lambda$ zu ersetzen); eine genaue Bestimmung der Ordnungszahl ist (wie sich z. B. auch später bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung direct zeigen wird, vgl. S. 28) aus den Bedingungen der No. II allein nicht möglich, ausgenommen den Fall, dass v_{r-1} eine einfache Wurzel der betreffenden Finalgleichung ist ($r \geqq 2$), wo man dann sicher feststellen kann, dass p'_{n-1} gerade von der Ordnung $m-r+1$ verschwindet. —

Es sind nunmehr diejenigen determinirenden Factoren der Differentialgleichung (3.) zu ermitteln, deren wirklicher Grad $\leqq m-r$ ist. Hierzu hat man zuerst wieder für die Gleichung (3.) die möglichen Werthe für die Grade m' der determinirenden Factoren aufzustellen; diese sind, wie aus

den obigen Darlegungen erhellt, durch die entsprechenden Werthe für die ursprüngliche Differentialgleichung und die Bedingungen der No. II allein noch nicht bestimmt, und es bedarf daher, um sie zu finden, einer besonderen Untersuchung, über deren Ergebniss sich (von dem eben behandelten Falle abgesehen) nichts Allgemeines im Voraus feststellen lässt. Ist kein Werth von m' vorhanden, der $\leqq m-r$ wäre, so entspricht dem Werthsystem $(v_0, v_1, \ldots v_{r-1})$ kein determinirender Factor der ursprünglichen Gleichung; ist dagegen ein Werth $m' \leqq m-r$ vorhanden, so kann man die Coefficienten $v_r, v_{r+1}, \ldots v_{m-m'-1}$ gleich Null setzen und die folgenden, soweit dies angeht, aus der dem Werthe m' entsprechenden, zu (3.) gehörigen algebraischen Gleichung $F'(x, v') = 0$ durch Reihenentwickelung einer algebraischen Function bestimmen. Möglichenfalls werden neue Transformationen nöthig sein, wenn die m' ersten Ableitungsgleichungen von $F' = 0$ nicht ausreichen sollten, um alle Coefficienten zu bestimmen (nämlich wenn der Coefficient $v_{m-m'}$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung $F'(0, v') = 0$ ist). Jedenfalls aber ist durch die obigen Betrachtungen ein wohlbestimmtes Rechnungsverfahren gegeben, welches meist sehr schnell, in allen Fällen aber nach einer endlichen Anzahl von Operationen zum Ziele führen muss, denn der ungünstigste Fall, der bei einer solchen algebraischen Gleichung $F' = 0$ eintreten könnte, wäre ja der, dass man aus dieser Gleichung nur den ersten Coefficienten $v_{m-m'}$ berechnen könnte (nämlich wenn die der Zahl ν_1 entsprechende Zahl $\nu_1' > m'$ wäre); für diesen ersten Coefficienten aber erhält man (vorausgesetzt, dass m' eben ein möglicher Grad eines determinirenden Factors von (3.) ist) unter allen Umständen endliche und von Null verschiedene Werthe, wie aus den früheren Darlegungen sofort hervorgeht.

Wir hatten oben Gelegenheit, auf einen gewissen Fall hinzuweisen, in welchem sich scharf feststellen liess, von welcher Ordnung in der transformirten Differentialgleichung (3.) der Coefficient p'_{n-1} für $x = 0$ verschwindet. Auf dieser Feststellung beruht folgender Satz: Wenn eine der zu den successiven Gleichungen $F(x, v)$, $F'(x, v') = 0$, ... gehörigen Ableitungsgleichungen eine ***einfache*** endliche Wurzel v_ϱ besitzt, so entspricht dem betrachteten Werthsystem $v_0, \ldots v_{\varrho-1}, v_\varrho$ ein einziger wohlbestimmter determinirender Factor, zu welchem der zugehörige Exponent A ebenfalls eindeutig bestimmt ist. Wir werden diesen Satz zunächst unabhängig von den obigen Feststellungen beweisen, dann aber einen zweiten Beweis geben, welcher sich wesentlich auf jene Feststellungen stützt.

Wir wollen der Bequemlichkeit wegen, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, annehmen, dass v_ϱ eine einfache Wurzel einer der zu $F(x,v)=0$ selbst gehörenden Ableitungsgleichungen sei ($\varrho \leqq r-1$), da in jedem anderen Falle der Beweis ganz analog zu führen wäre.

Man substituire in die Differentialgleichung

$$x^{n(m+1)}p_0\frac{d^ny}{dx^n}+x^{(n-1)(m+1)}p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_ny \;=\; 0,$$

unter $v_0, \ldots v_{\varrho-1}$ das betrachtete Werthsystem verstehend, welches den vorhergehenden Ableitungsgleichungen genügt, $y=e^{\Gamma(x^{-1})}.\eta$, wo

$$\frac{d\Gamma(x^{-1})}{dx}=v_0x^{-(m+1)}+v_1x^{-m}+\cdots+v_{\varrho-1}x^{-(m-\varrho+2)}=t.x^{-(m+1)}$$

ist. Für η ergiebt sich dann, wenn noch

$$\Pi_\lambda=x^{\lambda(m+1)}.e^{-\Gamma(x^{-1})}.\frac{d^\lambda e^{\Gamma(x^{-1})}}{dx^\lambda},\quad \varphi_{n-\lambda}=\sum_{i=0}^{n-\lambda}(n-i)_\lambda\Pi_{n-\lambda-i}.p_i$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung

$$(10.)\qquad x^{n(m+1)}\varphi_0\frac{d^n\eta}{dx^n}+x^{(n-1)(m+1)}\varphi_1\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+\cdots+\varphi_n\eta \;=\; 0.$$

Von dieser Gleichung wollen wir nun zeigen, dass sie einen determinirenden Factor $(m-\varrho)$ten Grades besitzt, in welchem der höchste Coefficient eine einfache Wurzel der betreffenden algebraischen Gleichung ist, und welchem also zufolge des Fundamentalsatzes ein eindeutig bestimmter Exponent entspricht.

Um diesen Nachweis zu führen, bringen wir die Differentialgleichung (10.) auf die Form

$$x^{n(m-\varrho+1)}\varphi_0\frac{d^n\eta}{dx^n}+x^{(n-1)(m-\varrho+1)}\varphi_1x^{-\varrho}\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+\cdots+\varphi_nx^{-n\varrho}\eta \;=\; 0$$

und bilden nach den Vorschriften der No. I die zugehörige algebraische Gleichung

$$\begin{aligned}G(x,z) \;=\; x^\beta\{&\varphi_0z^n+(\varphi_1x^{-\varrho}-n_2(m-\varrho+1)x^{m-\varrho}.\varphi_0)z^{n-1}\\&+(\varphi_2x^{-2\varrho}-(n-1)_2(m-\varrho+1)x^{m-2\varrho}\varphi_1)z^{n-2}\\&+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&+(\varphi_{n-1}x^{-(n-1)\varrho}-(m-\varrho+1)x^{m-(n-1)\varrho}\varphi_{n-2})z+\varphi_nx^{-n\varrho}\} \;=\; 0,\end{aligned}$$

wo die positive Zahl β, welche dem früheren α entspricht, noch in passender Weise zu bestimmen sein wird.

Setzen wir $z=\xi.x^{-\varrho}$, so kommt

$$G(x,z)=G_1(x,\xi).x^{\beta-n\varrho},\quad G_1(x,\xi)=\sum_{\lambda=0}^{n}\varphi_{n-\lambda}\xi^\lambda-(m-\varrho+1)\xi x^m\sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda+1)_2\varphi_{n-\lambda-1}\xi^{\lambda-1}.$$

Nun hat man aber nach Früherem

$$\Pi_{n-\lambda-i} = t^{n-\lambda-i} - (n-\lambda-i)_2(m+1)t^{n-\lambda-i-1}.x^m + x^{m+1}.g'_{n-\lambda-i}(x),$$

also

$$\varphi_{n-\lambda} = \sum_{i=0}^{n-\lambda}(n-i)_\lambda p_i t^{n-\lambda-i} - (m+1)x^m \sum_{i=0}^{n-\lambda-2}(n-i-\lambda)_2(n-i)_\lambda p_i t^{n-\lambda-i-1} + x^{m+1}.g_{n-\lambda}(x)$$

$$= \frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda f(x,t)}{\partial t^\lambda} - \tfrac{1}{2}(m+1).\frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^{\lambda+2} f(x,t)}{\partial t^{\lambda+2}}x^m.t + x^{m+1}.g_{n-\lambda}(x);$$

daher wird

$$G_1(x,\xi) = \sum_{\lambda=0}^{n}\frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda f(x,t)}{\partial t^\lambda}.\xi^\lambda - \tfrac{1}{2}(m+1)x^m.t\sum_{\lambda=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^{\lambda+2}f(x,t)}{\partial t^{\lambda+2}}.\xi^\lambda$$

$$-\tfrac{1}{2}(m-\varrho+1)x^m.\xi\sum_{\lambda=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^{\lambda+2}f(x,t)}{\partial t^{\lambda+2}}.\xi^\lambda + x^{m+1}.g(x,\xi)$$

$$= f(x,t+\xi) - \tfrac{1}{2}(m+1)x^m(t+\xi).\frac{\partial^2 f(x,t+\xi)}{\partial(t+\xi)^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}\varrho x^m.\xi.\frac{\partial^2 f(x,t+\xi)}{\partial t^2} + x^{m+1}.g(x,\xi)$$

$$= F(x,t+\xi) + \tfrac{1}{2}\varrho.x^m.\xi.\frac{\partial^2 f(x,t+\xi)}{\partial t^2} + x^{m+1}.g(x,\xi)$$

oder

$$(11.)\qquad x^{n\varrho-\beta}.G(x,z) = F(x,t+z.x^\varrho) + x^{m+1}.g_1(x,z).$$

Hieraus ergiebt sich die Existenz eines einfachen regulären Functionszweiges z, der für $x=0$ in den Werth v_ϱ übergeht, da der vorstehenden Gleichung zufolge die ϱ ersten Ableitungen von $t+z.x^\varrho$ mit den entsprechenden von v (die aus $F(x,v)=0$ durch ν_ϱ Differentiationen gewonnen werden) übereinstimmen; zugleich lehrt diese Betrachtung, dass $\beta = n\varrho - \nu_\varrho$ zu wählen ist; dass diese Zahl stets $\geqq 0$ ist, kann leicht gezeigt werden.

Aus der eben bewiesenen Eigenschaft der algebraischen Gleichung $G(x,z)$ ergiebt sich aber sofort die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

Hiernach gehen wir über zu dem zweiten Beweise des obigen Satzes mit Hülfe der Feststellungen von S. 18.

Behalten wir die Bezeichnungen von S. 15 ff. bei, so ist klar, dass, wenn v_ϱ ($\varrho < r-1$) eine einfache Wurzel der betreffenden Ableitungsgleichung ist, dasselbe auch von v_{r-1} gelten wird, und zwar wird v_{r-1} bestimmt aus der $m$ten Ableitungsgleichung $K_m = 0$. Transformiren wir dann, wie S. 15, die gegebene Differentialgleichung durch

$$y = e^{G'(x^{-1})}.\eta, \quad x^{m+1}.\frac{dG'(x^{-1})}{dx} = v_0 + v_1 x + \cdots + v_{r-1}x^{r-1},$$

so ergiebt sich für η die Gleichung

$$(3.) \qquad x^{n(m+1)}p_0'\frac{d^n\eta}{dx^n}+x^{(n-1)(m+1)}p_1'\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n'\eta = 0,$$

und hierin verschwindet p_n' mindestens von der Ordnung $m+1$, p_{n-1}' genau von der Ordnung $m-r+1$, $p_{n-\lambda}'$ $(\lambda \geqq 2)$ mindestens von der Ordnung $m-\lambda(r-1)$, natürlich $\lambda \leqq \left[\frac{m}{r-1}\right]$ vorausgesetzt. Bringen wir (3.) auf die Form

$$x^{n(m-r+1)}p_0'\frac{d^n\eta}{dx^n}+x^{(n-1)(m-r+1)}p_1'x^{-r}\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n'x^{-nr}\eta = 0,$$

und bilden die zugehörige algebraische Gleichung

$$H(x,z)=x^{\gamma}\{p_0'z^n+[p_1'x^{-r}-n_2(m-r+1)x^{m-r}p_0']z^{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+[p_{n-1}'x^{-(n-1)r}-(m-r+1)x^{m-(n-1)r}p_{n-2}']z+p_n'x^{-nr}\}=0,$$

so ist klar, dass die Exponenten der niedrigsten Potenzen von x, die in den Coefficienten von $x^{-\gamma}.H(x,z)$ auftreten, folgende sind (wenn wir mit ε_λ eine positive Zahl, die auch Null sein kann, bezeichnen):

$$z^0) \quad m+1-nr+\varepsilon_0,$$
$$z^1) \quad m-r+1-(n-1)r = m+1-nr,$$
$$z^\lambda\ (\lambda \geqq 2)) \quad m-\lambda(r-1)-(n-\lambda)r+\varepsilon_\lambda = m-nr+\lambda+\varepsilon_\lambda$$

(letztere Bestimmung kann man offenbar auch für $\lambda > \left[\frac{m}{r-1}\right]$ gelten lassen).

Hiernach ist $\gamma = nr-m-1$ zu wählen; in $H(x,z)$ werden dann die Exponenten der niedrigsten Potenzen von x in den Coefficienten von

$$z^0) \quad \varepsilon_0 \geqq 0,$$
$$z^1) \quad 0,$$
$$z^\lambda\ (\lambda \geqq 2)) \quad \lambda-1+\varepsilon_\lambda > 0.$$

Die Gleichung $H(0,z)=0$ wird also eine Gleichung ersten Grades in z, worin der Coefficient von z nicht gleich Null ist; sie liefert also nur *eine einfache endliche* Wurzel, und damit ist wiederum der in Rede stehende Satz bewiesen. Ist also irgend eine der Grössen $v_0, \ldots v_{m-1}$ eine einfache Wurzel der zu ihrer Bestimmung dienenden Gleichung (woraus dann folgt, dass allen darauf folgenden Grössen v_i dieselbe Eigenschaft zukommt), so ist der zu dem betreffenden determinirenden Factor gehörige Exponent A eindeutig und endlich bestimmt, und es kann dann also der determinirende Factor mitsammt dem Exponenten, wie oben gezeigt wurde, durch Reihenentwicke-

lung der den Gleichungen $F(x, v) = 0$, $F'(x, v') = 0$, ... genügenden algebraischen Functionen bestimmt werden.

Die Gleichung (11.), S. 21, gilt natürlich allgemein, auch wenn v_ϱ keine einfache Wurzel der betreffenden Ableitungsgleichung ist; immer wird also die Gleichung $G(x, z) = 0$ einen (freilich i. A. nicht regulären) Functionszweig z liefern, dessen Entwickelung in der Umgebung von $x = 0$ mit v_ϱ beginnt. Daraus ergiebt sich mit Hülfe gewisser einfacher Betrachtungen aus der Theorie der algebraischen Functionen (s. *Hamburger*, *Schlömilchs* Zeitschr., Bd. 16, S. 473, 475, 476) ohne Schwierigkeit, dass im Allgemeinen die Zahlen μ_0, μ_1, ..., welche die Grade der Vielfachheit für die Wurzeln v_0, v_1, ... angeben, eine abnehmende Reihe bilden; es wird daher in der Regel nicht der Fall eintreten, dass auch v_{m-1} noch eine mehrfache Wurzel der betreffenden Ableitungsgleichung ist.

Wenn aber dies doch der Fall ist, so kann der Exponent A, falls überhaupt für denselben sich endliche Werthe ergeben, nicht auf die oben angegebene Weise durch Reihenentwickelung algebraischer Functionen gefunden werden; man muss dann, nachdem der ganze Ausdruck

$$G(x^{-1}) = -\frac{1}{m} v_0 x^{-m} - \cdots - v_{m-1} x^{-1}$$

berechnet ist, die gegebene Differentialgleichung $P(y) = 0$ durch die Substitution $y = e^{G(x^{-1})} . \eta$ transformiren und nun direct die Exponenten der eventuellen regulären Integrale η zu bestimmen suchen. Dieselben ergeben sich bekanntlich in der Weise, dass man, wenn

$$e^{-G(x^{-1})} . P(e^{G(x^{-1})} \eta) = P'(\eta) = 0$$

die Differentialgleichung für η ist, den Ausdruck $P'(x^r) . x^{-r}$ nach Potenzen von x entwickelt und den Coefficienten $F(r)$ des niedrigsten Gliedes dieser Entwickelung, welcher als determinirende Function bezeichnet wird, gleich Null setzt; die Wurzeln dieser Gleichung $F(r) = 0$ liefern die möglichen Werthe der Exponenten A. Der Grad der Gleichung ist $n-l$, wenn l der „charakteristische Index" der Differentialgleichung $P'(\eta) = 0$ (für den singulären Punkt $x = 0$) ist (vergl. oben S. 5).

Aus unseren obigen Erörterungen folgt, dass, falls irgend einer der Coefficienten A_m, ... A_1 des determinirenden Factors $e^{G(x^{-1})}$ eine einfache Wurzel der betreffenden Ableitungsgleichung ist, der Grad der determinirenden Function für die Differentialgleichung $P'(\eta) = 0$ stets 1 ist. Wenn aber jeder Coefficient, auch der letzte A_1, eine mehrfache Wurzel der be-

treffenden Gleichung ist, so ist man nicht im Stande, den Grad der determinirenden Function allgemein zu fixiren; man kann jedoch folgenden Satz beweisen:

Wenn $A_1(=-v_{m-1})$ eine μ_{m-1}-fache Wurzel der diese Grösse bestimmenden Gleichung ist, so kann der Grad der determinirenden Function der Differentialgleichung $P'(\eta)=0$ nicht grösser als μ_{m-1} sein.

Dieser Satz ist nur ein specieller Fall des folgenden: Ist einer der Coefficienten $A_{m-s}\left(=-\frac{1}{m-s}v_s\right)$ eine μ_s-fache Wurzel der betreffenden Gleichung, so substituire man in die gegebene Differentialgleichung

$$y = e^{A_m x^{-m}+\cdots+A_{m-s}x^{-(m-s)}}.\eta,$$

alsdann kann der Grad der determinirenden Function für die Differentialgleichung in η nicht grösser als μ_s sein. (Speciell vgl. *Thomé*, Journ. für Math. Bd. 83, S. 120 f.). Auf den Beweis dieser Sätze gehen wir hier nicht ein. —

Hinsichtlich der Bestimmung des Exponenten A sei noch darauf hingewiesen, dass, falls sämmtliche Coefficienten $A_m, \ldots A_1$ mehrfache Wurzeln der betreffenden algebraischen Gleichungen sind, im Allgemeinen ausser den Bedingungen der No. II noch besondere Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Grad der determinirenden Function für die Differentialgleichung $P'(\eta)=0$ grösser als Null werde, also sich für den Exponenten A endliche Werthe ergeben, wie auch Herr *Thomé* (Journ. für Math. Bd. 76, S. 299) bemerkt hat.

Die Bestimmung der ganzen rationalen Function $g(x)$ in dem Normalintegral $e^{G(x^{-1})}.x^A.g(x)$ gestaltet sich wieder wie früher (S. 9 f.), wir gehen daher hier nicht noch einmal darauf ein. —

Wenn der Grad m des determinirenden Factors gleich Null angenommen wird, so geht das Normalintegral in ein reguläres $x^A.g(x)$ über. Wir wollen diesen einfachen Fall hier nicht besonders erörtern, da die Bedingungen für das Eintreten desselben leicht aufzustellen sind; wir wollen vielmehr nur beiläufig auf eine Formel aufmerksam machen, welche sich durch Anwendung der Gleichung (6.), No. I, auf ein solches reguläres Integral η ergiebt. Die logarithmische Ableitung wird hier

$$z = Ax^{-1}+\mathfrak{P}_0(x),$$
$$z_l = (-1)^l.Ax^{-(l+1)}+\mathfrak{P}_l(x),$$

also nach der angegebenen Gleichung

$$\frac{x^i}{\eta}\cdot\frac{d^i\eta}{dx^i} = \sum_{\varkappa=1}^{i}(-1)^{i-\varkappa}A^\varkappa\Sigma\frac{i!}{m_1!m_2!\ldots(l_1+1)^{m_1}.(l_2+1)^{m_2}\ldots}+x^i.\mathfrak{P}_i(x).$$
$$(\Sigma m_\alpha=\varkappa,\ \Sigma l_\alpha m_\alpha=i-\varkappa).$$

Andererseits ist aber doch

$$\frac{x^i}{\eta}\cdot\frac{d^i\eta}{dx^i} = A(A-1)\ldots(A-i+1)+x^i.\mathfrak{P}_i(x);$$

es muss also (wenn $l_\alpha-1$ für l_α geschrieben wird)

$$A(A-1)\ldots(A-i+1)=\sum_{\varkappa=1}^{i}(-1)^{i-\varkappa}A^\varkappa\Sigma\frac{i!}{m_1!\ldots l_1^{m_1}\ldots}\quad(\Sigma m_\alpha=\varkappa,\ \Sigma l_\alpha m_\alpha=i)$$

sein, was auch leicht verificirt werden kann. (S. 32.) —

IV.

Als einfaches Beispiel für unsere obigen Erörterungen über die zu mehrfachen Wurzeln v_0 der Gleichung $F(0, v)=0$ gehörenden determinirenden Factoren behandeln wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1.)\qquad P(y)=\frac{d^2y}{dx^2}+q_1\frac{dy}{dx}+q_2y=0,$$

wo

$$q_1=a_{11}x^{-1}+\cdots+a_{1,\pi_1}x^{-\pi_1},\quad q_2=a_{22}x^{-2}+\cdots+a_{2,\pi_2}x^{-\pi_2}$$

ist. Um die möglichen Werthe der Zahl $m+1$ zu erhalten, hat man $\frac{\pi_1}{1}$, $\frac{\pi_2}{2}$ zu vergleichen; ist $\pi_1>\frac{\pi_2}{2}$, so ist π_1 ein möglicher Werth von $m+1$, und es kann dann ausserdem noch $\frac{\pi_2-\pi_1}{2-1}=\pi_2-\pi_1$ ein solcher Werth sein; ist aber $\frac{\pi_2}{2}\geqq\pi_1$, so kann nur $\frac{\pi_2}{2}$ (vorausgesetzt, dass dies eine ganze Zahl ist) einen möglichen Werth von $m+1$ darstellen.

Ist $\pi_2-\pi_1$ ein Werth von $m+1$, so hat man zu bilden die zugehörige algebraische Gleichung

$$F_1(x, v)=p_{01}v^2+(p_{11}-(m+1)x^m)v+p_{21}=0,$$

wo

$$p_{01}=x^{\alpha_1},\quad p_{11}=x^{\alpha_1+\pi_2-\pi_1}.q_1,\quad p_{21}=x^{\alpha_1+2(\pi_2-\pi_1)}.q_2,$$

und hier ist (da $c=1$, vgl. S. 6)

$$\alpha_1=\pi_c-c(\pi_2-\pi_1)=2\pi_1-\pi_2>0,$$

daher

$$p_{11}=x^{2\pi_1-\pi_2+\pi_2-\pi_1}.x^{-\pi_1}.g_1(x)=g_1(x)\qquad(g_1(0)\neq0),$$
$$p_{21}=x^{2\pi_1-\pi_2+2(\pi_2-\pi_1)}.x^{-\pi_2}.g_2(x)=g_2(x)\qquad(g_2(0)\neq0).$$

Man hat also v_0 als endliche einfache Wurzel der Gleichung

$$F_1(0, v_0) = g_1(0)v_0 + g_2(0) = 0.$$

Da wir hier den Fall einer Doppelwurzel erörtern wollen, so können wir uns demnach beschränken auf die Betrachtung desjenigen Falles, in welchem $m+1$ gleich der (als ganzzahlig vorausgesetzten) grössten der Zahlen π_1, $\frac{\pi_2}{2}$ ist. Da die Grösse α hier gleich Null ist, so lautet die zugehörige algebraische Gleichung

(2.) $$F(x, v) = v^2 + (p_1 - (m+1)x^m)v + p_2 = 0 \quad (p_1 = x^{m+1}.q_1,\ p_2 = x^{2(m+1)}.q_2),$$

wo p_1, p_2 nicht beide für $x = 0$ verschwinden.

Man erkennt nun leicht: Sind die Coefficienten v_0, v_1, v_2, ... der Reihe nach Doppelwurzeln der betreffenden algebraischen Gleichungen, so sind die zugehörigen Zahlen $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$, ... $\nu_i = 2i$, ...; aus den zu $F = 0$ gehörigen Ableitungsgleichungen können, wenn $p = \left[\frac{m}{2}\right]$ gesetzt wird, nur v_0, v_1, ... v_p berechnet werden; und zwar sind die Finalgleichungen für diese

$$F(0, v_0) = 0, \quad \Phi_2(v_1) = 0, \quad \Phi_4'(v_2) = 0, \quad \Phi_6''(v_3) = 0, \ \ldots \ \Phi_{2p}^{(p-1)}(v_p) = 0,$$

wofür auch

(3.) $$\frac{\partial F}{\partial v_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_4'}{\partial v_2} = 0, \ \ldots \ \frac{\partial \Phi_{2p}^{(p-1)}}{\partial v_p} = 0$$

gesetzt werden kann; dabei müssen aber die nothwendigen Bedingungen

(4.) $$F_{10} = 0, \quad \Phi_3(v_1) = 0, \quad \Phi_5'(v_2) = 0, \ \ldots \ \Phi_{2p-1}^{(p-2)}(v_{p-1}) = 0$$

erfüllt sein, wozu für $m = 2p+1$ noch die folgende kommt:

$$\Phi_{2p+1}^{(p-1)}(v_p) = 0.$$

Wir wollen die Gleichungssysteme (3.) und (4.) einer näheren Prüfung unterziehen.

Man hat offenbar für $i > 2$:

$$\Phi_i = \frac{1}{i!}(F_{i0} + iF_{i-1,1}v_1) = \frac{1}{i!}F_{i0} + \frac{1}{(i-1)!}F_{i-1,1}v_1;$$

ferner für $i > 4$:

$$\Phi_i' = \Phi_i + \frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial v_1}v_2 = \frac{1}{i!}F_{i0} + \frac{1}{(i-1)!}F_{i-1,1}v_1 + \frac{1}{(i-2)!}F_{i-2,1}v_2;$$

desgleichen für $i > 6$:

$$\Phi_i'' = \Phi_i' + \frac{\partial \Phi_{i-1}'}{\partial v_2}.v_3 = \frac{1}{i!}F_{i0} + \frac{1}{(i-1)!}\cdot F_{i-1,1}v_1 + \frac{1}{(i-2)!}F_{i-2,1}v_2 + \frac{1}{(i-3)!}F_{i-3,1}v_3,$$

u. s. f. Gesetzt, man habe bereits bewiesen, dass für $i > 2\varkappa$

$$(5.) \qquad \Phi_i^{(\varkappa-1)} = \frac{1}{i!}F_{i0} + \frac{1}{(i-1)!}F_{i-1,1}v_1 + \frac{1}{(i-2)!}F_{i-2,1}v_2 + \cdots + \frac{1}{(i-\varkappa)!}F_{i-\varkappa,1}v_\varkappa,$$

so ist für $i > 2\varkappa+2$

$$\Phi_i^{(\varkappa)} = \Phi_i^{(\varkappa-1)} + \frac{\partial \Phi_{i-1}^{(\varkappa-1)}}{\partial v_\varkappa}\cdot v_{\varkappa+1}$$

$$= \frac{1}{i!}F_{i0} + \frac{1}{(i-1)!}F_{i-1,1}v_1 + \cdots + \frac{1}{(i-\varkappa)!}F_{i-\varkappa,1}v_\varkappa + \frac{1}{(i-\varkappa-1)!}F_{i-\varkappa-1,1}v_{\varkappa+1},$$

womit der obige Ausdruck (5.) für $\Phi_i^{(\varkappa-1)}$ unter der Voraussetzung $i > 2\varkappa$ allgemein bewiesen ist.

Hiernach gestaltet sich das System der Bedingungsgleichungen (4.) folgendermassen:

$$(4^a.) \qquad \begin{cases} F_{10} = 0, \\ \frac{1}{3!}F_{30} + \frac{1}{2!}F_{21}v_1 = 0, \\ \frac{1}{5!}F_{50} + \frac{1}{4!}F_{41}v_1 + \frac{1}{3!}F_{31}v_2 = 0, \\ \frac{1}{7!}F_{70} + \frac{1}{6!}F_{61}v_1 + \frac{1}{5!}F_{51}v_2 + \frac{1}{4!}F_{41}v_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Um die Gleichungen (3.) explicite aufstellen zu können, beachte man, dass

$$\Phi_{2\varkappa}^{(\varkappa-1)} = \Phi_{2\varkappa}^{(\varkappa-2)} + \frac{\partial \Phi_{2\varkappa-1}^{(\varkappa-2)}}{\partial v_{\varkappa-1}}\cdot v_\varkappa + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \Phi_{2\varkappa-2}^{(\varkappa-2)}}{\partial v_{\varkappa-1}^2}\cdot v_\varkappa^2$$

ist, wo

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2\varkappa-2}^{(\varkappa-2)}}{\partial v_{\varkappa-1}^2} = F_{02} = 2;$$

also wird

$$\frac{\partial \Phi_{2\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\partial v_\varkappa} = \frac{\partial \Phi_{2\varkappa-1}^{(\varkappa-2)}}{\partial v_{\varkappa-1}} + 2v_\varkappa$$

oder nach (5.)

$$(6.) \qquad \frac{\partial \Phi_{2\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\partial v_\varkappa} = \frac{1}{\varkappa!}F_{\varkappa 1} + 2v_\varkappa.$$

Wir erhalten also für $\varkappa = 1, \ldots p$ die Werthe von $v_1, \ldots v_p$:

$$(3^a.) \qquad v_\varkappa = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varkappa!}F_{\varkappa 1} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varkappa!}\left[\frac{d^\varkappa p_1(x)}{dx^\varkappa}\right]_{x=0},$$

und diese Formel gilt offenbar auch für $\varkappa = 0$. Die Werthe $(3^a.)$ können natürlich auch unmittelbar vermittelst directer Auflösung der quadratischen Gleichung $F(x, v) = 0$ gefunden werden.

Hiermit sind die Gleichungssysteme (3.) und (4.) explicite gegeben. Das letztere liefert die Bedingungen dafür, dass unter den angegebenen Voraussetzungen endliche Werthe von $v_1, \ldots v_p$ existiren; erst wenn diese Gleichungen (4.) erfüllt sind, kann von den Grössen $v_1, \ldots v_p$ überhaupt die Rede sein, und sie ergeben sich dann als Lösungen des Gleichungssystems (3.).

Die Gleichungen (3^a.) zeigen übrigens, dass, wenn (wie früher)

$$u' = v_0 + v_1 x + \cdots + v_p x^p$$

gesetzt wird, die Coefficienten von x^0, x^1, $\ldots$ x^p in u' übereinstimmen mit den entsprechenden in $-\frac{1}{2}p_1$, sodass $2u' - p_1$ mindestens von der Ordnung $p+1$ für $x=0$ verschwindet; die Ordnungszahl des Nullwerdens ist gleich derjenigen von $a_{11}x^m + \cdots + a_{1,m-p}x^{p+1}$, welche durch die Bedingungen (4.) offenbar in keiner Weise bestimmt wird (vergl. die allgemeinen Erörterungen S. 17 f.).

Um nun die weiteren Coefficienten v_{p+1}, v_{p+2}, $\ldots$ v_{m-1} zu berechnen, muss man die Gleichung (1.) durch die Substitution

$$y = e^{G'(x^{-1})}.\eta, \quad G'(x^{-1}) = -\frac{1}{m}\cdot v_0 x^{-m} - \cdots - \frac{1}{m-p} v_p x^{-(m-p)}$$

transformiren. Für η ergiebt sich die Differentialgleichung

$$(7.) \qquad x^{2(m+1)}.\frac{d^2\eta}{dx^2} + x^{m+1}.(2P_1' + p_1)\cdot\frac{d\eta}{dx} + (P_2' + p_1 P_1' + p_2)\eta = 0,$$

wo

$$P_1' = x^{m+1}.e^{-G'(x^{-1})}.\frac{de^{G'(x^{-1})}}{dx} = u',$$

$$P_2' = x^{2(m+1)}.e^{-G'(x^{-1})}.\frac{d^2e^{G'(x^{-1})}}{dx^2}$$

gesetzt ist. Bezeichnen π_1', π_2' die Ordnungszahlen des Unendlichwerdens der Coefficienten in (7.) (nachdem durch den Coefficienten der höchsten Ableitung dividirt ist) für $x=0$, so ist, wie aus den obigen Erörterungen folgt, $\pi_1' \leqq m-p$, $\pi_2' \leqq m+1$. Man hat nun die Bedingungen dafür aufzustellen, dass sich für die Grade der determinirenden Factoren der Gleichung (7.) Zahlen $\leqq m-p-1$ ergeben, und sodann diese determinirenden Factoren selbst, sowie die zugehörigen Exponenten A nach der oben dargelegten Methode zu bestimmen. Jedenfalls muss man nach einer endlichen Anzahl algebraischer Operationen zu dem Ziele gelangen, alle Coefficienten von $G(x^{-1})$ und die zugehörigen Werthe des Exponenten A zu berechnen. —

Von besonderem Interesse ist der Fall, in welchem sämmtliche

Coefficienten $A_m, \ldots A_1$ des determinirenden Factors $e^{G(x^{-1})}$ endliche Doppelwurzeln der zu ihrer Bestimmung dienenden Ableitungsgleichungen sind, also nur dieser eine determinirende Factor vorhanden ist. Es lässt sich nämlich zeigen, dass alsdann die Gleichung (1.), wenn sie überhaupt ein Normalintegral besitzt, sogar deren zwei hat, sodass $e^{-G(x^{-1})}P(e^{G(x^{-1})})\eta = 0$ zwei in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Integrale besitzt, und zwar

$$x^{r_1}, \quad x^{r_2},$$

wenn die Wurzeln r_1, r_2 der Gleichung

$$r(r-1)+a_{11}r+a_{22} = 0$$

von einander verschieden sind, sonst

$$x^{r_1}, \quad x^{r_2}.\log x.$$

Man kann diesen Satz entweder durch Fortsetzung des obigen Schlussverfahrens beweisen, oder indem man allgemein die Frage behandelt, wie sich die Bestimmung des determinirenden Factors $e^{G(x^{-1})}$ einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung gestaltet, wenn alle Coefficienten in $G(x^{-1})$ endliche n-fache Wurzeln der betreffenden Ableitungsgleichungen sind. Durch Betrachtungen, die an sich nicht ohne Interesse sind, auf die wir aber hier nicht eingehen wollen, weil sie dem eigentlichen Zielpunkt dieser Untersuchungen ferner liegen, ergiebt sich dann, dass in solchem Falle allgemein (wie schon oben für $n = 2$ gefunden) $v_h = -\frac{1}{n}\frac{1}{h!}\left[\frac{d^h p_1(x)}{dx^h}\right]_{x=0}$ ist, und zugleich ergiebt sich die transformirte Differentialgleichung (für $\eta = e^{-G(x^{-1})}.y$) in einer Form, welche für $n = 2$ in

$$x^3.\frac{d^2\eta}{dx^2}+x^2.a_{11}\frac{d\eta}{dx}+(a_{22}x+c)\eta = 0$$

(c eine Constante) übergeht, woraus sich die Richtigkeit der obigen Behauptung durch einfache Schlussfolgerungen ergiebt.

V.

Wir wenden uns nun noch zu dem Falle, wo die Ausdrücke der Integrale von $P(y) = 0$ Logarithmen enthalten, also die Form $x^r.\sum_\beta \mathfrak{P}'_\beta(x^{-1}).\log^\beta x$ besitzen. Es soll als Verallgemeinerung des früheren Problems untersucht werden, unter welchen Bedingungen die beständig (ausser für $x = 0$) convergenten Potenzreihen $\mathfrak{P}'_\beta(x^{-1})$ aus Functionen von der Form $e^{G(x^{-1})}.\mathfrak{P}(x)$

linear zusammengesetzt sind. Diese Frage kann leicht auf eine weit einfachere zurückgeführt werden.

Wenn nämlich eine beliebige lineare Differentialgleichung $Q(y)=0$ (deren Coefficienten in der Umgebung einer singulären Stelle $x=a$ sich wie rationale Functionen verhalten) ein Integral besitzt, welches in der Umgebung von $x=a$ die Entwickelung

$$y = (x-a)^r . \sum_{i=1}^{p} e^{W_i} \sum_{\varkappa} \varphi_{i\varkappa} \log^{\varkappa}(x-a)$$

hat, wo $W_i = G_i([x-a]^{-1})$ ist und die $\varphi_{i\varkappa}$ in der Umgebung von $x=a$ nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ entwickelbar sind, so lässt sich zeigen, dass alsdann jedes Aggregat $(x-a)^r . e^{W_i} \sum_{\varkappa} \varphi_{i\varkappa} \log^{\varkappa}(x-a)$ für sich ein Integral der Differentialgleichung sein muss.

Zunächst überzeugt man sich leicht, dass die Substitution des obigen Werthes für y in die linke Seite der Differentialgleichung einen Ausdruck von der Form $(x-a)^r . \sum_{i=1}^{p} e^{W_i} \sum_{\varkappa} \Phi_{i\varkappa} \log^{\varkappa}(x-a)$ liefert, wo die $\Phi_{i\varkappa}$ sich in der Umgebung von $x=a$ wie rationale Functionen verhalten. Hieraus folgt nach einem von Herrn ***Fuchs*** bewiesenen Satze (Journ. für Math. Bd. 68, S. 356) für jedes $\varkappa$

$$(1.) \qquad \sum_{i=1}^{p} e^{W_i} \Phi_{i\varkappa} = 0.$$

Man kann nun leicht beweisen, dass eine solche Gleichung, wenn man die W_i als unter einander verschieden annimmt, nur dann bestehen kann, wenn die Functionen Φ_i (wir lassen den zweiten Index fort) identisch verschwinden.

Um dies zu zeigen, differentiire man Gleichung (1.), wodurch sich ergiebt

$$(2.) \qquad \sum_{i=1}^{p} e^{W_i} (W_i' \Phi_i + \Phi_i') = 0.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und der ersten etwa die letzte Grösse e^{W_p}, so erhält man eine der ersten analog gebaute Gleichung, die aber ein Glied weniger enthält:

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{p-1} e^{W_i} . \Psi_i = 0,$$

und hierbei ist

$$\Psi_i = \begin{vmatrix} \Phi_i & \Phi_p \\ W_i' \Phi_i + \Phi_i' & W_p' \Phi_p + \Phi_p' \end{vmatrix},$$

sodass auch die Ψ_i in der Umgebung von $x = a$ sich wie rationale Functionen verhalten. Ein solcher Ausdruck Ψ_i kann, wie man leicht sieht, nur dann identisch Null sein, wenn entweder eine der beiden Functionen Φ_i oder Φ_p identisch verschwindet, oder $W_i \equiv W_p$ ist.

Soll also (1.) gelten, so muss auch eine Gleichung (3.) derselben Art, aber mit einem Gliede weniger, bestehen. So kann man die Anzahl der Glieder immer mehr verringern, und da für $p = 1$ eine solche Gleichung $e^{W_1}.X_1 = 0$ die Folgerung $X_1 \equiv 0$ nach sich zieht, so erkennt man, rückwärts schliessend, dass auch (1.), falls die W_i alle verschieden sind, nur dann bestehen kann, wenn sämmtliche Φ_i identisch verschwinden.

Hieraus folgt aber sofort die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung, dass nämlich jedes der Aggregate $(x-a)^r.e^{W_i}\sum_\varkappa \varphi_{i\varkappa}\log^\varkappa(x-a)$ für sich ein Integral der Differentialgleichung sein müsse.

Damit ist das oben aufgestellte Problem zurückgeführt auf die Untersuchung logarithmischer Normalintegrale von der Form

$$(4.) \qquad x^A.e^{G(x^{-1})}.\sum_{\alpha=0}^{p}\mathfrak{P}_\alpha(x)\log^\alpha x.$$

Vergleicht man diese Darstellung mit der anderen

$$x^r.\Sigma\mathfrak{P}'_\beta(x^{-1}).\log^\beta x,$$

welche sich auf die Forderung stützt, dass sich das Integral in der Umgebung von $x = \infty$ regulär verhalten soll, so erkennt man sofort, dass auch hier die beständig convergenten Potenzreihen $\mathfrak{P}_\alpha(x)$ sich auf ganze rationale Functionen $g_\alpha(x)$ reduciren müssen, falls überhaupt Integrale von der Form (4.) möglich sein sollen.

Man kann dies auch in ähnlicher Weise, wie dies Herr *Hamburger* (Journ. für Math. Bd. 103, S. 266 f.) gethan hat, aus der Recursionsformel für die Coefficienten einer solchen Potenzreihe $\mathfrak{P}_\alpha(x)$ erschliessen. Man erhält nämlich für die Coefficienten der Potenzen des Logarithmus im Integral (4.) lineare Differentialgleichungen von folgender Form (wenn $P'(\eta) = e^{-G(x^{-1})}.P(e^{G(x^{-1})}\eta)$ ist, wo $P(y) = 0$ die ursprüngliche Differentialgleichung bedeutet):

$$(5^a.) \qquad P'(\psi_p(x)) = 0,$$

$$(5^b.) \qquad P'(\psi_r(x)) = \Phi_{p-r} \qquad (r = p-1, p-2, \ldots 0),$$

und hier ist Φ_{p-r} eine homogene lineare Function von folgenden Grössen: ψ_{r+1} und den Ableitungen dieser Function bis zur $(n-1)$ten Ordnung, ψ_{r+2}

und den Ableitungen davon bis zur $(n-2)$ten Ordnung, u. s. w., ψ_p und den Ableitungen bis $(n-(p-r))$ten Ordnung. Die Coefficienten dieser Ausdrücke in Φ_{p-r} werden ganze rationale Functionen von x.

Man hat nämlich in

$$P'(\eta) = \sum_{\alpha} P'(\psi_\alpha \log^\alpha x)$$

den Coefficienten jeder einzelnen Potenz des Logarithmus gleich Null zu setzen. Glieder mit $\log^r x$ werden offenbar nur aus denjenigen Gliedern $\psi_\alpha \log^\alpha x$ erhalten, in denen $\alpha \geqq r$ ist. Man hat

$$P'(\psi_{r+h}\log^{r+h}x) = \sum_{\lambda=0}^{n} x^{\lambda(m+1)} p'_{n-\lambda} \cdot \frac{d^\lambda[\psi_{r+h}\log^{r+h}x]}{dx^\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} x^{\lambda(m+1)} p'_{n-\lambda} \sum_{i=0}^{\lambda} \lambda_i \frac{d^i(\log^{r+h}x)}{dx^i} \cdot \frac{d^{\lambda-i}\psi_{r+h}}{dx^{\lambda-i}}.$$

Nun ist aber, wenn

$$C_{iz} = \Sigma \frac{(-1)^{i-z}.i!}{m_1!\, m_2! \ldots l_1^{m_1} l_2^{m_2} \ldots}$$

$$(\Sigma m_\alpha = z,\ \Sigma l_\alpha m_\alpha = i)$$

gesetzt wird (sodass nach S. 25

$$A(A-1)\ldots(A-i+1) = \sum_{z=1}^{i} C_{iz} A^z$$

ist; $C_{iz} = 0$ für $z > i$; $C_{i0} = 0$ ausser für $i = 0$):

$$\frac{d^i \log^{r+h} x}{dx^i} = x^{-i} \sum_{z=0}^{r+h} z!(r+h)_z . C_{iz} . \log^{r+h-z} x;$$

es wird also der gesuchte Coefficient von $\log^r x$ in $P'(\psi_{r+h}\log^{r+h}x)$:

$$h!(r+h)_h \cdot \sum_{\lambda=h}^{n} p'_{n-\lambda} x^{\lambda m} \cdot \sum_{i=h}^{\lambda} \lambda_i C_{ih} \frac{d^{\lambda-i}\psi_{r+h}}{dx^{\lambda-i}} \cdot x^{\lambda-i}.$$

Für $h = 0$ wird dieser Ausdruck nichts anderes als $P'(\psi_r)$, wie zu erwarten war; man erhält also Φ_{p-r} als negative Summe der obigen Ausdrücke für $h = 1, 2, \ldots p-r$, woraus die Richtigkeit des oben Gesagten erhellt.

So erkennt man zunächst, dass die Recursionsformel für die Coefficienten $B_z^{(p)}$ von $\mathfrak{P}_p$ folgende Form haben wird (s. *Hamburger*, a. a. O. S. 266)

$$f_z . B_z^{(p)} + f_{z+1} . B_{z+1}^{(p)} + \cdots + f_{z+m(n-1)} . B_{z+m(n-1)}^{(p)} = 0,$$

wo

$$f_z = (A+z)(A+z-1)\ldots(A+z-n+1) + a_{11}(A+z)\ldots(A+z-n+2) + \cdots$$

$$\cdots + a_{n-1,n-1}(A+z) + a_{nn},$$

während die übrigen Functionen f in Beziehung auf z von niedrigerem als

dem $\varkappa$ten Grade sind. Hieraus folgt sofort, wie in dem von Herrn *Hamburger* behandelten Falle, dass $\mathfrak{P}_p$ nur eine ganze rationale Function g_p sein kann. Stellt man dann die Gleichung (5^b.) zuvörderst für $\alpha = p-1$ auf:

$$P'(x^A.\mathfrak{P}_{p-1}) = \Phi_1,$$

so ist aus den obigen Formeln zu ersehen, dass auf der rechten Seite, nachdem die Gleichung durch x^{A+m} dividirt ist, eine ganze rationale Function von x steht; die Recursionsformel wird also hier folgende Form haben:

$$f_\varkappa B_\varkappa^{(p-1)} + \cdots + f_{\varkappa+m(n-1)} B_{\varkappa+m(n-1)}^{(p-1)} = C_\varkappa^{(1)},$$

wo $C_\varkappa^{(1)}$ von einem gewissen $\varkappa$ ab gleich Null ist; hieraus ergiebt sich, dass auch $\mathfrak{P}_{p-1}$ nur eine ganze rationale Function sein darf, und durch Fortsetzung dieser Schlussweise erkennt man die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung für $\mathfrak{P}_{p-2}, \ldots \mathfrak{P}_0$. —

Da nach einem Satze des Herrn *Fuchs* (Journ. für Math. Bd. 68, S. 356) der Coefficient der höchsten Potenz des Logarithmus in einem Ausdruck (4.) selbst ein Integral der Differentialgleichung ist (vergl. (5^a.)), so sieht man, dass die Bestimmung des determinirenden Factors $e^{G(x^{-1})}$ (welcher letztere übrigens nach dem Obigen einer ganzen Integralgruppe gemeinsam sein wird) in genau derselben Weise vorzunehmen ist wie früher. Ist derselbe dann ermittelt, so muss man die Differentialgleichung

$$P'(\eta) = e^{-G(x^{-1})}.P(e^{G(x^{-1})}\eta) = 0$$

aufstellen und untersuchen, ob sie in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Integrale besitzt. Die Exponenten derselben müssen Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinirenden Gleichung sein. Hieraus folgt sofort, dass ein solches mit Logarithmen behaftetes Normalintegral nur zu einem determinirenden Factor $e^{G(x^{-1})}$ gehören kann, dessen sämmtliche Coefficienten $A_m, \ldots A_1$ vielfache Wurzeln der zu ihrer Bestimmung dienenden algebraischen Gleichungen sind; denn nur wenn dies der Fall ist, kann der Grad der zu $x = 0$ gehörigen determinirenden Gleichung grösser als 1 sein. Aber auch wenn diese Gleichung von höherem Grade ist, muss doch natürlich, damit logarithmische Normalintegrale vorhanden seien, die weitere Bedingung erfüllt sein, dass mehrere Wurzeln der Gleichung um ganze Zahlen (oder Null) von einander verschieden sind, sodass die Möglichkeit der Existenz solcher logarithmischen Normalintegrale sehr eingeschränkt ist.

Die allgemeine Aufstellung der weiteren Bedingungen für die Existenz

solcher Integrale stösst auf die Schwierigkeit, dass man nicht im Stande ist, die Ordnungszahlen des Verschwindens der Functionen p_i' für $x = 0$ anzugeben. Auch kann die Aufstellung dieser Bedingungen kein wesentliches theoretisches Interesse mehr darbieten, da es ja nur darauf ankommt, festzustellen, wann eine Differentialgleichung von der Form $P'(\eta) = x^A.g(x)$ ein Integral der Form $x^A.g_1(x)$ besitzt.

Für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergiebt sich die Lösung des Problems in sehr einfacher Weise aus Früherem. Wenn in diesem Falle überhaupt logarithmische Normalintegrale vorhanden sein sollen, so muss der Grad der determinirenden Function von $P'(\eta) = 0$ gleich zwei sein; dies kann nur dann eintreten, wenn sämmtliche Coefficienten $A_m, \ldots A_1$ der Function $G(x^{-1})$ Doppelwurzeln der betreffenden algebraischen Gleichungen sind. In diesem Falle aber können nach No. IV eventuell vorhandene Normalintegrale der Gleichung $P(y) = 0$ nur die Form

$$x^{r_1}.e^{G(x^{-1})}, \quad x^{r_2}.e^{G(x^{-1})}$$

oder

$$x^{r_1}.e^{G(x^{-1})}, \quad x^{r_1}.e^{G(x^{-1})}.\log x$$

haben; die einzig mögliche Form für ein logarithmisches Normalintegral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der hier betrachteten Klasse ist also

$$x^{r}.e^{G(x^{-1})}(c_1 + c_2 \log x),$$

wo c_1, c_2 Constanten bedeuten; die Bedingungen für die Existenz eines solchen ergeben sich leicht aus den früheren speciellen Erörterungen über Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Ueber die *Jacobi*schen Functionen dreier Variabeln.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

In der Abhandlung *Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen* entwickelt *Riemann* (§ 4, (5.)) die Relation

$$\frac{\vartheta(u_\nu-\alpha_\nu+r_\nu)\vartheta(\alpha_\nu-u_\nu+r_\nu)}{\vartheta(u_\nu-\alpha_\nu+t_\nu)\vartheta(\alpha_\nu-u_\nu+t_\nu)} = \frac{\Sigma D_\mu\vartheta(r_\nu)q_\mu(s,z)}{\Sigma D_\mu\vartheta(t_\nu)q_\mu(s,z)}\cdot\frac{\Sigma D_\mu\vartheta(r_\nu)q_\mu(\sigma,\zeta)}{\Sigma D_\mu\vartheta(t_\nu)q_\mu(\sigma,\zeta)},$$

wo sich μ von 1 bis p bewegt, und $D_\mu\vartheta(v_\nu)$ die (von *Riemann* mit $\vartheta'_\mu(v_\nu)$ bezeichnete) Ableitung von $\vartheta(v_\nu)$ nach v_μ ist. Die Grössen $v_\nu = r_\nu$ und $v_\nu = t_\nu$ sind irgend zwei Werthsysteme, für welche $\vartheta(v_\nu) = 0$ ist. Man kann dafür folglich zwei halbe Perioden mit ungerader Charakteristik wählen. Statt $\vartheta(v_\nu)$ schreibe ich noch einfacher $\vartheta(v)$, indem ich symbolisch mit v das System der p Variabeln $v_1, v_2, \ldots v_p$ bezeichne. Die ungeraden Thetafunctionen, welche durch Vermehrung von v um die halben Perioden r und t und Hinzufügung eines passenden Exponentialfactors aus $\vartheta(v)$ hervorgehen, seien $\vartheta_\alpha(v)$ und $\vartheta_\beta(v)$, die beiden willkürlichen Punkte der *Riemann*schen Fläche, welche oben mit σ, ζ und s, z bezeichnet sind, will ich kurz x und y nennen, die Differentiale erster Gattung seien $dw^{(1)}, \ldots dw^{(p)}$, so dass $u_\nu - \alpha_\nu = \int_x^y dw^{(\nu)}$ ist. In der Entwicklung von $\vartheta_\alpha(v)$ nach Potenzen von $v_1, \ldots v_p$ seien die Glieder der ersten Dimension $\sum_\nu a_\alpha^{(\nu)} v_\nu$. Für den Punkt x sei

$$dw^{(1)} : \ldots : dw^{(p)} = x^{(1)} : \ldots : x^{(p)},$$

für den Punkt y sei

$$dw^{(1)} : \ldots : dw^{(p)} = y^{(1)} : \ldots : y^{(p)}.$$

Unter Anwendung dieser abgeänderten Bezeichnung lautet dann die angegebene Formel für den betrachteten Fall (vgl. *Riemann*s Vorlesung *Zur Theorie der Abelschen Functionen für den Fall* $p = 3$, Werke S. 457; *Weber*,

Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3., § 13)

$$(1.)\qquad \left(\frac{\vartheta_\alpha\left(\int_x^y dw\right)}{\vartheta_\beta\left(\int_x^y dw\right)}\right)^2 = \frac{(\sum_\mu a_\alpha^{(\mu)}x^{(\mu)})(\sum_\mu a_\alpha^{(\mu)}y^{(\mu)})}{(\sum_\mu a_\beta^{(\mu)}x^{(\mu)})(\sum_\mu a_\beta^{(\mu)}y^{(\mu)})}.$$

Folglich ist der durch die Gleichung

$$(2.)\qquad Z\left(\vartheta_\alpha\left(\int_x^y dw\right)\right)^2 = \sum_{\lambda,\mu} a_\alpha^{(\lambda)}a_\alpha^{(\mu)}x^{(\lambda)}y^{(\mu)}$$

definirte Factor Z von α unabhängig, hat also für jede ungerade Thetafunction $\vartheta_\alpha(v)$ denselben Werth. In dem Falle $p=3$ seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_7$ irgend 7 der 28 ungeraden Functionen. Setzt man für α der Reihe nach die Indices 1, 2, ... 7, so erhält man sieben Gleichungen, aus denen man die sechs Ausdrücke $x^{(\lambda)}y^{(\mu)}+x^{(\mu)}y^{(\lambda)}$ und die Grösse Z eliminiren kann. Man findet so

$$(3.)\qquad \left|\left(\vartheta_\alpha\left(\int_x^y dw\right)\right)^2,\ a_\alpha'^2,\ a_\alpha''^2,\ a_\alpha'''^2,\ a_\alpha''a_\alpha''',\ a_\alpha'''a_\alpha',\ a_\alpha'a_\alpha''\right| = 0.$$

Die linke Seite ist die Determinante siebenten Grades, deren sieben Zeilen man aus der aufgeschriebenen erhält, indem man $\alpha = 1, 2, \ldots 7$ setzt. Die sieben ungeraden Charakteristiken kann man auf mannigfache Art so wählen, dass die sieben Thetafunctionen zweiten Grades $(\vartheta_\alpha(v))^2$ linear unabhängig sind. (*Weber*, l. c. § 5). Nimmt man dazu das Quadrat irgend einer geraden Thetafunction $\vartheta_0(v)$, so hat man acht gleichändrige Functionen, die linear unabhängig sind. Da es nicht mehr als acht solche Functionen giebt, so lässt sich jede andere mit ihnen gleichändrige Function auf die Form

$$\varphi(v) = \sum_\alpha{}_0^7 g_\alpha(\vartheta_\alpha(v))^2$$

bringen, wo $g_0, g_1, \ldots g_7$ Constanten sind. Ueber diese kann man so verfügen, dass die Entwicklung von $\varphi(v)$ nach Potenzen von v', v'', v''' mit den Gliedern der vierten Dimension anfängt. Damit dies nämlich der Fall sei, muss $g_0 = 0$ sein und $\sum_\alpha{}_1^7 g_\alpha(a_\alpha'v'+a_\alpha''v''+a_\alpha'''v''')^2$ identisch verschwinden. Ich werde nachweisen, dass die in dieser Forderung enthaltenen sechs homogenen linearen Gleichungen zwischen den Grössen $g_1, \ldots g_7$ unter einander unabhängig sind. Die Function $\varphi(v)$ ist folglich durch die angegebene Bedingung bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmt, und zwar ist

$$\varphi(v) = |(\vartheta_\alpha(v))^2,\ a_\alpha'^2,\ a_\alpha''^2,\ a_\alpha'''^2,\ a_\alpha''a_\alpha''',\ a_\alpha'''a_\alpha',\ a_\alpha'a_\alpha''|.$$

Nach Gleichung (3.) ist daher

$$(4.) \qquad \varphi\Big(\int_x^y dw\Big) = 0,$$

oder die Function $\varphi(v)$ verschwindet identisch, wenn man

$$(5.) \qquad v^{(\nu)} = \int_x^y dw^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

setzt, wo x und y zwei willkürliche Punkte der *Riemann*schen Fläche sind.

Die Glieder der vierten Dimension, mit denen die Entwicklung von $\varphi(v)$ anfängt, und deren Coefficienten, wie ich zeigen werde, nicht sämmtlich verschwinden, bilden eine ganze Function vierten Grades $F(v', v'', v''')$ oder kurz $F(v)$. Lässt man nun in der identischen Gleichung (4.) den Punkt y unendlich nahe an x heranrücken, so erhält man $F(dw) = 0$, oder weil $dw' : dw'' : dw''' = x' : x'' : x'''$ ist,

$$(6.) \qquad F(x', x'', x''') = 0.$$

Riemann hat (l. c. S. 459) bewiesen, dass zwischen x', x'', x''' eine homogene Gleichung des vierten Grades besteht. Die oben ausgeführte directe Herstellung derselben zeigt, wie man die Coefficienten dieser Gleichung aus den Coefficienten der Thetareihen zusammensetzen kann. Da durch die Coefficienten von $F(v)$ die Perioden der Thetafunctionen bestimmt sind, so kann man eine Function $\varphi(v', v'', v''')$ bilden, in deren Entwicklung die Glieder der vierten Dimension einer willkürlich gegebenen Function vierten Grades $F(v)$ gleich sind, und wenn k eine Constante und $q(v)$ eine homogene quadratische Function ist, so ist

$$k^{-4} e^{q(v)} \varphi(kv', kv'', kv''')$$

die allgemeinste Function, die den nämlichen Bedingungen wie $\varphi(v)$ genügt. Ist

$$nG(v) = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial v^{(\mu)} \partial v^{(\nu)}} \right|$$

die mit einem beliebig gewählten Factor n versehene *Hesse*sche Covariante von $F(v)$, so kann man zeigen, dass die Glieder der sechsten Dimension in der Entwicklung von $\varphi(v)$ die Form $KG(v) + Q(v)F(v)$ haben müssen, wo die Constante K und die quadratische Function $Q(v)$ unbestimmt sind (§ 11). Wählt man k und $q(v)$ so, dass diese Glieder gleich $G(v)$ werden, so ist nunmehr die Function $\varphi(v)$ vollständig bestimmt, und folglich muss das Aggregat der Glieder irgend einer Dimension in der Entwicklung von $\varphi(v)$ eine rationale Covariante der Function vierten Grades $F(v)$ sein.

Ist $p > 3$, so ist eine *Riemann*sche Thetafunction zweiten Grades nicht dadurch bestimmt, dass sie mit $(\vartheta(v))^2$ gleichändrig ist, und dass in ihrer Entwicklung die Glieder nullter und zweiter Dimension fehlen, sondern es giebt dann $2^p - 1 - \frac{p(p+1)}{2}$ linear unabhängige Functionen dieser Art. Dieselben müssen aber sämmtlich identisch verschwinden, wenn man für die Variabeln die Integrale (5.) substituirt. Es giebt aber, falls $p > 3$ ist, auch Thetafunctionen zweiten Grades mit nicht verschwindender Gruppencharakteristik, die unter jener Annahme verschwinden. Z. B. entspricht, falls $p = 4$ ist, jeder der 255 nicht verschwindenden Gruppencharakteristiken eine bis auf einen constanten Factor völlig bestimmte gerade Thetafunction zweiten Grades, die für die Werthe (5.) Null ist. In der Entwicklung einer solchen Function ist das constante Glied Null, und sind die Glieder der zweiten Dimension von der Charakteristik unabhängig.

Herr *Weierstrass* hat (Berl. Monatsber. 1869; S. 855) darauf aufmerksam gemacht, dass man das Additionstheorem benutzen kann, um aus particulären Lösungen der zwischen den Thetafunctionen bestehenden Relationen die allgemeine Lösung abzuleiten. Unter einer particulären Lösung wird eine solche verstanden, welche man erhält, indem man die Veränderlichkeit der Variabeln $v', \ldots v^{(p)}$ dadurch beschränkt, dass man zu den identischen Relationen zwischen den Thetafunctionen noch einige willkürlich angenommene Gleichungen hinzunimmt, unter denen natürlich höchstens $p-1$ unabhängige sein dürfen. Um aber zu einer brauchbaren particulären Lösung zu gelangen, ist es von der grössten Wichtigkeit, jene willkürlich anzunehmenden Gleichungen in geschickter Weise zu wählen. Nun weist die *Riemann*sche Formel (1.) darauf hin, dass es sich empfiehlt, die p Variabeln $v', \ldots v^{(p)}$ mittelst der Gleichungen (5.) durch zwei unabhängige Variabeln auszudrücken, also für $p = 3$ die Veränderlichkeit von v', v'', v''' durch die Gleichung $\varphi(v) = 0$ einzuschränken.

Herr *Schottky* hat in seiner Arbeit *Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln*, um zu der Darstellung (5.) zu gelangen, eine Relation $G = 0$ aufgestellt (S. 46, Formel (9.)), deren linke Seite eine ungerade Thetafunction neunten Grades ist. Denn sie ist eine Determinante dritten Grades, deren Elemente $L_{\varkappa\lambda}$ ungerade Thetafunctionen dritten Grades sind. Daher ist zu vermuthen, dass G durch die oben definirte Function φ theilbar ist, und in der That werde ich (§ 11, (8.)) nachweisen, dass unter

Anwendung der Bezeichnungen des Herrn *Schottky*

$$G = \varphi\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_7$$

ist. Die Function φ, deren Untersuchung den obigen Andeutungen nach den Mittelpunkt der Theorie der Thetafunctionen von drei Variabeln bildet, tritt zwar in der Darstellung des Herrn *Schottky* nirgends explicite auf. Aber sie kommt nicht nur selbst als Factor verborgen in der Determinante G vor, sondern ihre Eigenschaften werden auch an mehreren andern Stellen seiner Arbeit in versteckter Form entwickelt und benutzt. Für das tiefere Verständniss dieser so überaus schwierigen und wichtigen Arbeit ist daher die genauere Untersuchung dieser Function, die den Hauptinhalt der folgenden Entwicklungen bildet, von besonderer Bedeutung. Um nur ein Beispiel anzuführen, so scheint das Gesetz. nach welchem Herr *Schottky* die constanten Factoren der ungeraden Sigmafunctionen wählt (S. 34, Formel (79.)), ziemlich verwickelt. Im Wesentlichen kommt es aber darauf hinaus, dass der constante Factor h_α in der Gleichung $\sigma_\alpha(\boldsymbol{v}) = \sqrt{h_\alpha}\vartheta_\alpha(\boldsymbol{v})$ der reducirte Werth von $\varphi(\boldsymbol{v})$ für die der Charakteristik α entsprechende halbe Periode ist. Aus diesem Gesetze ergiebt sich, dass jener Uebergang von den Thetafunctionen zu den Sigmafunctionen auf 36 verschiedene Arten ausgeführt werden kann. Den Zusammenhang zwischen irgend zwei derselben habe ich in § 10 entwickelt.

Der Untersuchung der Thetafunctionen von drei Variabeln schicke ich als Einleitung (§ 1) einen kurzen Abriss der allgemeinen Theorie der *Jacobi*schen Functionen erster Ordnung voraus.

In den §§ 3, 4, 5 und 14 entwickle ich die wichtigsten Darstellungen und Eigenschaften der Function $\varphi(\boldsymbol{v})$. Die §§ 6, 7 und 8 enthalten die analytischen Grundlagen für die Theorie der Wurzelfunctionen zweiter Ordnung, die §§ 11, 12 und 13 die für die Theorie der Wurzelfunctionen dritter Ordnung.

§ 1.

Die geraden und ungeraden *Jacobi*schen Functionen erster Ordnung.

Die allgemeinen *Jacobi*schen Functionen von ϱ Variabeln habe ich in meiner Abhandlung *Ueber die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Functionen* (dieses Journal Bd. 97) dadurch definirt, dass sie im Endlichen überall holomorph sind und 2ϱ Gleichungen von der Form:

(1.) $$\vartheta(u_1+a_{1\alpha}, \ldots u_\varrho+a_{\varrho\alpha}) = \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)E[c_\alpha+\sum_\lambda a'_{\lambda\alpha}(u_\alpha+\tfrac{1}{2}a_{\lambda\alpha})]$$

befriedigen, wo $E[z]$ die Function $e^{2\pi iz}$ bezeichnet. Die Grössen

$$a_{1\alpha}, \quad \ldots \quad a_{\varrho\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2\varrho)$$

sind 2ϱ arithmetisch unabhängige Perioden, aus denen sich nicht unendlich kleine Perioden zusammensetzen lassen. Diese Bedingungen sind nur und stets dann mit einander verträglich, wenn die Ausdrücke

$$\sum_\lambda^\varrho{}_1(a_{\lambda\alpha}a'_{\lambda\beta}-a_{\lambda\beta}a'_{\lambda\alpha}) = k_{\alpha\beta}$$

ganze Zahlen sind, und wenn für alle Werthe der 2ϱ Variabeln x_α, die den ϱ linearen Gleichungen

$$\sum_\alpha^{2\varrho}{}_1 a_{\lambda\alpha}x_\alpha = 0$$

genügen, die Form

$$i\sum_{\alpha,\beta}^{2\varrho}{}_1 k_{\alpha\beta}x_\alpha^{(0)}x_\beta$$

positiv ist, und nur verschwindet, falls jene Variabeln sämmtlich Null sind. Das Zeichen $x^{(0)}$ bedeutet hier die zu x conjugirt complexe Grösse. Sind $r_1, \ldots r_{2\varrho}$ ganze Zahlen, und setzt man

$$a_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}r_\alpha, \quad a'_\lambda = \sum_\alpha a'_{\lambda\alpha}r_\alpha,$$

so ist (vgl. die Anmerkung zu Formel (13.))

(2.) $$\vartheta(u_1+a_1, \ldots u_\varrho+a_\varrho) = \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)E[c+\sum_\lambda a'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)],$$

wo

(3.) $$c = \sum_\alpha c_\alpha r_\alpha+\tfrac{1}{2}\mathfrak{S}_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}r_\alpha r_\beta$$

ist. Das Zeichen $\mathfrak{S}$ benutze ich hier und im Folgenden immer für Summen, bei denen nicht jeder der Summationsbuchstaben unabhängig von dem andern alle in Betracht kommenden Werthe durchläuft, sondern bei denen für α, β nur alle verschiedenen Paare ungleicher Zahlen gesetzt werden sollen, also von zwei conjugirten Paaren, wie α, β und β, α nur das eine (gleichgültig welches) genommen werden soll.

Die Anzahl der linear unabhängigen Functionen, welche unter diesen Voraussetzungen den obigen Bedingungen genügen, ist gleich der Quadratwurzel aus der Determinante (2ϱ)ten Grades $|k_{\alpha\beta}|$, die stets von Null verschieden ist. Nehmen wir nun an, dass $|k_{\alpha\beta}| = 1$ ist, so ist die Function $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)$ bis auf einen constanten Factor durch die obigen Bedingungen vollständig bestimmt. Setzen wir weiter voraus, dass die Parameter $c_\alpha = \frac{1}{2}k_\alpha$ Hälften ganzer Zahlen sind, so ist diese Function gerade oder ungerade.

Das System der ϱ Variabeln $u_1, \ldots u_\varrho$ bezeichne ich symbolisch mit einem Buchstaben u, das System der ϱ Grössen $\frac{1}{2}a_1, \ldots \frac{1}{2}a_\varrho$ mit a. Ferner setze ich

$$(4.) \qquad E[c+\sum_\lambda a'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)] = \eta[2a](u)$$

und schreibe die Gleichung (2.) in der symbolischen Form

$$(5.) \qquad \vartheta(u+2a) = \vartheta(u)\eta[2a](u).$$

Sind $s_1, \ldots s_{2\varrho}$ ganze Zahlen, und bezeichnet $2b$ das System der ϱ Grössen $b_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}s_\alpha$, so setze ich

$$(6.) \qquad E[\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}r_\alpha s_\beta + \tfrac{1}{2}\sum_\alpha k_\alpha r_\alpha s_\alpha] = (a, b)$$

und

$$(7.) \qquad E[\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}r_\alpha r_\beta + \tfrac{1}{2}\sum k_\alpha r_\alpha^2] = (a, a) = (a).$$

Bewegt sich jede der 2ϱ Zahlen $r_1, \ldots r_{2\varrho}$ von 0 bis 1, so ist dann (l. c. S. 46, (5.))

$$(8.) \qquad \Sigma(a) = 2^\varrho\mu,$$

wo $\mu = +1$ oder -1 ist, je nachdem $\vartheta(u)$ gerade oder ungerade ist. Demnach ist

$$(9.) \qquad \vartheta(-u) = \mu\vartheta(u).$$

Man kann die Zahl μ auf folgendem Wege berechnen: Sei $k'_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$, wenn das Paar α, β in der Summe $\sum k_{\alpha\beta}r_\alpha r_\beta$ vorkommt, und $k'_{\beta\alpha} = k'_{\alpha\beta}$ $(= -k_{\beta\alpha})$ und $k'_{\alpha\alpha} = 2k_\alpha$. Dann ist die symmetrische Determinante $|k'_{\alpha\beta}| = k \equiv (-1)^\varrho$ (mod. 4) und

$$\mu = (-1)^{\frac{k^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{k-(-1)^\varrho}{4}}.$$

Indessen mache ich von diesen Formeln im Folgenden keinen Gebrauch.

Aus der Function $\vartheta(u)$ kann man durch Vermehrung des Arguments um halbe Perioden und Multiplication mit einem Exponentialfactor andere *Jacobi*sche Functionen erster Ordnung mit denselben Perioden, aber andern Parametern ableiten. Zu dem Ende setze ich

$$(10.) \qquad E[\sum_\lambda \tfrac{1}{2}a'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{4}a_\lambda)+\tfrac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}r_\alpha r_\beta+\tfrac{1}{8}\sum k_\alpha r_\alpha^2] = \eta[a](u)$$

oder auch $= \eta_a(u)$, und

$$(11.) \qquad E[\tfrac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}r_\alpha s_\beta+\tfrac{1}{4}\sum_\alpha k_\alpha r_\alpha s_\alpha] = \sqrt{(a, b)}.$$

Für den Fall, dass die Zahlen r_α oder s_α alle gerade sind, gehen diese Definitionen in die Gleichungen (4.) und (6.) über. Da

$$b_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}s_\alpha, \quad b'_\lambda = \sum_\alpha a'_{\lambda\alpha}s_\alpha$$

ist, so ist

$$(12.)\quad \sum_{\lambda}(a_\lambda b'_\lambda - b_\lambda a'_\lambda) = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} r_\alpha s_\beta = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}(r_\alpha s_\beta - s_\alpha r_\beta).$$

Mit Hülfe dieser Relation ergiebt sich leicht die Formel *)

$$(13.)\quad \eta_{ab}(u) = \sqrt{(a,b)}\,\eta_a(u+b)\eta_b(u).$$

Mit ab oder $a+b$ bezeichne ich das System der ϱ Grössen $\frac{1}{2}(a_\lambda+b_\lambda)$ oder auch das System der 2ϱ ganzen Zahlen r_a+s. Nunmehr setze ich

$$(14.)\quad \vartheta[a](u) = \vartheta_a(u) = \frac{\vartheta(u+a)}{\eta_a(u)}.$$

Das Zeichen a, unter welchem ich das System der ϱ Grössen $\frac{1}{2}a_\lambda$ oder das System der 2ϱ Indices r_a verstehe, nenne ich die Charakteristik der Function $\vartheta_a(u)$. Aus dieser Definition ergiebt sich

$$\vartheta_a(u+b) = \frac{\vartheta(u+a+b)}{\eta_a(u+b)}, \quad \vartheta_{ab}(u) = \frac{\vartheta(u+a+b)}{\eta_{ab}(u)}$$

und folglich nach Formel (13.) die Gleichung

$$(15.)\quad \vartheta_a(u+b) = \sqrt{(a,b)}\,\vartheta_{ab}(u)\eta_b(u),$$

welche eine Verallgemeinerung der Gleichung (14.) ist. Besonders häufig gebraucht man die folgende aus dieser Gleichung fliessende Formel: Ist $u+v=w+s$, und bedeuten a, b, c, d, p halbe Perioden oder Charakteristiken, so ist

$$(16.)\quad \frac{\vartheta_a(u+p)\vartheta_b(v+p)}{\vartheta_c(w+p)\vartheta_d(s+p)} = \frac{\sqrt{(ab,p)}}{\sqrt{(cd,p)}}\,\frac{\vartheta_{ap}(u)\vartheta_{bp}(v)}{\vartheta_{cp}(w)\vartheta_{dp}(s)}.$$

Nach Gleichung (5.) ist

$$\vartheta_{abb}(u) = \vartheta[a+2b](u) = \frac{\vartheta(u+a+2b)}{\eta[a+2b](u)} = \frac{\vartheta(u+a)\eta[2b](u+a)}{\eta[a+2b](u)},$$

und folglich

$$\frac{\vartheta_a(u)}{\vartheta_{abb}(u)} = \frac{\eta[2b+a](u)}{\eta[2b](u+a)\eta_a(u)} = \sqrt{(2b,a)} = (b,a),$$

also

$$(17.)\quad \vartheta_{abb}(u) = (b,a)\vartheta_a(u).$$

Dieser Formel zufolge stellt der Ausdruck $\vartheta_a(u)$, falls man den Zahlen

---

*) Daher ist $\eta\,[2ab](u) = \eta[2a](u+2b)\eta[2b](u)$. Gilt also die Formel (2.) oder (5.) für die beiden Perioden $2a$ und $2b$, so ist
$\vartheta(u+2a+2b) = \eta[2a](u+2b)\vartheta(u+2b) = \eta[2a](u+2b)\eta[2b](u)\vartheta(u) = \eta[2ab](u)\vartheta(u)$,
und mithin ist jene Formel auch für die Periode $2ab$ richtig. Da sie nach (1.) gilt, wenn eine der Zahlen r_a gleich ± 1 und die übrigen Null sind, so ist sie damit allgemein bewiesen.

$r_1, \ldots r_{2\varrho}$ alle möglichen Werthe ertheilt, nur $2^{2\varrho}$ wesentlich verschiedene Functionen dar, die man erhält, indem man jeder der Zahlen $r_1, \ldots r_{2\varrho}$ die Werthe 0 und 1 beilegt. Ersetzt man in der Formel (15.) b durch $2b$, so erhält man

$$\vartheta_a(u+2b) = \sqrt{(a, 2b)}\vartheta_{abb}(u)\eta[2b](u).$$

Setzt man also

$$(18.) \qquad ((a, b)) = ((b, a)) = (a, b)(b, a) = E[\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} r_\alpha s_\beta],$$

so erhält man die Formel

$$(19.) \qquad \vartheta_a(u+2b) = ((a, b))\vartheta_a(u)\eta[2b](u),$$

welche eine Verallgemeinerung der Formel (5.) ist *).

Setzt man in der Gleichung (17.) $b = -a$, so findet man

$$(20.) \qquad \vartheta[-a](u) = (a)\vartheta[a](u).$$

Ferner ist

$$\vartheta[-a](-u) = \frac{\vartheta(-u-a)}{\eta[-a](-u)} = \frac{\mu\vartheta(u+a)}{\eta[a](u)},$$

also

$$(21.) \qquad \vartheta[-a](-u) = \mu\vartheta[a](u),$$

und folglich

$$(22.) \qquad \vartheta_a(-u) = (a)\mu\vartheta_a(u).$$

Die Function $\vartheta_a(u)$ ist also gerade oder ungerade, je nachdem $(a) = +\mu$ oder $-\mu$ ist, und je nachdem heisst auch die Charakteristik a gerade oder ungerade. Befinden sich also g gerade und h ungerade unter den $2^{2\varrho}$ Functionen $\vartheta_a(u)$, so ist $g+h = 2^{2\varrho}$ und nach Formel (8.) $g-h = 2^\varrho$, und folglich

$$g = 2^{\varrho-1}(2^\varrho+1), \quad h = 2^{\varrho-1}(2^\varrho-1).$$

Es ist nun leicht, alle die Sätze, die ich in meiner Arbeit *Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln* (dieses Journ. Bd. 89) über die Charakteristiken der Thetafunctionen entwickelt habe, auf die hier gegebenen Definitionen zu übertragen. Zwischen den Symbolen (7.) und (18.) besteht die Beziehung

$$(23.) \qquad ((a, b)) = (a)(b)(ab).$$

Je nachdem dieser Ausdruck gleich $+1$ oder -1 ist, heissen die beiden Charakteristiken a und b *syzygetisch* oder *azygetisch*. (Diese Definition

*) Die Ausdrücke (a, b) und $((a, b))$ habe ich in meinen bisherigen Arbeiten (vgl. dieses Journ. Bd. 89, S. 190) mit $\binom{b}{a}$ und (a, b) bezeichnet.

kommt nur zur Anwendung, wenn a und b Gruppencharakteristiken sind, d. h. als Summen einer geraden Anzahl der ursprünglichen Charakteristiken zu betrachten sind.) Je nachdem ferner der Ausdruck

$$((a, b, c)) = (a)(b)(c)(abc) = (bc)(ca)(ab) = ((b, c))((c, a))((a, b)) = ((ab, ac))$$

gleich $+1$ oder -1 ist, heissen die drei Charakteristiken a, b, c syzygetisch oder azygetisch. (Diese Definition kommt nur in Betracht, wenn a, b, c einfache Charakteristiken oder Summen einer ungeraden Anzahl derselben sind.) Dieser Ausdruck bleibt ungeändert, wenn jede der drei Charakteristiken um dieselbe Charakteristik r vermehrt wird,

$$((ar, br, cr)) = ((a, b, c)).$$

Ein System von $2\varrho+2$ Charakteristiken, von denen je drei azygetisch sind, heisst ein Fundamentalsystem. Ist r eine beliebige Charakteristik, und bilden $a_0, a_1, \ldots a_{2\varrho+1}$ ein Fundamentalsystem, so bilden auch $a_0 r, a_1 r, \ldots a_{2\varrho+1} r$ ein solches. Die $2^{2\varrho}$ verschiedenen Fundamentalsysteme, die auf diese Weise aus einem erhalten werden, nenne ich eine *Schaar* von Fundamentalsystemen. (Ich habe sie l. c. einen Complex genannt.) Sind a, b, c, d vier Charakteristiken eines Fundamentalsystems, ist s ihre Summe, und ersetzt man diese vier durch as, bs, cs, ds, während man die übrigen unverändert lässt, so erhält man wieder ein Fundamentalsystem. Ist die Summe der ungeraden Charakteristiken in dem ursprünglichen Fundamentalsystem gleich k, so ist sie in dem abgeleiteten gleich ks.

§ 2.

Die *Jacobi*schen Functionen dreier Variabeln.

In dem Falle $\varrho = 3$ bezeichne ich die 8 Charakteristiken eines beliebigen Fundamentalsystems mit $a_0, a_1, \ldots a_7$ oder noch einfacher mit $[0], [1], \ldots [7]$. Unter denselben befinden sich entweder 3 oder 7 ungerade. Ihre Summe, die eine gerade Charakteristik ist, bezeichne ich mit k, die Summe aller 8, die $\equiv 0 (\mathrm{mod.}\ 2)$ ist, mit

$$(1.) \qquad [012\ldots7] = 2j.$$

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschiedene Zahlen von 0 bis 7, so stellt $[k\alpha\beta]$ die 28 ungeraden und $[k\alpha\beta\gamma\delta]$ die 35 von $[k]$ verschiedenen geraden Charakteristiken dar. Bedient man sich also des Zeichens (7.) § 1, so ist

$$(2.) \qquad (k\alpha\beta) = -(k), \quad (k\alpha\beta\gamma\delta) = +(k).$$

Durchläuft r alle 64 Charakteristiken, so durchläuft $[0r], [1r], \ldots [7r]$ eine

Schaar von Fundamentalsystemen. Unter denselben befinden sich acht, die aus einer geraden und sieben ungeraden Charakteristiken bestehen, und 56, die aus fünf geraden und drei ungeraden bestehen. In jedem dieser 64 Systeme ist die Summe der ungeraden Charakteristiken congruent k. Um alle 36.64 Fundamentalsysteme aufzustellen, genügt es, aus jeder der 36 Schaaren von je 64 Systemen einen Repräsentanten anzugeben. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa, \lambda, \mu, \nu$ die acht Zahlen von 0 bis 7 und ist $a = [\alpha\beta\gamma\delta] \equiv [\varkappa\lambda\mu\nu]$, so bilden

$$[\alpha a],\quad [\beta a],\quad [\gamma a],\quad [\delta a],\quad [\varkappa],\quad [\lambda],\quad [\mu],\quad [\nu]$$

ein Fundamentalsystem, in welchem die Summe der ungeraden Charakteristiken congruent ka ist. Da man die acht Charakteristiken des ursprünglichen Fundamentalsystems auf 35 Arten in zwei Halbsysteme von je vier Charakteristiken zerlegen kann, so erhält man auf diese Weise (zusammen mit dem ursprünglichen Fundamentalsystem) 36 Repräsentanten für die 36 Schaaren von Fundamentalsystemen. Jeder geraden Charakteristik k entspricht eine bestimmte Schaar, die aus allen denjenigen Fundamentalsystemen besteht, für welche die Summe der ungeraden Charakteristiken congruent k ist.

Ist $ab = 2j$, so ist nach Formel (17.) § 1

$$(ja, ka)\vartheta[ka](u) = \vartheta[ka+2j+2a](u) = \vartheta[kb+4a](u) = \vartheta[kb](u),$$

also

$$(3.)\quad \vartheta[kb](u) = (ja, ka)\vartheta[ka](u) = (j, k)(jk, a)(k)(ka)\vartheta[ka](u)$$

und speciell

$$(4.)\quad \vartheta_{k0123}(u) = (j, k)(jk, 0123)\vartheta_{k4567}(u),\quad \vartheta_{k012345}(u) = -(j, k)(jk, 67)\vartheta_{k67}(u).$$

Ist u eine Variable (d. h. ein System von 3 Variabeln u', u'', u''') und s eine Constante, und bewegt sich λ von 0 bis 7, so sind die acht Producte $\vartheta_{k\lambda}(u)\vartheta_{k\lambda}(u+s)$ linear unabhängig. Denn aus der Gleichung

$$\Sigma C_\lambda \vartheta_{k\lambda}(u)\vartheta_{k\lambda}(u+s) = 0$$

folgt, wenn man $u = [\alpha]$ setzt, $C_\alpha = 0$. Da es nicht mehr als acht gleichändrige *Jacobi*sche Functionen zweiten Grades giebt, so besteht mithin, falls v und w Constanten sind, eine Relation von der Form

$$C\vartheta_k(u+v)\vartheta_k(u+w) = \sum_\lambda C_\lambda \vartheta_{k\lambda}(u)\vartheta_{k\lambda}(u+v+w).$$

Setzt man $u = [\alpha]$, so erhält man $C_\alpha \vartheta_k(0)\vartheta_k(v+w) = (\alpha)C\vartheta_{k\alpha}(v)\vartheta_{k\alpha}(w)$. Das hier auftretende Argument 0 (d. h. $u' = u'' = u''' = 0$) ist nicht mit der Charakteristik [0] zu verwechseln. Man findet demnach das folgende zu-

erst von Herrn *Weber* aufgestellte Additionstheorem

$$(5.)\quad \vartheta_k(0)\vartheta_k(v+w)\vartheta_k(w+u)\vartheta_k(u+v) = \sum_\lambda (\lambda)\vartheta_{k\lambda}(u)\vartheta_{k\lambda}(v)\vartheta_{k\lambda}(w)\vartheta_{k\lambda}(u+v+w).$$

Ist a eine beliebige Charakteristik, und ersetzt man das Fundamentalsystem der Charakteristiken $[\lambda]$ durch das der Charakteristiken $[a\lambda]$, so bleibt k ungeändert, und folglich erhält man

$$(6.)\quad \vartheta_k(0)\vartheta_k(v+w)\vartheta_k(w+u)\vartheta_k(u+v) = \sum_\lambda (a\lambda)\vartheta_{ka\lambda}(u)\vartheta_{ka\lambda}(v)\vartheta_{ka\lambda}(w)\vartheta_{ka\lambda}(u+v+w).$$

§ 3.

Die Werthe der Function $\varphi(u)$ für die 63 halben Perioden.

Jede *Jacobi*sche Function zweiten Grades, die mit $(\vartheta(u))^2$ gleichändrig ist, lässt sich auf die Form

$$(1.)\quad \varphi(u) = \sum_\lambda{}_0^7 g_\lambda (\vartheta_{k0\lambda}(u))^2$$

bringen. Verschwindet sie für $u=0$, so ist $g_0 = 0$. Sollen ausserdem die Glieder zweiter Dimension in ihrer Entwicklung verschwinden, so muss identisch

$$\sum_\lambda{}_1^7 g_\lambda (a'_\lambda u' + a''_\lambda u'' + a'''_\lambda u''')^2 = 0$$

sein. Dabei ist mit

$$u_\lambda = a'_\lambda u' + a''_\lambda u'' + a'''_\lambda u''' \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots 7)$$

das Aggregat der Glieder der ersten Dimension in der Entwicklung von $\vartheta_{k0\lambda}(u)$ nach Potenzen von u bezeichnet. Durch jene Gleichung sind die Verhältnisse der Grössen g_λ bestimmt. Bedient man sich der Abkürzung

$$f_{\alpha\beta\gamma} = (a_\alpha, a_\beta, a_\gamma) = |a_\lambda^{(\mu)}| \qquad \begin{pmatrix}\lambda = \alpha, \beta, \gamma \\ \mu = 1, 2, 3\end{pmatrix}$$

und setzt man

$$g_1 = f_{246}f_{257}f_{347}f_{356} - f_{357}f_{346}f_{256}f_{247},$$

so ist

$$\pm g_\lambda = f_{\alpha\beta\gamma}f_{\alpha\beta'\gamma'}f_{\alpha'\beta\gamma'}f_{\alpha'\beta'\gamma} - f_{\alpha'\beta'\gamma'}f_{\alpha'\beta\gamma}f_{\alpha\beta'\gamma}f_{\alpha\beta\gamma'},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $\lambda\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ eine eigentliche oder uneigentliche Permutation der Zahlen 1, 2, ... 7 ist.

Um die Determinanten $f_{\alpha\beta\gamma}$ zu berechnen, führe ich die Abkürzungen ein

$$(2.)\quad \vartheta_k(0) = c, \quad \vartheta_{k\alpha\beta\gamma\delta}(0) = c_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

so dass nach Formel (4.), § 2

$$(3.)\quad c_{k\lambda\mu\nu} = (j, k)(jk, \alpha\beta\gamma\delta)c_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

ist. Setzt man nun in der Formel (6.) § 2 $a = [0]$, $v = [57]$, $w = [67]$, so

erhält man

$$0 = \sum_{\lambda}^{4}{}_{1}(\lambda, 567\lambda) c_{067\lambda} c_{075\lambda} \vartheta_{k0\cdot 6\lambda}(u) \vartheta_{k0\lambda}(u).$$

Bei der Berechnung des Vorzeichens ist zu berücksichtigen, dass

$$(4.) \qquad ((\beta, \gamma))((\gamma, \alpha))((\alpha, \beta)) = -1$$

und folglich

$$(5.) \qquad ((\alpha\beta, \gamma\delta)) = +1, \quad (\alpha\beta, \gamma\delta) = (\gamma\delta, \alpha\beta)$$

ist. Aus jener Formel folgt

$$0 = \sum_{\lambda}^{4}{}_{1}(\lambda, 567\lambda) c_{067\lambda} c_{075\lambda} c_{056\lambda} u_{\lambda},$$

und wenn man $u_1 = u_2 = 0$ setzt:

$$(3, 3567) c_{0367} c_{0375} c_{0356} f_{123} + (4, 4567) c_{0467} c_{0475} c_{0456} f_{124} = 0.$$

Setzt man also

$$f_{123} = l_{123}(1, 2)(2, 3)(3, 1)(123, 0) c_{0456} c_{0457} c_{0467} c_{0567},$$

so ist $l_{123} = l_{124}$. Da ausserdem l_{123} ungeändert bleibt, falls man die Indices unter einander vertauscht, so ist $l_{\alpha\beta\gamma} = l$ von den Indices 1, 2, ... 7 unabhängig. Demnach ist

$$g_1 = -l^4 (23, 4567)(45, 67) \prod_{\nu}{}_{4}^{7}(c_{012\nu} c_{013\nu}) \cdot \prod_{\nu}{}_{6}^{7}(c_{014\nu} c_{015\nu})$$
$$(c_{0246} c_{0257} c_{0347} c_{0356} - c_{0357} c_{0346} c_{0256} c_{0247}).$$

Setzt man aber in der Formel (5.) § 2 $u = [056]$, $v = [047]$, $w = [146]$, so findet man

$$(6.) \qquad \begin{cases} (j, k)(0, 1)(2, 3)(4, 5)(6, 7)((0, 246)) c\, c_{0123} c_{0145} c_{0167} \\ \qquad = c_{0246} c_{0257} c_{0347} c_{0356} - c_{0357} c_{0346} c_{0256} c_{0247}. \end{cases}$$

Bedient man sich also der Abkürzungen

$$(7.) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = (k\alpha)(\alpha, \beta) = -\varepsilon_{\beta\alpha}$$

und

$$(8.) \qquad \varepsilon = \prod_{\alpha<\beta}{}_{0}^{7} \varepsilon_{\alpha\beta},$$

so erhält man (vgl. *Schottky*, l. c. S. 29)

$$g_1 = l^4 \varepsilon(j, k)(01) c \prod_{\mu, \nu}{}_{2}^{7} c_{01\mu\nu},$$

wo μ, ν alle verschiedenen Paare von je zwei der Indices 2, 3, ... 7 durchlaufen.

Ist a irgend eine halbe Periode, so nenne ich den Ausdruck

$$(9.) \qquad h_a = \frac{\varphi(a)}{(\eta_a(0))^2}$$

den reducirten Werth der Function $\varphi(u)$ für $u = a$. Derselbe bleibt ungeändert, wenn a durch eine congruente halbe Periode ersetzt wird. Setzt man in der Gleichung (1.) $u = [0\alpha]$, so erhält man $c^2 g_\alpha = (k0\alpha, 0\alpha)\, h_{0\alpha}$ und folglich

$$c^2\varphi(u) = \sum_\lambda{}^{7}_{0}(k, 0\lambda)(0\lambda)h_{0\lambda}(\vartheta_{k0\lambda}(u))^2.$$

Indem man nun über den constanten Factor der Function $\varphi(u)$ eine bestimmte Verfügung trifft, kann man den obigen Entwicklungen zufolge setzen

$$h_{0\lambda} = -(j, k)(k, 0\lambda)c\Big(\prod_{\mu,\nu} c_{0\lambda\mu\nu}\Big) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots 7),$$

wo μ, ν alle Paare der 6 von 0 und λ verschiedenen Indices durchlaufen. In dieser ganzen Rechnung ist der Index 0 bevorzugt. Bevorzugt man einen andern Index α, so findet man, dass für jeden von α verschiedenen Index β

$$(10.) \qquad h_{\alpha\beta} = -(j, k)(k, \alpha\beta)c\Big(\prod_{\mu,\nu} c_{\alpha\beta\mu\nu}\Big).$$

Da $h_{\alpha 0} = h_{0\alpha}$ ist, so ist hier der constante Factor von $\varphi(u)$ in derselben Weise gewählt, wie vorher, und demnach ist

$$(11.) \qquad c^2\varphi(u) = \sum_\lambda (k, \alpha\lambda)(\alpha\lambda)h_{\alpha\lambda}(\vartheta_{k\alpha\lambda}(u))^2.$$

Der Ausdruck $h_{\alpha\beta}$ bleibt ungeändert, nicht nur wenn α oder β, sondern auch wenn k durch eine mod. 2 congruente Charakteristik ersetzt wird.

Um nun auch die reducirten Werthe von $\varphi(u)$ für die übrigen halben Perioden zu berechnen, betrachte ich ein anderes Fundamentalsystem. Sei $b = [0127]$ und

$$7' = 7b, \quad 0' = 0b, \quad 1' = 1b, \quad 2' = 2b, \quad 3' = 3, \quad 4' = 4, \quad 5' = 5, \quad 6' = 6,$$

also $k' = kb$ und $j' \equiv j \pmod 2$. Dann ist nach Formel (10.)

$$h_{3'4'} = -(j', k')(k', 3'4')\vartheta[k'](0) \prod_{\mu',\nu'} \vartheta[k'3'4'\mu'\nu'](0).$$

Nun ist aber

$$\vartheta[k'] = \vartheta[kb] = (j, k)(jk, b)\vartheta[k3456], \quad \vartheta[k'3'4'5'6'] = \vartheta[kjj] = [j, k]\vartheta[k].$$

Durchläuft μ die Zahlen 0, 1, 2, 7 und ν die Zahlen 5, 6, so ist

$$\vartheta[k'3'4'\mu'\nu'] = \vartheta[k34\mu\nu bb] = (b, k34\mu\nu)\vartheta[k34\mu\nu]$$

und $\Pi\,(b, k34\mu\nu) = 1$. Sind μ und ν zwei der Zahlen 0, 1, 2, 7, und sind ϱ und σ die beiden andern, so ist

$$\vartheta[k'3'4'\mu'\nu'] = \vartheta[k34\mu\nu bbb] = (b\mu\nu, k34\varrho\sigma)\vartheta[k34\varrho\sigma]$$

und $\Pi(b\mu\nu, k56\mu\nu) = (b, kb34)$. Daher ist

$$h_{3'4'} = -(j, k)(k, 34)c(\Pi c_{34\mu\nu}) = h_{34}.$$

Setzt man ferner $a = [0123]$, so ist

$$h_a = h_{3\gamma'} = -(j', k')(k', 3'7')\vartheta[k'](0) \prod_{\mu',\nu'} \vartheta[k'3'7'\mu'\nu'](0).$$

Nun ist aber

$$\vartheta[k'] = \vartheta[kb] = (3, kb)\vartheta[ka37].$$

Durchläuft μ die Zahlen 0, 1, 2 und ν die Zahlen 4, 5, 6, so ist

$$\vartheta[k'3'7'\mu'\nu'] = \vartheta[k37\mu\nu bbb] = (7b, ka\mu\nu)\vartheta[ka\mu\nu]$$

und $\Pi(7b, ka\mu\nu) = (7b, kb)$. Sind μ und ν zwei der Zahlen 0, 1, 2, und ist ϱ die dritte, so ist

$$\vartheta[k'3'7'\mu'\nu'] = \vartheta[k37\mu\nu] = (\varrho, k37\mu\nu)\vartheta[ka7\varrho]$$

und $\Pi(\varrho, k37\mu\nu) = -(3a, 37k)$. Sind μ und ν zwei der Zahlen 4, 5, 6, und ist ϱ die dritte, so ist

$$\begin{aligned}\vartheta[k'3'7'\mu'\nu'] = \vartheta[k37\mu\nu bb] &= (b, k37\mu\nu)\vartheta[k37\mu\nu] \\ &= (k)(jkb, ka3\varrho)\vartheta[k012\varrho] = (k)(jkb3, ka3\varrho)\vartheta[ka3\varrho]\end{aligned}$$

und $\Pi(k)(jkb3, ka3\varrho) = (k)(jkb3, k37)$. Daher ist

$$(12.) \qquad h_a = (ja, a)\Big(\prod_{\mu,\nu} \vartheta[ka\mu\nu](0)\Big),$$

wo μ die Zahlen 0, 1, 2, 3 und ν die Zahlen 4, 5, 6, 7 durchläuft. Oder es ist

$$(13.) \qquad h_{\alpha\beta\gamma\delta} = (j, \alpha\beta\gamma\delta)\prod_{\nu}(c_{\beta\gamma\delta\nu}\, c_{\alpha\gamma\delta\nu}\, c_{\alpha\beta\delta\nu}\, c_{\alpha\beta\gamma\nu}),$$

wo ν die vier von α, β, γ, δ verschiedenen Indices durchläuft. Die Charakteristiken der 16 geraden Thetafunctionen, deren Nullwerthe in dem Producte h_a vorkommen, sind die sämmtlichen geraden Charakteristiken, welche zu a addirt eine ungerade Charakteristik ergeben. Da

$$\vartheta[k4567\mu\nu] = (ja, ka\mu\nu)\vartheta[k0123\mu\nu]$$

ist, so ist

$$(14.) \qquad h_{0123} = h_{4567}.$$

Die so definirten 63 Constanten h_a, wo a irgend eine der 63 verschiedenen nicht verschwindenden Gruppencharakteristiken bedeutet, bleiben ungeändert, wenn die Charakteristiken j, k, $[0]$, ... $[7]$ (mod. 2) abgeändert werden, oder wenn bei ihrer Berechnung irgend ein anderes Fundamentalsystem statt des ursprünglichen zu Grunde gelegt wird. Ist a die verschwindende Gruppencharakteristik, die ich mit 0 bezeichne, so setze ich $h_0 = 0$.

In derselben Weise, wie oben die Formel (5.) § 2 erhalten wurde, findet man die Gleichung

$$(15.) \qquad (\vartheta_k(0))^2 q(u) = \sum_{\lambda}{}_0^7 (kb\lambda, b\lambda) h_{b\lambda} (\vartheta_{kb\lambda}(u))^2,$$

wo b irgend eine Charakteristik ist. Ist z. B. $b = [012]$, so ist damit $\varphi(u)$ durch drei ungerade und fünf gerade Thetafunctionen ausgedrückt. Wählt man ferner statt des ursprünglichen Fundamentalsystems ein anderes, indem man $a = [0123]$ und $0' = 0a, \ldots 3' = 3a, 4' = 4, \ldots 7' = 7$ setzt, so erhält man

$$(16.) \quad (\vartheta_{ka}(0))^2 \varphi(u) = \sum_{\lambda}^{3}{}_0(kb\lambda, ab\lambda) h_{ab\lambda} (\vartheta_{kb\lambda}(u))^2 + \sum_{\lambda}^{7}{}_4(kab\lambda, b\lambda) h_{b\lambda} (\vartheta_{kab\lambda}(u))^2.$$

Die Vergleichung der Formeln (15.) und (16.) zeigt, dass $\varphi(u)$ nicht etwa die Grösse $c = \vartheta_k(0)$ als Nenner enthält. Letztere Formel erlaubt sogar, den Ausdruck zu bestimmen, in welchen $\varphi(u)$ übergeht, falls $c = 0$ ist. (Vgl. Formel (17.) § 14). Wählt man in derselben $b = [0]$, so erhält man, weil die Grössen $h_{\alpha\beta}$ sämmtlich für $c = 0$ verschwinden,

$$c_a^2 \varphi(u) = (k, a) h_a (\vartheta_k(u))^2.$$

Ebenso ist, wenn ka irgend eine von k verschiedene gerade Charakteristik ist, und $c_a = 0$ ist,

$$c^2 \varphi(u) = (ka, a) h_a (\vartheta_{ka}(u))^2.$$

In dem hyperelliptischen Falle geht also $\varphi(u)$, von einem constanten Factor abgesehen, in das Quadrat derjenigen geraden Thetafunction über, welche für $u = 0$ verschwindet. Da nun die Einfachheit, mit welcher sich dieser Fall erledigen lässt, wesentlich auf der Existenz dieser von der zweiten Ordnung verschwindenden Thetafunction ersten Grades beruht, so erklärt sich daraus die Bedeutung, welche für die allgemeine Theorie die Adjunction der irrationalen Function $\sqrt{\varphi(u)}$ besitzt. Verschwindet kein Nullwerth einer geraden Thetafunction, so kann diese Function nicht eindeutig sein. Denn sonst wäre sie eine *Jacobi*sche Function ersten Grades, deren Entwicklung mit den Gliedern der zweiten (oder höheren) Dimension anfängt. Die Entwicklung jeder solchen Function ersten Grades beginnt aber unter der gemachten Annahme mit den Gliedern der nullten oder ersten Dimension, je nachdem sie gerade oder ungerade ist.

Ich ertheile jetzt dem Producte der Nullwerthe aller 36 geraden Thetafunctionen ein bestimmtes Vorzeichen, indem ich

$$(17.) \quad h = (j, k) c \Big(\prod_{\lambda, \mu, \nu} c_{0\lambda\mu\nu} \Big)$$

setze, wo λ, μ, ν alle verschiedenen Tripel der Zahlen 1, 2, ... 7 durchlaufen. Dieser Ausdruck bleibt nämlich ungeändert, wenn irgend eine der bei seiner Bildung benutzten Charakteristiken mod. 2 abgeändert wird, ferner auch, wenn statt der Charakteristik [0] eine andere bevorzugt wird, endlich

wenn statt des ursprünglichen Fundamentalsystems irgend ein anderes gewählt wird.

Durch eine leichte Rechnung findet man nun die Relationen

$$(18.) \qquad \prod_{\nu} h_{a\nu} = -c^4 h^3,$$

wo ν die sieben von α verschiedenen Indices durchläuft, und

$$(19.) \qquad h_{\alpha\beta} h_{\alpha\gamma} h_{\alpha\delta} h_{\beta\gamma} h_{\beta\delta} h_{\gamma\delta} = h^2 c^4 c^4_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Ferner ergiebt sich die Gleichung

$$(20.) \qquad h_{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} h_{\alpha\beta} = -h g^2_{\alpha,\beta,\gamma},$$

wo

$$(21.) \qquad \pm g_{\alpha,\beta,\gamma} = c(\prod_{\nu} c_{\alpha\beta\gamma\nu})$$

ist. Hier durchläuft ν die fünf von α, β, γ verschiedenen der Indices 0, 1, ... 7. Endlich ist

$$(22.) \qquad h_{\alpha\beta\gamma\varkappa} h_{\alpha\beta\gamma\lambda} h_{\varkappa\lambda} = -h g^2_{\varkappa,\lambda,\alpha\beta\gamma},$$

wo

$$(23.) \qquad \pm g_{\varkappa,\lambda,\alpha\beta\gamma} = c_{\varkappa\lambda\beta\gamma} c_{\varkappa\lambda\gamma\alpha} c_{\varkappa\lambda\alpha\beta} c_{\varkappa\lambda\beta'\gamma'} c_{\varkappa\lambda\gamma'\alpha'} c_{\varkappa\lambda\alpha'\beta'}$$

ist, und $\varkappa$, λ, α, β, γ, α', β', γ' die acht Indices 0, 1, ... 7 sind. Diese beiden Formeln lassen sich folgendermassen zusammenfassen: Sind a und b zwei azygetische Charakteristiken, so ist

$$(24.) \qquad h_a h_b h_{ab} = -h(\prod_{r} \vartheta_r(0))^2,$$

wo r die sechs geraden Charakteristiken durchläuft, für welche ar und br (und folglich auch abr) ungerade sind. In ähnlicher Weise lässt sich zeigen: Sind a und b zwei verschiedene nicht verschwindende syzygetische Charakteristiken, so ist

$$(25.) \qquad \frac{h_a h_b}{h_{ab}} = (\prod_{r} \vartheta_r(0))^2,$$

wo r die acht geraden Charakteristiken durchläuft, für welche ar und br ungerade sind, und folglich abr gerade ist.

§ 4.

Die Quadratwurzeln aus den Werthen von $\varphi(u)$ für die halben Perioden.

Die soeben entwickelten Formeln werde ich dazu benutzen, die Quadratwurzeln aus den 63 Grössen h_a durch 7 unter ihnen auszudrücken. Während in der bisherigen Untersuchung jede Bevorzugung, welche irgend eine Charakteristik erfahren hat, nur scheinbar gewesen ist, werde ich von jetzt an die gerade Charakteristik k und die ihr entsprechende Schaar von

Fundamentalsystemen bevorzugen. Indem ich über das oben unbestimmt gelassene Vorzeichen des Ausdrucks (21.) § 3 eine bestimmte Verfügung treffe, setze ich

$$(1.) \qquad g_{\alpha,\beta,\gamma} = (j, k)(j, \alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma, k)c(\prod_{\nu} c_{\alpha\beta\gamma\nu}).$$

Dann ist nach Formel (13.) § 3

$$(2.) \qquad g_{\beta,\gamma,\delta}g_{\alpha,\gamma,\delta}g_{\alpha,\beta,\delta}g_{\alpha,\beta,\gamma} = (\alpha\beta\gamma\delta, k)c^4c^4_{\alpha\beta\gamma\delta}h_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Ferner findet man leicht

$$(3.) \qquad \prod_{\lambda} g_{\alpha,\beta,\lambda} = (j, \alpha\beta)(\alpha\beta, k)c^4h^2_{\alpha\beta},$$

wo λ die sechs von α, β verschiedenen Indices durchläuft, und endlich

$$(4.) \qquad g_{0,1,2}g_{0,1,3}g_{0,1,4}g_{2,3,4} = -(j, 567)(234, k)c^2h_{01}g_{5,6,7}.$$

Indem ich nun h_α mit dem Vorzeichen verbinde, mit dem es in der Formel (15.) § 3 auftritt, setze ich

$$(5.) \qquad (k\alpha, \alpha)h_\alpha = g^2_\alpha,$$

also

$$(6.) \qquad g^2_{\alpha\beta} = -(\alpha\beta, k)h_{\alpha\beta} = -(j, k)(\alpha\beta)c(\prod_{\mu,\nu} c_{\alpha\beta\mu\nu})$$

und

$$(7.) \qquad g^2_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\alpha\beta\gamma\delta, k)h_{\alpha\beta\gamma\delta} = (j, \alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma\delta, k)\prod_{\nu}(c_{\beta\gamma\delta\nu}c_{\alpha\gamma\delta\nu}c_{\alpha\beta\delta\nu}c_{\alpha\beta\gamma\nu}).$$

Ist ferner

$$(8.) \qquad h = g^2,$$

so ist nach Formel (20.) § 3

$$(g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta})^2 = (gg_{\alpha,\beta,\gamma})^2$$

und nach Formel (18.) § 3

$$(\prod_{\nu} g_{\alpha\nu})^2 = (c^2g^3)^2.$$

Ich wähle nun die Vorzeichen der sieben Wurzeln $g_{01}, \ldots g_{07}$ willkürlich, dann das Vorzeichen von g so, dass

$$\prod_{\nu} g_{0\nu} = (j, k)(j, 0)(0, k)\varepsilon c^2g^3$$

ist, wo ε das durch die Gleichung (8.) § 3 eingeführte Vorzeichen ist. Nunmehr definire ich das Vorzeichen von $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 7)$ durch die Gleichung

$$g_{0\alpha}g_{0\beta}g_{\alpha\beta} = gg_{0,\alpha,\beta},$$

so dass

$$(9.) \qquad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$$

ist. Aus den Gleichungen (19.) § 3 und (2.) folgt

$$(g_{0\alpha}g_{0\beta}g_{0\gamma}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta})^2 = g^4 g_{0,\beta,\gamma}g_{0,\gamma,\alpha}g_{0,\alpha,\beta}g_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die Gleichungen

$$g_{0\beta}g_{0\gamma}g_{\beta\gamma} = g g_{0,\beta,\gamma}, \quad g_{0\gamma}g_{0\alpha}g_{\gamma\alpha} = g g_{0,\gamma,\alpha}, \quad g_{0\alpha}g_{0\beta}g_{\alpha\beta} = g g_{0,\alpha,\beta},$$

so erhält man

$$(10.) \qquad g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta} = g g_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

Ferner ist nach Formel (3.)

$$(\Pi_\nu g_{0\nu})(\Pi_\nu g_{1\nu}) = (\Pi_\lambda^7 g_{01}g_{0\lambda}g_{1\lambda}) : g_{01}^4 = g^6(\Pi_\lambda g_{0,1,\lambda}) : g_{01}^4 = (j, 01)(01, k)c^4 g^6.$$

und folglich

$$(\Pi_\nu g_{1\nu}) = (j, k)(j, 1)(1, k)\varepsilon c^2 g^3$$

und allgemein

$$(11.) \qquad \Pi_\nu g_{\alpha\nu} = (j, k)(j, \alpha)(\alpha, k)\varepsilon c^2 g^3.$$

Diese Formeln zeigen, dass bei der obigen Definition der 28 Wurzeln $g_{\alpha\beta}$ keiner der acht Indices 0, 1, ... 7 vor dem andern bevorzugt ist.

Der Ausdruck

$$(12.) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\alpha\delta}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}$$

wechselt das Vorzeichen, wenn man irgend zwei der vier Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unter einander vertauscht. Er lässt sich auf die Form

$$(13.) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\beta\gamma\delta, \alpha)(\gamma, \delta)(\delta, \beta)(\beta, \gamma)$$

bringen und steht zu dem Vorzeichen ε in der Beziehung

$$(14.) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \pm(\alpha\beta\gamma\delta)\varepsilon.$$

Hier ist, wie auch in allen folgenden Formeln, das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem $\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu\nu$ eine eigentliche oder uneigentliche Permutation der Zahlen 0, 1, ... 7 ist. Aus den Formeln (19.) § 3 und (5.) folgt

$$(c^2 c_{\alpha\beta\gamma\delta}^2 g^2 g_{\alpha\beta\gamma\delta})^2 = (g_{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}g_{\beta\delta}g_{\gamma\delta})^2.$$

Ich definire daher die Wurzel $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ durch die Gleichung *)

$$(15.) \qquad c^2 c_{\alpha\beta\gamma\delta}^2 g^2 g_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu}g_{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}g_{\beta\delta}g_{\gamma\delta}.$$

*) Die Grössen $g_{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind so gewählt, dass in den Relationen zwischen den Sigmafunctionen kein Vorzeichen mehr vorkommt, welches, wie (a, b), nur berechnet werden kann, wenn die Charakteristiken in bestimmter Weise gewählt sind. Dieser Forderung lässt sich nur durch die Einführung alternirender Ausdrücke genügen.

Mithin wechselt $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ das Vorzeichen, wenn man irgend zwei der Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unter einander vertauscht. Ich setze fest, dass sowohl $g_{\alpha\beta}$ als auch $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ gleich Null sind, falls zwei der Indices einander gleich sind. Nach der obigen Definition ist

$$\frac{g_{1234}}{g_{0567}} = \frac{\varepsilon_{0567} g_{12} g_{13} g_{14} g_{23} g_{24} g_{34}}{\varepsilon_{1234} g_{05} g_{06} g_{07} g_{56} g_{57} g_{67}} = \frac{\varepsilon_{0567} (g_{01} g_{02} g_{12})(g_{01} g_{03} g_{13})(g_{01} g_{04} g_{14})(g_{23} g_{24} g_{34})}{\varepsilon_{1234} g_{01}^2 (g_{01} g_{02} \cdots g_{07})(g_{56} g_{57} g_{67})}$$

$$= \frac{(j,k)(j,0)(0,k) \varepsilon \varepsilon_{1234} \varepsilon_{0567} g_{0,1,2} g_{0,1,3} g_{0,1,4} g_{2,3,4}}{c^2 g_{01}^2 g_{5,6,7}},$$

also weil nach Formel (4.)

$$g_{0,1,2} g_{0,1,3} g_{0,1,4} g_{2,3,4} = (j, 567)(567, k) c^2 g_{01}^2 g_{5,6,7}$$

und nach Formel (14.)

$$\varepsilon \varepsilon_{1234} \varepsilon_{0567} = (0567) = ((k, 0567))$$

ist,

$$g_{1234} = (j, k)(jk, 0567) g_{0567}$$

und allgemein

$$(16.) \qquad g_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm (j, k)(jk, \alpha\beta\gamma\delta) g_{\varkappa\lambda\mu\nu}.$$

Aus den Gleichungen (10.) und (15.) folgt

$$(17.) \qquad \begin{cases} c^2 c_{0123}^2 g_{01} g_{0123} = \varepsilon_{4567} g_{0,1,2} g_{0,1,3} g_{23}, \\ c^2 c_{0124}^2 g_{01} g_{0124} = -\varepsilon_{3567} g_{0,1,2} g_{0,1,4} g_{24} \end{cases}$$

und mithin

$$c^4 c_{0123}^2 c_{0124}^2 g_{01}^2 (g_{0123} g_{0124} g_{34}) = -\varepsilon_{4567} \varepsilon_{3567} g g_{0,1,2} (g_{0,1,2} g_{0,1,3} g_{0,1,4} g_{2,3,4}),$$

also nach (4.)

$$c^2 c_{0123}^2 c_{0124}^2 (g_{0123} g_{0124} g_{34}) = -(567, 34)(j, 567)(567, k) g g_{0,1,2} g_{5,6,7}.$$

Setzt man also

$$(18.) \qquad g_{\alpha\beta\gamma\varkappa} g_{\alpha\beta\gamma\lambda} g_{\varkappa\lambda} = g g_{\varkappa,\lambda,\alpha\beta\gamma},$$

so ist

$$(19.) \qquad c^2 c_{0123}^2 c_{0124}^2 g_{3,4,012} = -(567, 34)(j, 567)(567, k) g_{0,1,2} g_{5,6,7}$$

oder nach Formel (1.)

$$(20.) \qquad \begin{cases} (j, 567)(567, k)(012, 34) g_{3,4,012} \\ \qquad = c_{3401} c_{3402} c_{3412} c_{3456} c_{3457} c_{3467} = c_{0125} c_{0126} c_{0127} c_{5670} c_{5671} c_{5672}. \end{cases}$$

Dadurch ist auch für den Ausdruck (23.) § 3 ein bestimmtes Vorzeichen festgestellt.

Um die Rechnung mit den oben definirten 63 Wurzeln zu erleichtern,

erwähne ich noch die folgenden Formeln: Aus (1.) und (17.) folgt

$$(21.) \qquad \frac{g_{01}g_{0123}}{g_{23}} = (j, 23)(23, k)\varepsilon_{4567}\prod_{\lambda}^{7}(c_{012\lambda}c_{013\lambda}).$$

Dividirt man durch diese Gleichung die Gleichung (6.) für g_{01}^2, so erhält man

$$(22.) \qquad \frac{g_{01}g_{23}}{g_{0123}} = (j, k)(jk, 23)\varepsilon\varepsilon_{0123}cc_{0123}\left(\prod_{\mu,\nu}^{7}c_{01\mu\nu}\right).$$

Endlich ist

$$g_{0123}g_{0145} : g_{2345} = \frac{g_{23}g_{0123}}{g_{01}}\,\frac{g_{01}g_{0145}}{g_{45}} : \frac{g_{23}g_{2345}}{g_{45}}$$

und folglich nach (21.)

$$(23.) \qquad \frac{g_{0123}g_{0145}}{g_{2345}} = -(jk, 01)(01, 67)(23, 45)\varepsilon c_{0124}c_{0125}c_{0134}c_{0135}c_{0236}c_{0237}c_{1236}c_{1237}.$$

Damit sind auch die in den Wurzeln aus den Gleichungen (25.) § 3 auftretenden Vorzeichen sämmtlich bestimmt.

§ 5.

Darstellung von $q(u)$ und $q_a(u)$ durch die Sigmafunctionen.

Ich setze jetzt

$$(1.) \qquad c\sigma_{a\beta}(u) = g_{a\beta}\vartheta_{ka\beta}(u), \quad c\sigma_{a\beta\gamma\delta}(u) = g_{a\beta\gamma\delta}\vartheta_{ka\beta\gamma\delta}(u), \quad c\sigma(u) = \vartheta_k(u).$$

In diesen Formeln sind $\alpha\beta$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ nicht mehr als Summen von Charakteristiken, sondern nur als Indices anzusehen. Dann ist $\sigma_{a\beta}(u) = \sigma_{\beta a}(u)$, während $\sigma_{a\beta\gamma\delta}(u)$ das Vorzeichen wechselt, falls zwei der Indices vertauscht werden. Die Ausdrücke $\sigma_{a\beta}(u)$ und $\sigma_{a\beta\gamma\delta}(u)$ verschwinden identisch, falls zwei der Indices einander gleich sind. Nach Formel (4.) § 2 und (16.) § 4 ist

$$(2.) \qquad \sigma_{a\beta\gamma\delta}(u) = \pm\sigma_{\varkappa\lambda\mu\nu}(u).$$

Setzt man

$$(3.) \qquad \sigma_{a\beta\gamma\delta}(0) = f_{a\beta\gamma\delta} = \frac{c_{a\beta\gamma\delta}g_{a\beta\gamma\delta}}{c},$$

so ist daher auch

$$(4.) \qquad f_{a\beta\gamma\delta} = \pm f_{\varkappa\lambda\mu\nu}.$$

Nunmehr nehmen die Formeln (11.) und (15.) § 3 die Gestalt

$$(5.) \qquad \varphi(u) = \sum_{\lambda}(\sigma_{a\lambda}(u))^2$$

und

$$(6.) \qquad \varphi(u) = (\sigma_{\beta\gamma}(u))^2 + (\sigma_{\gamma a}(u))^2 + (\sigma_{a\beta}(u))^2 + \sum_{\lambda}(\sigma_{a\beta\gamma\lambda}(u))^2.$$

an, wo λ alle acht Indices durchläuft. Daher ist

$$(7.) \qquad \sum_{\lambda} f_{a\beta\gamma\lambda}^2 = 0.$$

Aus der Function $\varphi(u)$ leitet man durch Vermehrung von u um eine halbe Periode a und Unterdrückung des Factors $(\eta_a(u))^2$ eine Function $\varphi_a(u)$ her, die mit $(\vartheta(u))^2$ gleichändrig ist. Bis auf einen constanten Factor ist dieselbe vollständig durch die Bedingung bestimmt, dass ihre Entwicklung nach Potenzen von $u-a$ mit den Gliedern der vierten Dimension anfängt. Die constanten Factoren von $\varphi_{\alpha\beta}(u)$ und $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)$ wähle ich so, dass

$$(8.) \qquad \varphi_{\alpha\beta}(0) = 1, \quad \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}(0) = f^2_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

wird. Dann ist

$$(9.) \qquad \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = \varphi_{\varkappa\lambda\mu\nu}(u).$$

Nach Formel (16.) § 3 ist für $a = [0123]$

$$(10.) \qquad ((0b, a))\varphi_a(u) = \sum_\lambda{}^3_0 (kab\lambda, ab\lambda) h_{ab\lambda} (\vartheta_{kab\lambda}(u))^2 - \sum_\lambda{}^7_4 (kb\lambda, b\lambda) h_{b\lambda} (\vartheta_{kb\lambda}(u))^2.$$

Daher ist für $b = [0]$

$$(11.) \qquad \varphi_{0123} = \sigma^2_{0123} + \sigma^2_{23} + \sigma^2_{31} + \sigma^2_{12} - \sigma^2_{04} - \sigma^2_{05} - \sigma^2_{06} - \sigma^2_{07}$$

und für $b = [123]$

$$(12.) \qquad \varphi_{0123} = \sigma^2_{01} + \sigma^2_{02} + \sigma^2_{03} - \sigma^2_{1234} - \sigma^2_{1235} - \sigma^2_{1236} - \sigma^2_{1237}$$

und endlich für $b = [045]$

$$(13.) \qquad \varphi_{0123} = \sigma^2_{67} + \sigma^2_{0167} + \sigma^2_{0267} + \sigma^2_{0367} - \sigma^2_{05} - \sigma^2_{04} - \sigma^2_{0456} - \sigma^2_{0457}.$$

Aus den Gleichungen (5.) und (11.) folgt

$$(14.) \qquad \varphi + \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2_{\alpha\gamma} + \sigma^2_{\alpha\delta} + \sigma^2_{\beta\gamma} + \sigma^2_{\beta\delta} + \sigma^2_{\gamma\delta} + \sigma^2_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Zu einer andern Darstellung der Function $\varphi(u)$ gelangt man, indem man von der Relation ausgeht, welche Herr ***Prym*** die ***Riemann***sche Thetaformel genannt hat:

$$(15.) \qquad \begin{cases} 2^\varrho \vartheta_a(u+v')\vartheta_a(u-v')\vartheta_a(u'+v)\vartheta_a(u'-v) \\ \qquad = \sum_r (ar)\vartheta_r(u+v)\vartheta_r(u-v)\vartheta_r(u'+v')\vartheta_r(u'-v'), \end{cases}$$

wo r alle Charakteristiken durchläuft. (Vgl. dieses Journ. Bd. 89, S. 201. (5.)). Setzt man $\varrho = 3$, $a = k$, $u' = 0$, $v' = v_\lambda$ und ersetzt man r durch kr, so erhält man

$$8\vartheta_k(u+v_\lambda)\vartheta_k(u-v_\lambda)(\vartheta_k(v))^2 = \sum_r (r)\vartheta_{kr}(u+v)\vartheta_{kr}(u-v)\vartheta_{kr}(v_\lambda)\vartheta_{kr}(-v_\lambda).$$

Sind $v_0, v_1, \ldots v_7$ acht willkürliche Constanten, so kann man jede mit $(\vartheta(u))^2$ gleichändrige Function $\varphi(u)$ auf die Form

$$\varphi(u) = \sum_\lambda C_\lambda \vartheta_k(u+v_\lambda)\vartheta_k(u-v_\lambda)$$

bringen, wo die acht Grössen C_λ von u unabhängig sind. Für $u = r$ ergiebt

sich daraus (k, r) $h_r = \sum_\lambda C_\lambda \vartheta_{kr}(v_\lambda)\vartheta_{kr}(-v_\lambda)$. Multiplicirt man daher die oben entwickelte Gleichung mit C_λ und summirt nach λ, so findet man

$$8(\vartheta_k(v))^2\varphi(u) = \sum_r (kr, r)h_r\vartheta_{kr}(u+v)\vartheta_{kr}(u-v).$$

Vertauscht man u mit v, und verbindet man die neue Gleichung mit der ursprünglichen durch Subtraction und Addition, so erhält man

$$(16.)\quad 4((\sigma(v))^2\varphi(u)-(\sigma(u))^2\varphi(v)) = \mathfrak{S}_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}(u+v)\sigma_{\alpha\beta}(u-v)$$

und

$$(17.)\quad 4((\sigma(v))^2\varphi(u)+(\sigma(u))^2\varphi(v)) = \mathfrak{S}_{\alpha,\beta,\gamma}\sigma_{0\alpha\beta\gamma}(u+v)\sigma_{0\alpha\beta\gamma}(u-v)$$

und speciell für $v = u$

$$(18.)\quad 8(\sigma(u))^2\varphi(u) = \mathfrak{S}_{\alpha,\beta,\gamma} f_{0\alpha\beta\gamma}\sigma_{0\alpha\beta\gamma}(2u).$$

In diesen Summen ist der Index 0 nur scheinbar bevorzugt. Setzt man in der Gleichung (16.) $v = u+du$, so erhält man

$$(19.)\quad 8\sigma(u)(\varphi(u)d\sigma(u)-\tfrac{1}{2}\sigma(u)d\varphi(u)) = \mathfrak{S}_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}(2u)du_{\alpha\beta},$$

wo

$$(20.)\quad u_{\alpha\beta} = a'_{\alpha\beta}u'+a''_{\alpha\beta}u''+a'''_{\alpha\beta}u'''$$

das Aggregat der Glieder der ersten Dimension in der Entwicklung von $\sigma_{\alpha\beta}(u)$ ist.

Endlich kann man $\varphi(u)$ auch durch eine einzige ungerade Thetafunction und ihre logarithmischen Ableitungen zweiter Ordnung darstellen. (Vgl. dieses Journ. Bd. 96, S. 103.) Sei nämlich

$$\vartheta(u_1, u_2, u_3) = \sum_\alpha^3 a_\alpha u_\alpha+\tfrac{1}{6}\Sigma a_{\alpha\beta\gamma}u_\alpha u_\beta u_\gamma+\cdots$$

irgend eine der 28 ungeraden Functionen. Dann behaupte ich, dass sich $\varphi(u)$ aus den sieben Functionen

$$2t_{01} = (\vartheta(u))^2,\quad t_{02} = \vartheta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1^2}-\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1}\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1},$$

$$t_{03} = \vartheta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1\partial u_2}-\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1}\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2},\quad \ldots\quad t_{07} = \vartheta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_3^2}-\frac{\partial\vartheta}{\partial u_3}\frac{\partial\vartheta}{\partial u_3}$$

linear zusammensetzen, also auf die Form

$$\varphi(u) = \sum_\lambda^7 C_\lambda t_{0\lambda}$$

bringen lässt. Setzt man nämlich

$$t_{11} = 0,\quad t_{12} = a_1^2,\quad t_{13} = a_1a_2,\quad \ldots\quad t_{17} = a_3^2,$$

so muss zunächst $\sum_\lambda C_\lambda t_{1\lambda} = 0$ sein. Setzt man ferner $t_{\lambda 1} = -t_{1\lambda}$, und wenn

$$t_{0\alpha} = \vartheta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_\varkappa\partial u_\lambda}-\frac{\partial\vartheta}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial\vartheta}{\partial u_\lambda},\quad t_{0\beta} = \vartheta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_\mu\partial u_\nu}-\frac{\partial\vartheta}{\partial u_\mu}\frac{\partial\vartheta}{\partial u_\nu}$$

ist,

$$t_{\alpha\beta} = a_\varkappa a_{\lambda\mu\nu} + a_\lambda a_{\varkappa\mu\nu} - a_\mu a_{\nu\varkappa\lambda} - a_\nu a_{\mu\varkappa\lambda},$$

so muss auch $\sum_\lambda C_\lambda t_{\alpha\lambda} = 0$ sein. Man erhält also für die sieben Constanten C_λ sieben homogene lineare Gleichungen. Da aber $t_{\alpha\beta} = -t_{\beta\alpha}$ und $t_{\alpha\alpha} = 0$ ist, so verschwindet die Determinante dieser Gleichungen, und damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen. Setzt man noch $t_{00} = 0$ und $t_{\lambda 0} = -t_{0\lambda}$, so ist

$$(21.) \qquad C\varphi(u) = |t_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{4}} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots 7)$$

die aus den Elementen $t_{\alpha\beta}$ gebildete *Pfaff*sche Function.

§ 6.

Die Function $\psi_{\alpha\beta}(u)$.

Von ähnlicher Bedeutung, wie die gerade Function $\varphi(u)$, deren Entwicklung mit den Gliedern der vierten Dimension anfängt, sind diejenigen ungeraden Thetafunctionen zweiten Grades, deren Entwicklung mit den Gliedern der dritten Dimension beginnt. Für jede nicht verschwindende Charakteristik a giebt es (von einem constanten Factor abgesehen) nur eine solche Function, die ich mit $\psi_a(u)$ bezeichnen werde. Zerlegt man a auf irgend eine der sechs möglichen Arten in zwei ungerade Charakteristiken $k\alpha\beta$ und $k\gamma\delta$, so ist offenbar

$$(1.) \qquad C\psi_a(u) = \begin{vmatrix} \sigma_{\alpha\beta}\dfrac{\partial\sigma_{\gamma\delta}}{\partial u'} - \sigma_{\gamma\delta}\dfrac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial u'} & a'_{\alpha\beta} & a'_{\gamma\delta} \\ \sigma_{\alpha\beta}\dfrac{\partial\sigma_{\gamma\delta}}{\partial u''} - \sigma_{\gamma\delta}\dfrac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial u''} & a''_{\alpha\beta} & a''_{\gamma\delta} \\ \sigma_{\alpha\beta}\dfrac{\partial\sigma_{\gamma\delta}}{\partial u'''} - \sigma_{\gamma\delta}\dfrac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial u'''} & a'''_{\alpha\beta} & a'''_{\gamma\delta} \end{vmatrix}.$$

Die Function $\psi_a(u)$ ebenso wie jede mit ihr gleichändrige ungerade Function zweiten Grades verschwindet für die halbe Periode $u = b$, wenn a und b syzygetisch sind. Wenn aber a und b azygetisch sind, so ist $\psi_a(b)$, wie sich zeigen wird, stets von Null verschieden. Indem man für u eine halbe Periode setzt, die mit a azygetisch ist, kann man die Constante C mit Hülfe der in § 9 und § 12 entwickelten Formeln bestimmen und findet so

$$(2.) \qquad \left| \sigma_{\alpha\gamma}\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}}{\partial u^{(\nu)}} - \sigma_{\beta\gamma}\frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial u^{(\nu)}},\ a^{(\nu)}_{\alpha\gamma},\ a^{(\nu)}_{\beta\gamma} \right| = \frac{m}{f}\left(\prod_\lambda f_{\alpha\beta\gamma\lambda}\right)\psi_{\alpha\beta}(u),$$

und falls $\alpha\beta\gamma\delta$ vier verschiedene Indices sind,

$$(3.) \qquad \left| \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\sigma_{\gamma\delta}}{\partial u^{(\nu)}} - \sigma_{\gamma\delta}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial u^{(\nu)}},\ a^{(\nu)}_{\alpha\beta},\ a^{(\nu)}_{\gamma\delta} \right| = -m f^2_{\alpha\beta\gamma\delta} p_{\alpha\beta,\gamma\delta}\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u).$$

Setzt man in der Gleichung (6.) § 2 $a=[01]$, $v=[6]$, $w=[7]$ und vermehrt u um $[5]$, so erhält man

$$\sum_{\lambda}^{5}{}_{2}(\lambda, 567\lambda)\, c_{016\lambda}\, c_{017\lambda}\, \vartheta_{k015\lambda}(u)\, \vartheta_{k01567\lambda}(u) = 0$$

oder

$$\sum_{\lambda}^{4}{}_{2}(\lambda, 567\lambda)\, c_{015\lambda}\, c_{016\lambda}\, c_{017\lambda}\, \vartheta_{k01567\lambda}(u)\, \frac{\vartheta_{k015\lambda}(u)}{c_{015\lambda}} + c_{0156}\, c_{0157}\, c_{0167}\, \vartheta_{k01}(u)\, \frac{\vartheta_{k0167}(u)}{c_{0167}} = 0.$$

Mithin müssen in dem Ausdruck

$$\sum_{\lambda}^{4}{}_{2}(\lambda, 567\lambda)\, c_{015\lambda}\, c_{016\lambda}\, c_{017\lambda}\, \vartheta_{k01567\lambda}(u)\, \frac{\vartheta_{k567\lambda}(u)}{c_{567\lambda}} + c_{0156}\, c_{0157}\, c_{0167}\, \vartheta_{k01}(u)\, \frac{\vartheta_{k}(u)}{c}$$

die Glieder der ersten Dimension verschwinden, oder wenn man die Nenner wegschafft, in dem Ausdruck

$$(4.)\quad \begin{cases} (567, 2)\, g_{0,1,2}\, \vartheta_{k0134}(u)\, \vartheta_{k34}(u) + (567, 3)\, g_{0,1,3}\, \vartheta_{k0142}(u)\, \vartheta_{k42}(u) \\ + (567, 4)\, g_{0,1,4}\, \vartheta_{k0123}(u)\, \vartheta_{k23}(u) + (567, 234)\, g_{0,1,234}\, \vartheta_{k}(u)\, \vartheta_{k01}(u) \\ \qquad = \varepsilon_{01}(k567)\, c_{0234}\, c_{1234}\, \frac{g_{01}^{2}}{g}\, \psi_{01}(u). \end{cases}$$

Unter den ungeraden Thetafunctionen zweiten Grades von der Charakteristik $[01]$ giebt es genau vier linear unabhängige. Solche vier Functionen sind diejenigen, aus denen der Ausdruck $\psi_{01}(u)$ zusammengesetzt ist (so dass er nicht identisch verschwinden kann). Denn setzt man in einer zwischen ihnen angenommenen linearen Relation

$$C\vartheta_{k}(u)\vartheta_{k01}(u) + C_{2}\vartheta_{k0134}(u)\vartheta_{k34}(u) + C_{3}\vartheta_{k0142}(u)\vartheta_{k42}(u) + C_{4}\vartheta_{k0123}(u)\vartheta_{k23}(u) = 0$$

der Reihe nach $u=[0234]$, $[02]$, $[03]$, $[04]$, so erkennt man, dass die Coefficienten sämmtlich Null sein müssen. Es ist zu bemerken, dass die halbe Periode $[01]$ für diese vier Functionen und für jede aus ihnen linear zusammengesetzte Function eine Periode ist, d. h. dass sie sich bei Vermehrung von u um $[01]$ nur um einen Exponentialfactor ändern, und zwar jede um denselben. Daher besitzt $\psi_{01}(u)$ die Periode $[01]$, und ihre Entwicklung fängt folglich nicht nur an der Nullstelle, sondern auch an der Stelle $[01]$ mit den Gliedern der dritten Dimension an *). Nach Formel (4.) ist $\psi_{10}=-\psi_{01}$ und ebenso $\psi_{\beta\alpha}(u)=-\psi_{\alpha\beta}(u)$. Vermehrt man in der Function (4.) u um $[0234]$, so erhält man nach Unterdrückung eines Exponentialfactors eine Function mit der Charakteristik $[01]$, die bis auf einen constanten Factor durch die Bedingung bestimmt ist, dass ihre Entwicklung an der Stelle $[0234]$ (und folglich auch an der Stelle $[1234]$) mit den Glie-

*) Ist $c=0$, so ist $\psi_{\alpha\beta}(u)=C_{\alpha\beta}\vartheta_{k}(u)\vartheta_{k\alpha\beta}(u)$.

dern der dritten Dimension anfängt. Dieselbe ist

$$\sum_{\lambda}^{4}{}_{2} g_{0,1,\lambda}\vartheta_{k0\lambda}(u)\vartheta_{k1\lambda}(u)+g_{0,1,234}\vartheta_{k0234}(u)\vartheta_{k1234}(u)$$

oder nach (10.) und (18.) § 4 bis auf einen constanten Factor

$$(5.)\qquad \psi_{0234,1234} = \sum_{\lambda}^{4}{}_{2}\sigma_{0\lambda}\sigma_{1\lambda}+\sigma_{0234}\sigma_{1234}.$$

Dieselbe Eigenschaft hat aber auch die Function $\sum_{\lambda}^{7}{}_{5}\sigma_{0\lambda}\sigma_{1\lambda}+\sigma_{0567}\sigma_{1567}$, und sie kann sich daher von dem Ausdruck (5.) nur um einen constanten Factor unterscheiden. Setzt man $u=0$, so findet man diesen gleich -1. Folglich ist $\sum_{\lambda}^{7}{}_{2}\sigma_{0\lambda}\sigma_{1\lambda}=0$ und allgemein

$$(6.)\qquad \sum_{\lambda}\sigma_{\alpha\lambda}(u)\sigma_{\beta\lambda}(u) = 0.$$

Setzt man in der Gleichung (6.) § 2 $a=[01]$, $v=[2]$, $w=[3]$ und vermehrt man u um $[567]$, so erhält man

$$\sum_{\lambda}^{7}{}_{4}(\lambda, 567\lambda)c_{012\lambda}c_{013\lambda}\vartheta_{k4\lambda}(u)\vartheta_{k234\lambda}(u) = 0$$

oder

$$(4, 01)cc_{0124}c_{0134}\vartheta_{k23}(u)\frac{\vartheta_{k}(u)}{c}+\sum_{\lambda}^{7}{}_{5}(\lambda, 567\lambda)c_{012\lambda}c_{013\lambda}c_{234\lambda}\vartheta_{k4\lambda}(u)\frac{\vartheta_{k234\lambda}(u)}{c_{234\lambda}} = 0.$$

Folglich fängt die Entwicklung der Function

$$(4, 01)cc_{0124}c_{0134}\vartheta_{k23}(u)\frac{\vartheta_{k0123}(u)}{c_{0123}}+\sum_{\lambda}^{7}{}_{5}(\lambda, 567\lambda)c_{012\lambda}c_{013\lambda}c_{234\lambda}\vartheta_{k4\lambda}(u)\frac{\vartheta_{k014\lambda}(u)}{c_{014\lambda}}$$

mit den Gliedern der dritten Dimension an. Schafft man die Nenner weg, so erhält man

$$(7.)\quad \begin{cases} \varepsilon_{01}(k4)(23, 567)c_{0234}c_{1234}\dfrac{g_{01}^{2}}{g}\psi_{01}(u) = (234, 567)g_{0,1,4}\vartheta_{k23}(u)\vartheta_{k0123}(u) \\ \qquad\qquad +\sum_{\lambda}^{7}{}_{5}(234, \lambda)g_{0,1,23\lambda}\vartheta_{k4\lambda}(u)\vartheta_{k014\lambda}(u). \end{cases}$$

Dass der constante Factor hier in derselben Weise gewählt ist, wie in Gleichung (4.), erkennt man, indem man $u=[04]$ setzt. Vermehrt man u um $[0234]$, so findet man

$$(8.)\qquad \psi_{0234,1234} = \sigma_{04}\sigma_{14}-\sum_{\lambda}^{7}{}_{5}\sigma_{023\lambda}\sigma_{123\lambda}.$$

Dass der constante Factor hier ebenso gewählt ist, wie in Gleichung (5.), erkennt man, indem man $u=[23]$ setzt. Durch Vergleichung beider Formeln findet man

$$(9.)\qquad \sigma_{02}(u)\sigma_{12}(u)+\sigma_{03}(u)\sigma_{13}(u)+\sum_{\lambda}\sigma_{023\lambda}(u)\sigma_{123\lambda}(u) = 0.$$

Um zu einer andern Darstellung für die Function $\psi_{\alpha\beta}(u)$ zu gelan-

gen, gehe ich von der Formel (15.) § 5 aus, in welcher ich jede der vier Variabeln um $\frac{w}{2}$ vermehre. Dann lautet sie

$$(10.)\quad \begin{cases} & 8\vartheta_k(u+v'+w)\vartheta_k(u-v')\vartheta_k(u'+v+w)\vartheta_k(u'-v) \\ = & \sum_r (r)\vartheta_{kr}(u+v+w)\vartheta_{kr}(u-v)\vartheta_{kr}(u'+v'+w)\vartheta_{kr}(u'-v'). \end{cases}$$

Setzt man $v'=0$, $w=[01]$, $u'=[23]$, so findet man

$$(11.)\quad \begin{cases} & -8\vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u)\vartheta_{k23}(v)\vartheta_{k0123}(v) \\ = & \Sigma(r, 0123r)\vartheta_{kr23}(0)\vartheta_{kr0123}(0)\vartheta_{kr01}(u+v)\vartheta_{kr}(u-v). \end{cases}$$

Vertauscht man u mit v und subtrahirt man die neue Gleichung von der ursprünglichen, so erhält man

$$8(\vartheta_k(v)\vartheta_{k01}(v)\vartheta_{k23}(u)\vartheta_{k0123}(u)-\vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u)\vartheta_{k23}(v)\vartheta_{k0123}(v))$$
$$= \Sigma(r, 0123r)(1-(k)(kr))\vartheta_{kr23}(0)\vartheta_{kr0123}(0)\vartheta_{kr01}(u+v)\vartheta_{kr}(u-v).$$

In dieser Summe braucht r nur solche Charakteristiken zu durchlaufen, für welche $[kr23]$ und $[kr0123]$ gerade und $[kr]$ ungerade ist. Eine einfache Discussion zeigt, dass dies nur eintritt, wenn $r=[0\lambda]$ oder $r=[1\lambda]$ ist, und $\lambda=4, 5, 6, 7$ ist. Folglich ist

$$4(\vartheta_k(v)\vartheta_{k01}(v)\vartheta_{k23}(u)\vartheta_{k0123}(u)-\vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u)\vartheta_{k23}(v)\vartheta_{k0123}(v))$$
$$= \sum_\lambda^7(1, 0\lambda)(\lambda, 023\lambda)c_{023\lambda}c_{123\lambda}(\vartheta_{k0\lambda}(u+v)\vartheta_{k1\lambda}(u-v)-\vartheta_{k1\lambda}(u+v)\vartheta_{k0\lambda}(u-v)).$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $(567, 4)g_{04}g_{14}$, und bilde dann aus derselben zwei andere durch cyklische Vertauschung der Indices 2, 3, 4. Addirt man die drei so erhaltenen Gleichungen und dividirt dann durch $\varepsilon_{01}(k567)c_{0234}c_{1234}$, so erhält man nach (4.)

$$4g_{01}(\vartheta_k(v)\vartheta_{k01}(v)\psi_{01}(u)-\vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u)\psi_{01}(v))$$
$$= \sum_\lambda^7 C_\lambda(\vartheta_{k0\lambda}(u+v)\vartheta_{k1\lambda}(u-v)-\vartheta_{k1\lambda}(u+v)\vartheta_{k0\lambda}(u-v)).$$

Für $\lambda=2, 3, 4$ ist $C_\lambda=g_{0\lambda}g_{1\lambda}$. Ferner ist

$$-(5, 67)c_{0567}c_{1567}C_5 = \sum_\lambda^4(\lambda, 67)g_{0\lambda}g_{1\lambda}c_{0\lambda67}c_{1\lambda67}.$$

Nach Formel (6.) ist aber

$$\Sigma g_{0\lambda}g_{1\lambda}\vartheta_{k0\lambda}(u)\vartheta_{k1\lambda}(u) = 0,$$

und mithin für $u=[67]$

$$\sum_\lambda^5(\lambda, 67)g_{0\lambda}g_{1\lambda}c_{0\lambda67}c_{1\lambda67} = 0,$$

also $C_5=g_{05}g_{15}$. Folglich ist

$$(12.)\quad \begin{cases} & 4(\sigma(v)\sigma_{\alpha\beta}(v)\psi_{\alpha\beta}(u)-\sigma(u)\sigma_{\alpha\beta}(u)\psi_{\alpha\beta}(v)) \\ = & \sum_\lambda(\sigma_{\alpha\lambda}(u+v)\sigma_{\beta\lambda}(u-v)-\sigma_{\beta\lambda}(u+v)\sigma_{\alpha\lambda}(u-v)). \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich für $v = du$

$$2\psi_{\alpha\beta}(u)du_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda}(\sigma_{\beta\lambda}(u)d\sigma_{\alpha\lambda}(u) - \sigma_{\alpha\lambda}(u)d\sigma_{\beta\lambda}(u)),$$

also nach Formel (6.)

$$(13.) \qquad \psi_{\alpha\beta}(u)du_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda}\sigma_{\beta\lambda}(u)d\sigma_{\alpha\lambda}(u) = -\sum_{\lambda}\sigma_{\alpha\lambda}(u)d\sigma_{\beta\lambda}(u).$$

Wenn man zu der Gleichung (11.) diejenige addirt, welche durch Vertauschung von u mit v aus ihr hervorgeht, so erhält man, falls man r durch $[1r]$ ersetzt,

$$(14.) \quad \begin{cases} -8(\vartheta_k(v)\vartheta_{k01}(v)\vartheta_{k23}(u)\vartheta_{k0123}(u) + \vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u)\vartheta_{k23}(v)\vartheta_{k0123}(v)) \\ = \Sigma(1, 0r)(r, 023r)(1+(k)(kr1))\vartheta_{kr023}(0)\vartheta_{kr123}(0)\vartheta_{kr0}(u+v)\vartheta_{kr1}(u-v). \end{cases}$$

Hier durchläuft r nur solche Charakteristiken, für welche $[kr023]$, $[kr123]$ und $[kr1]$, und folglich auch $[kr0]$ gerade ist. Mithin ist $r = [\alpha\beta\gamma]$, wo keiner der drei Indices gleich 0 oder 1 ist.

Ersetzt man ferner in der Formel (10.) $[r]$ durch $[1r]$, und setzt man $u' = 0$, $v' = 0$, $w = [01]$, so erhält man

$$8\vartheta_k(v)\vartheta_{k01}(v)\vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u) = \sum_{r}(1r, 0r)\vartheta_{kr0}(0)\vartheta_{kr1}(0)\vartheta_{kr0}(u+v)\vartheta_{kr1}(u-v),$$

und wenn man u mit v vertauscht und die neue Gleichung zur ursprünglichen addirt,

$$(15.) \quad \begin{cases} 16\,\vartheta_k(v)\vartheta_{k01}(v)\vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u) \\ = \sum_{r}(1r, 0r)(1+(k)(kr1))\vartheta_{kr0}(0)\vartheta_{kr1}(0)\vartheta_{kr0}(u+v)\vartheta_{kr1}(u-v). \end{cases}$$

Auch hier kann nur $[r] = [\alpha\beta\gamma]$ sein, wo keiner der drei Indices gleich 0 oder 1 ist.

Man multiplicire nun die Gleichung (14.) mit $-(567, 4)g_{04}g_{14}$ und bilde daraus zwei andere Gleichungen durch cyklische Permutation der Indices 2, 3, 4. Man multiplicire die Gleichung (15.) mit $(567, 234)g_{0234}g_{1234}$, addire die vier so erhaltenen Gleichungen und dividire die Summe durch $2\varepsilon_{01}(k567)c_{0234}c_{1234}$. Nach Formel (4.) erhält man dann

$$4g_{01}(\vartheta_k(v)\vartheta_{k01}(v)\psi_{01}(u) + \vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u)\psi_{01}(v)) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}\vartheta_{k0\alpha\beta\gamma}(u+v)\vartheta_{k1\alpha\beta\gamma}(u-v),$$

wo

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{01}(k567)(1\alpha\beta\gamma, 0\alpha\beta\gamma)c_{0234}c_{1234}C_{\alpha\beta\gamma} &= (567, 2)(\alpha\beta\gamma, 34)g_{02}g_{12}\vartheta_{k034\alpha\beta\gamma}(0)\vartheta_{k134\alpha\beta\gamma}(0) \\ &+ (567, 3)(\alpha\beta\gamma, 24)g_{03}g_{13}\vartheta_{k024\alpha\beta\gamma}(0)\vartheta_{k124\alpha\beta\gamma}(0) \\ &+ (567, 4)(\alpha\beta\gamma, 23)g_{04}g_{14}\vartheta_{k023\alpha\beta\gamma}(0)\vartheta_{k123\alpha\beta\gamma}(0) \\ &- (567, 234)g_{0234}g_{1234}\vartheta_{k0\alpha\beta\gamma}(0)\vartheta_{k1\alpha\beta\gamma}(0). \end{aligned}$$

Daher ist $C_{234} = g_{0234}g_{1234}$ und

$$\begin{aligned} -(5, 01)(235, 45)c_{0234}c_{1234}C_{235} &= (2, 45)g_{02}g_{12}c_{0245}c_{1245} \\ &+ (3, 45)g_{03}g_{13}c_{0345}c_{1345} + (4, 01)(234, 45)g_{0234}g_{1234}c_{0235}c_{1235}. \end{aligned}$$

Setzt man aber in der Formel (9.) $u = [45]$, so erhält man

$$(2, 45)g_{02}g_{12}c_{0245}c_{1245}+(3, 45)g_{03}g_{13}c_{0345}c_{1345}$$
$$+(4, 01)(234, 45)g_{0234}g_{1234}c_{0235}c_{1235}+(5, 01)(235, 45)g_{0235}g_{1235}c_{0234}c_{1234} = 0,$$

und folglich ist $C_{235} = g_{0235}g_{1235}$. In derselben Weise findet man $C_{\alpha\beta\gamma} = g_{0\alpha\beta\gamma}g_{1\alpha\beta\gamma}$, falls zwei der Indices α, β, γ gleich 2, 3, 4 sind. Dass diese Gleichung aber auch richtig ist, falls keiner oder nur einer jener Indices gleich 2, 3, 4 ist, erkennt man am einfachsten, indem man in der entwickelten Gleichung u um $[01]$ vermehrt, und dann die Relation (4.) § 2 benutzt. So findet man, dass z. B. $C_{467} = -(jk, 01)C_{235}$ und $C_{567} = -(jk, 01)C_{234}$ ist. Folglich ergiebt sich die Gleichung

$$(16.)\quad 4(\sigma(v)\sigma_{\varkappa\lambda}(v)\psi_{\varkappa\lambda}(u)+\sigma(u)\sigma_{\varkappa\lambda}(u)\psi_{\varkappa\lambda}(v)) = \mathfrak{S}_{\alpha,\beta,\gamma}\sigma_{\varkappa\alpha\beta\gamma}(u+v)\sigma_{\lambda\alpha\beta\gamma}(u-v).$$

Man kann dieselbe nach (4.) § 2 auch so schreiben:

$$4(\sigma(v)\sigma_{\varkappa\lambda}(v)\psi_{\varkappa\lambda}(u)+\sigma(u)\sigma_{\varkappa\lambda}(u)\psi_{\varkappa\lambda}(v))$$
$$= \mathfrak{S}'_{\alpha,\beta,\gamma}(\sigma_{\varkappa\alpha\beta\gamma}(u+v)\sigma_{\lambda\alpha\beta\gamma}(u-v)-\sigma_{\lambda\alpha\beta\gamma}(u+v)\sigma_{\varkappa\alpha\beta\gamma}(u-v)).$$

Durch den Strich beim Summenzeichen wird hier angedeutet, dass für α, β, γ von je zwei Systemen von drei Indices, die mit $\varkappa$, λ zusammen alle acht Indices bilden, nur das eine zu setzen ist. Speciell ist für $u = v$

$$(17.)\quad 8\sigma(u)\sigma_{\varkappa\lambda}(u)\psi_{\varkappa\lambda}(u) = \mathfrak{S}_{\alpha,\beta,\gamma}f_{\lambda\alpha\beta\gamma}\sigma_{\varkappa\alpha\beta\gamma}(2u) = -\mathfrak{S}_{\alpha,\beta,\gamma}f_{\varkappa\alpha\beta\gamma}\sigma_{\lambda\alpha\beta\gamma}(2u).$$

Die Formeln (12.), (13.), (16.) und (17.) zeigen, dass $\psi_{\varkappa\lambda}$ zu jedem der sechs von $\varkappa$, λ verschiedenen Indices in derselben Beziehung steht, was aus den unsymmetrischen Gleichungen (4.) und (7.) nicht hervorgeht. Aus den Formeln (6.) und (13.) ergiebt sich noch die Relation

$$(18.)\quad \varphi(u)d\sigma_{\alpha\beta}(u)-\tfrac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}(u)d\varphi(u) = \sum_{\lambda}\sigma_{\alpha\lambda}(u)\psi_{\beta\lambda}(u)du_{\beta\lambda} = \sum_{\lambda}\sigma_{\beta\lambda}(u)\psi_{\alpha\lambda}(u)du_{\alpha\lambda}.$$

§ 7.

Die Function $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)$.

Setzt man in der Formel (6.) § 2 $a = [0]$, $v = [13]$, $w = [23]$, so erhält man

$$\sum_{\lambda}{}^{7}_{4}(\lambda, \lambda 123)c_{013\lambda}c_{023\lambda}\vartheta_{k01\lambda}(u)\vartheta_{k012\lambda}(u) = 0.$$

In der Function

$$\sum_{\lambda}{}^{7}_{4}(\lambda, \lambda 123)c_{012\lambda}c_{013\lambda}c_{023\lambda}\vartheta_{k01\lambda}(u)\frac{\vartheta_{k123\lambda}}{c_{123\lambda}}$$

verschwinden daher die Glieder der ersten Dimension. Schafft man die Nenner weg, so erhält man $\Sigma g_{0,\lambda,123}\vartheta_{k01\lambda}(u)\vartheta_{k123\lambda}(u)$ oder bis auf einen constanten Factor $\psi_{0123}(u) = \sum_{\lambda}\sigma_{0\lambda}(u)\sigma_{\lambda 123}(u)$. Die Thetafunction zweiten Grades

mit der Charakteristik $[\alpha\beta\gamma\delta]$

$$(1.) \qquad \psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = \sum_{\lambda} \sigma_{\alpha\lambda}(u)\sigma_{\lambda\beta\gamma\delta}(u).$$

ist also bis auf einen constanten Factor durch die Bedingung bestimmt, dass ihre Entwicklung nach Potenzen von u mit den Gliedern der dritten Dimension anfängt. Daher kann sich $\psi_{4567} = \Sigma\sigma_{4\lambda}\sigma_{\lambda 567}$ von ψ_{0123} nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Setzt man $u = [04]$, so findet man denselben gleich -1. Ebenso ist allgemein (vgl. Formel (14.) § 4)

$$(2.) \qquad \psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = \mp\psi_{\varkappa\lambda\mu\nu}(u).$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ das Zeichen wechselt, falls man zwei der Indices unter einander vertauscht. Ich setze fest, dass $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ebenso wie $\psi_{\alpha\beta}$ verschwindet, falls die Indices nicht alle von einander verschieden sind. Aus den Gleichungen $\psi_{0123} = -\psi_{1023}$ und $\psi_{0123} = -\psi_{4567}$ folgt

$$(3.) \qquad \sum_{\lambda}{}_{4}^{7}(\sigma_{0\lambda}\sigma_{\lambda 123} + \sigma_{1\lambda}\sigma_{\lambda 023}) = 0$$

und

$$(4.) \qquad \sum_{\lambda}{}_{5}^{7}\sigma_{0\lambda}\sigma_{\lambda 123} + \sum_{\lambda}{}_{1}^{3}\sigma_{4\lambda}\sigma_{\lambda 567} = 0.$$

Ich knüpfe hieran noch die Herleitung zweier fünfgliedrigen Relationen zweiten Grades. Nach Formel (9.) § 6 ist

$$\sum_{\varkappa}\sigma_{\varkappa\lambda 12}\sigma_{012\varkappa} = \sigma_{01}\sigma_{1\lambda} + \sigma_{02}\sigma_{2\lambda}$$

und mithin

$$\sum_{\varkappa,\lambda}\sigma_{\varkappa\lambda 12}\sigma_{012\varkappa}\sigma_{012\lambda} = \sigma_{01}\left(\sum_{\lambda}\sigma_{1\lambda}\sigma_{012\lambda}\right) + \sigma_{02}\left(\sum_{\lambda}\sigma_{2\lambda}\sigma_{012\lambda}\right).$$

Da aber $\sigma_{\varkappa\lambda 12} = -\sigma_{\lambda\varkappa 12}$ ist, so heben sich in der Summe linker Hand die Glieder paarweise auf, und folglich ist

$$\sigma_{10}\sigma_{12}\left(\Sigma\sigma_{1\lambda}\sigma_{012\lambda}\right) + \sigma_{20}\sigma_{21}\left(\Sigma\sigma_{2\lambda}\sigma_{012\lambda}\right) = 0.$$

Vertauscht man 0 mit 1 und 0 mit 2 und addirt die beiden so erhaltenen Gleichungen zu der ursprünglichen, so erhält man $\Sigma\sigma_{0\lambda}\sigma_{012\lambda} = 0$ und allgemein

$$(5.) \qquad \sum_{\lambda}\sigma_{\alpha\lambda}(u)\sigma_{\lambda\alpha\beta\gamma}(u) = 0.$$

Dieser Formel zufolge gilt die Gleichung (1.) auch dann, wenn die Indices α, β, γ, δ nicht alle unter einander verschieden sind. Nach Formel (2.) § 5 ist $\sigma_{0126} = -\sigma_{3457}$ und $\sigma_{0127} = \sigma_{3456}$ und folglich

$$(6.) \qquad \sum_{\lambda}\sigma_{012\lambda}(u)\sigma_{345\lambda}(u) = 0.$$

Aus der Gleichung $\psi_{2345} = \psi_{1067}$ ergiebt sich

$$\sigma_{20}\sigma_{0345} + \sum_{\varkappa}{}_{5}^{7}\sigma_{2\varkappa}\sigma_{34\varkappa 5} = -\sigma_{13}\sigma_{1245} + \sigma_{14}\sigma_{1235} - \sigma_{15}\sigma_{1234}$$

und allgemein für $\lambda = 5, 6, 7$

$$\sigma_{02}\sigma_{034\lambda} + \sum_{\varkappa}{}_{5}^{7}\sigma_{2\varkappa}\sigma_{34\varkappa\lambda} = -\sigma_{13}\sigma_{124\lambda} + \sigma_{14}\sigma_{123\lambda} - \sigma_{1234}\sigma_{1\lambda}.$$

Diese Formel gilt auch für $\lambda = 3, 4$, und wenn man sie mit $\sigma_{012\lambda}$ multiplicirt, für jeden Werth von λ. Summirt man nach λ, so erhält man nach (5.)

$$\sigma_{02}(\Sigma\sigma_{012\lambda}\sigma_{034\lambda})+\sum_{\varkappa}^{7}\sigma_{2\varkappa}(\sum_{\lambda}\sigma_{012\lambda}\sigma_{34\varkappa\lambda}) = -\sigma_{13}(\Sigma\sigma_{012\lambda}\sigma_{124\lambda})+\sigma_{14}(\Sigma\sigma_{012\lambda}\sigma_{123\lambda}).$$

Nach Formel (6.) ist $\sum_{\lambda}\sigma_{012\lambda}\sigma_{34\varkappa\lambda} = 0$ für $\varkappa = 5, 6, 7$. Nach Gleichung (9.) § 6 ergiebt sich daher

$$\sigma_{02}(\Sigma\sigma_{012\lambda}\sigma_{034\lambda}) = \sigma_{13}(\sigma_{01}\sigma_{41}+\sigma_{02}\sigma_{42})-\sigma_{14}(\sigma_{01}\sigma_{31}+\sigma_{02}\sigma_{32}),$$

und folglich ist

$$(7.)\qquad \sum_{\lambda}\sigma_{012\lambda}(u)\sigma_{034\lambda}(u) = \sigma_{13}(u)\sigma_{24}(u)-\sigma_{14}(u)\sigma_{23}(u),$$

wo links der Index 0 nur scheinbar bevorzugt ist und ohne Aenderung der Summe durch 5, 6 oder 7 ersetzt werden kann. Endlich will ich noch erwähnen, dass die Function

$$(8.)\quad \psi_{\alpha\beta\varkappa\lambda,\gamma\delta\varkappa\lambda}(u) = \sigma_{\alpha\varkappa}(u)\sigma_{\varkappa\beta\gamma\delta}(u)+\sigma_{\beta\varkappa}(u)\sigma_{\varkappa\alpha\delta\gamma}(u)-\sigma_{\gamma\lambda}(u)\sigma_{\lambda\delta\alpha\beta}(u)-\sigma_{\delta\lambda}(u)\sigma_{\lambda\gamma\beta\alpha}(u)$$

mit der Charakteristik $[\alpha\beta\gamma\delta]$ bis auf einen constanten Factor durch die Bedingung bestimmt ist, dass ihre Entwicklung an der Stelle $[\alpha\beta\varkappa\lambda]$ (und folglich auch an der Stelle $[\gamma\delta\varkappa\lambda]$) mit den Gliedern der dritten Dimension anfängt. Dieselbe wechselt das Zeichen, wenn man α mit β (oder γ mit δ) vertauscht, und hat die Eigenschaften

$$(9.)\qquad \psi_{\alpha\beta\varkappa\lambda,\gamma\delta\varkappa\lambda} = \psi_{\alpha\beta\lambda\varkappa,\gamma\delta\lambda\varkappa} = -\psi_{\gamma\delta\varkappa\lambda,\alpha\beta\varkappa\lambda} = \mp\psi_{\varkappa\lambda\alpha\beta,\mu\nu\alpha\beta},$$

aus denen sich acht verschiedene Darstellungen für jene Function ergeben.

§ 8.

Determinanten, deren Elemente ungerade Sigmafunctionen sind.

Ich gehe nun dazu über, die Bedeutung des entwickelten Formelsystems darzulegen. Dabei gehe ich aus von den vier Formeln

$$(1.)\qquad \begin{cases} \Sigma\sigma_{012\lambda}^2 = \varphi-\sigma_{12}^2-\sigma_{20}^2-\sigma_{01}^2, \\ \Sigma\sigma_{012\lambda}\sigma_{013\lambda} = -\sigma_{02}\sigma_{03}-\sigma_{12}\sigma_{13}, \\ \Sigma\sigma_{012\lambda}\sigma_{034\lambda} = \sigma_{13}\sigma_{24}-\sigma_{14}\sigma_{23}, \\ \Sigma\sigma_{012\lambda}\sigma_{345\lambda} = 0. \end{cases}$$

Jede der vier Determinanten

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\varphi} & \sigma_{01} & \sigma_{02} \\ \sigma_{10} & \sqrt{\varphi} & \sigma_{12} \\ \sigma_{20} & \sigma_{21} & \sqrt{\varphi} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi} & \sigma_{01} & \sigma_{03} \\ \sigma_{10} & \sqrt{\varphi} & \sigma_{13} \\ \sigma_{20} & \sigma_{21} & \sigma_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi} & \sigma_{03} & \sigma_{04} \\ \sigma_{10} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{20} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sigma_{03} & \sigma_{04} & \sigma_{05} \\ \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} \\ \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} \end{vmatrix}$$

lässt sich auf die Form $A+B\sqrt{\varphi}$ bringen, wo A und B eindeutige Functionen sind. Die Coefficienten B von $\sqrt{\varphi}$ sind der Reihe nach gleich

$$\varphi-\sigma_{12}^2-\sigma_{20}^2-\sigma_{01}^2, \quad -\sigma_{02}\sigma_{03}-\sigma_{12}\sigma_{13}, \quad \sigma_{13}\sigma_{24}-\sigma_{14}\sigma_{23}, \quad 0,$$

also gleich den rechten Seiten jener vier Formeln. Ich setze

$$(2.) \qquad s_{\alpha\alpha}=s=\sqrt{\varphi(u)}, \quad s_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\beta}(u),$$

und bezeichne z. B. die Determinante dritten Grades

$$|s_{\nu\nu'}|^{\binom{\nu=\alpha,\ \beta,\ \gamma}{\nu'=\alpha',\ \beta',\ \gamma'}}$$

kurz mit $s\binom{\alpha'\ \beta'\ \gamma'}{\alpha\ \beta\ \gamma}$. Ist $C=A+Bs$, wo A und B eindeutige Functionen sind, so werde ich den Theil A mit dem Symbol $\mathfrak{A}(C)$, den Theil B mit $\mathfrak{B}(C)$ bezeichnen. Dann lassen sich jene Formeln dahin zusammenfassen, dass

$$(3.) \qquad \sum_\lambda \sigma_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u)\sigma_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u) = \mathfrak{B}s\binom{\alpha'\ \beta'\ \gamma'}{\alpha\ \beta\ \gamma}$$

ist. Der Relation (1.) § 7 zufolge ist

$$\sum_\lambda \sigma_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}\psi_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \sum_\varkappa \sigma_{\alpha\varkappa}\Big(\sum_\lambda \sigma_{\varkappa\beta\gamma\lambda}\sigma_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}\Big)$$

$$= \sum_\varkappa \sigma_{\varkappa\alpha}\mathfrak{B}\begin{vmatrix} s_{\varkappa\alpha'} & s_{\beta\alpha'} & s_{\gamma\alpha'} \\ s_{\varkappa\beta'} & s_{\beta\beta'} & s_{\gamma\beta'} \\ s_{\varkappa\gamma'} & s_{\beta\gamma'} & s_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} = \mathfrak{B}\begin{vmatrix} \left(\sum_\varkappa \sigma_{\varkappa\alpha}s_{\varkappa\alpha'}\right) & s_{\beta\alpha'} & s_{\gamma\alpha'} \\ \left(\sum_\varkappa \sigma_{\varkappa\alpha}s_{\varkappa\beta'}\right) & s_{\beta\beta'} & s_{\gamma\beta'} \\ \left(\sum_\varkappa \sigma_{\varkappa\alpha}s_{\varkappa\gamma'}\right) & s_{\beta\gamma'} & s_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix}.$$

Nach Formel (6.) § 6 ist aber $\sum_\varkappa \sigma_{\varkappa\alpha}s_{\varkappa\beta}=ss_{\alpha\beta}$ (auch wenn $\alpha=\beta$ ist), und folglich ist

$$(4.) \qquad \sum_\lambda \sigma_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u)\psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u) = \mathfrak{A}s\binom{\alpha'\ \beta'\ \gamma'}{\alpha\ \beta\ \gamma}.$$

Beiläufig ergiebt sich daraus die Gleichung

$$(5.) \qquad \sum_\lambda \sigma_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u)\psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u) = \sum_\lambda \sigma_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u)\psi_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u).$$

Z. B. ist

$$(6.) \qquad \begin{vmatrix} \sigma_{03} & \sigma_{04} & \sigma_{05} \\ \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} \\ \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} \end{vmatrix} = \psi_{0126}\sigma_{0127}-\psi_{0127}\sigma_{0126}.$$

Ich setze jetzt

$$(7.) \qquad F_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = \psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)+\sqrt{\varphi(u)}\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(u),$$

also nach Formel (2.) § 5 und (2.) § 7

$$(8.) \qquad \pm F_{\varkappa\lambda\mu\nu}(u) = -\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)+\sqrt{\varphi(u)}\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(u).$$

Addirt man dann die Formel (3.), mit s multiplicirt, zu der Formel (4.), so erhält man

$$(9.) \qquad \sum_{\lambda} \sigma_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u) F_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u) = s\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

und weil $\sqrt{\varphi}$ irrational ist, so folgen aus dieser Gleichung wieder umgekehrt jene beiden Formeln. Ferner ist

$$\sum_{\lambda} \psi_{\lambda\alpha\beta\gamma}\psi_{\lambda\alpha'\beta'\gamma'} = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \sigma_{\lambda\mu}\sigma_{\mu\alpha\beta\gamma}\sigma_{\lambda\nu}\sigma_{\nu\alpha'\beta'\gamma'}.$$

Nun ist aber $\sum_{\lambda} \sigma_{\lambda\mu}\sigma_{\lambda\nu} = 0$ oder φ, je nachdem μ von ν verschieden ist oder nicht, und mithin ist

$$(10.) \qquad \sum_{\lambda} \psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u)\psi_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u) = \varphi(u) \sum_{\lambda} \sigma_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u)\sigma_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u).$$

Aus den Gleichungen (9.) und (10.) folgt

$$(11.) \qquad \sum_{\lambda} \psi_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u) F_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u) = s.s\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Die beiden Relationen (9.) und (11.) werden vollständig ersetzt durch die beiden Gleichungen

$$(12.) \qquad \sum_{\lambda} F_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u) F_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u) = 2s.s\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

und

$$\sum_{\lambda} F_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(\psi_{\alpha\beta\gamma\lambda} - s\sigma_{\alpha\beta\gamma\lambda}) = 0.$$

Letztere kann man mit Hülfe der Beziehung (8.) auf die Gestalt bringen

$$(13.) \qquad F_{\alpha\beta\gamma\varkappa}F_{\lambda\mu\nu\varrho} + F_{\alpha\beta\gamma\lambda}F_{\mu\nu\varrho\varkappa} + F_{\alpha\beta\gamma\mu}F_{\nu\varrho\varkappa\lambda} + F_{\alpha\beta\gamma\nu}F_{\varrho\varkappa\lambda\mu} + F_{\alpha\beta\gamma\varrho}F_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0.$$

und sie gilt, gleichgültig ob die Indices verschieden sind oder nicht. Aus den beiden Gleichungen (12.) und (13.) ergeben sich wieder die vier ursprünglichen Gleichungen (3.), (4.), (5.) und (10.).

Nach Formel (1.) § 7 ist

$$\sum_{\varkappa} \sigma_{\alpha\varkappa}\psi_{\varkappa\beta\gamma\delta} = \sum_{\varkappa,\lambda} \sigma_{\alpha\varkappa}\sigma_{\varkappa\lambda}\sigma_{\lambda\beta\gamma\delta},$$

also nach Formel (5.) § 5 und (6.) § 6

$$(14.) \qquad \sum_{\lambda} \sigma_{\alpha\lambda}(u)\psi_{\lambda\beta\gamma\delta}(u) = \varphi(u)\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(u),$$

und folglich nach Gleichung (1.) § 7

$$(15.) \qquad \sum_{\lambda} s_{\alpha\lambda}F_{\lambda\beta\gamma\delta} = 2sF_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Diese Gleichungen gelten ganz allgemein, ob die Indices verschieden sind oder nicht. Subtrahirt man von der Formel (14.) die mit s multiplicirte

Formel (1.) § 7, so findet man die Gleichung

$$\sum_{\lambda} s_{\alpha\lambda}(\psi_{\lambda\beta\gamma\delta} - s\sigma_{\lambda\beta\gamma\delta}) = 0,$$

die man mit Hülfe der Beziehung (8.) auf die Form bringen kann

$$(16.) \quad s_{\alpha\varkappa}F_{\lambda\mu\nu\varrho} + s_{\alpha\lambda}F_{\mu\nu\varrho\varkappa} + s_{\alpha\mu}F_{\nu\varrho\varkappa\lambda} + s_{\alpha\nu}F_{\varrho\varkappa\lambda\mu} + s_{\alpha\varrho}F_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0.$$

Entwickelt man die Determinante vierten Grades $s\binom{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta}$ nach den in der ersten Colonne stehenden Elementen, so erhält man nach Formel (12.)

$$\frac{1}{2s}\sum_{\lambda} F_{\beta'\gamma'\delta'\lambda}(s_{\alpha'\alpha}F_{\beta\gamma\delta\lambda} - s_{\alpha'\beta}F_{\alpha\gamma\delta\lambda} + s_{\alpha'\gamma}F_{\alpha\beta\delta\lambda} - s_{\alpha'\delta}F_{\alpha\beta\gamma\lambda}).$$

Nach (16.) und (15.) ist dieser Ausdruck gleich

$$-\frac{1}{2s}\sum_{\lambda} F_{\beta'\gamma'\delta'\lambda}s_{\alpha'\lambda}F_{\alpha\beta\gamma\delta} = F_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}.$$

Demnach ergiebt sich die Gleichung

$$(17.) \quad s\binom{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta} = F_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}.$$

Z. B. ist

$$(18.) \quad \sigma\binom{0\,1\,2\,3}{4\,5\,6\,7} = \sigma_{0123}^2\varphi - \psi_{0123}^2$$

und

$$(19.) \quad \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi} & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma} & \sigma_{\alpha\delta} \\ \sigma_{\beta\alpha} & \sqrt{\varphi} & \sigma_{\beta\gamma} & \sigma_{\beta\delta} \\ \sigma_{\gamma\alpha} & \sigma_{\gamma\beta} & \sqrt{\varphi} & \sigma_{\gamma\delta} \\ \sigma_{\delta\alpha} & \sigma_{\delta\beta} & \sigma_{\delta\gamma} & \sqrt{\varphi} \end{vmatrix} = (\psi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \sqrt{\varphi}\,\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta})^2.$$

Vergleicht man hier auf beiden Seiten die Coefficienten von $\sqrt{\varphi}$, so erhält man

$$(20.) \quad \sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}\psi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sigma_{\gamma\delta}\sigma_{\delta\beta}\sigma_{\beta\gamma} + \sigma_{\gamma\delta}\sigma_{\delta\alpha}\sigma_{\alpha\gamma} + \sigma_{\beta\delta}\sigma_{\delta\alpha}\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\alpha}\sigma_{\alpha\beta}.$$

Endlich ist die Determinante fünften Grades

$$(21.) \quad s\binom{\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon} = 0.$$

Denn entwickelt man sie nach den Elementen der ersten Colonne, so erhält man nach (17.) und (16.)

$$F_{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'}(s_{\alpha'\alpha}F_{\beta\gamma\delta\varepsilon} + s_{\alpha'\beta}F_{\gamma\delta\varepsilon\beta} + \cdots + s_{\alpha'\varepsilon}F_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0.$$

In dem symmetrischen System

$$(22.) \quad s_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots 7)$$

verschwinden also alle Determinanten fünften und höheren Grades, aber keine Determinante vierten Grades, oder der ***Rang*** dieses Systems ist gleich 4.

In Folge der Formeln

$$\sum_{\lambda}\sigma_{\alpha\lambda}^2=\varphi,\quad \sum_{\lambda}\sigma_{\alpha\lambda}\sigma_{\beta\lambda}=0$$

bilden die Elemente

$$(23.)\qquad \sigma_{\alpha\beta}(u) \qquad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ \dots\ 7)$$

ein symmetrisches orthogonales System. Gewöhnlich nennt man ein System von Elementen $a_{\alpha\beta}(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \dots\ m)$ nur dann ein orthogonales, wenn es den Bedingungen $\sum_{\lambda}a_{\alpha\lambda}^2=1$, $\sum_{\lambda}a_{\alpha\lambda}a_{\beta\lambda}=0$ genügt. Ich will aber im Folgenden diese Benennung auch dann anwenden, wenn die Gleichungen der ersten Art die Gestalt $\sum_{\lambda}a_{\alpha\lambda}^2=a$ haben. Ist $m=2n$ eine gerade Zahl, so ist die Determinante des Systems $|a_{\alpha\beta}|=\pm a^n$. Je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, nenne ich das orthogonale System ein eigentliches oder ein uneigentliches. Das Vorzeichen der Determinante findet man am einfachsten aus der bekannten Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{1,n+1} & \dots & a_{1,2n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n,n+1} & \dots & a_{n,2n} \end{vmatrix} = \pm(-1)^n \begin{vmatrix} a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{2n,1} & \dots & a_{2n,n} \end{vmatrix},$$

vorausgesetzt, dass diese Determinanten $n$ten Grades nicht verschwinden. Da das System (23.) symmetrisch ist, und die Determinante (18.) nicht Null ist, so ist es ein eigentliches orthogonales System. Ist $e_{\alpha\beta}=0$ oder 1, je nachdem α und β verschieden oder gleich sind, und ist r eine unbestimmte Grösse, so habe ich gezeigt (dieses Journ. Bd. 84, S. 26), dass die charakteristische Determinante

$$(24.)\qquad |\sigma_{\alpha\beta}+re_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ \dots\ 7)$$

eines symmetrischen orthogonalen Systems nur für $r=\pm\sqrt{\varphi}$ verschwindet, und dass ihre Elementartheiler sämmtlich linear sind. Da $\sqrt{\varphi}$ irrational ist, so muss diese Determinante ebenso oft für $+\sqrt{\varphi}$, wie für $-\sqrt{\varphi}$ verschwinden, und ist daher gleich $(r^2-\varphi)^4$. Da ferner die für $r=\pm s$ verschwindenden Elementartheiler sämmtlich linear sind, so hat das System (24.) für $r=\pm s$ den Rang 4, wie ich auf einem andern Wege oben gezeigt habe.

Es ist jetzt leicht, die Determinanten vierten Grades des Systems (23.) und (24.) zu berechnen. Z. B. ist

$$(25.)\qquad \begin{vmatrix} r & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma} & \sigma_{\alpha\delta} \\ \sigma_{\beta\alpha} & r & \sigma_{\beta\gamma} & \sigma_{\beta\delta} \\ \sigma_{\gamma\alpha} & \sigma_{\gamma\beta} & r & \sigma_{\gamma\delta} \\ \sigma_{\delta\alpha} & \sigma_{\delta\beta} & \sigma_{\delta\gamma} & r \end{vmatrix} = (\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}+r\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta})^2+(r^2-\varphi)(r^2-\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}).$$

Denn die Differenz zwischen der rechten und linken Seite ist eine ganze Function vierten Grades von r, in welcher die Coefficienten von r^4 und r^3 verschwinden, und auch der von r^2 zufolge der Gleichung (14.) § 5. Jene Differenz ist also eine lineare Function von r. Da dieselbe aber nach (19.) für $r = \pm\sqrt{\varphi}$ verschwindet, so ist sie identisch Null. Setzt man in dieser Formel $r = 0$, so erhält man

$$(26.) \qquad \psi^2_{\alpha\beta\gamma\delta} + \varphi\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{Norm}\,(\sqrt{\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}} + \sqrt{\sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\delta\beta}} + \sqrt{\sigma_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma}}).$$

In ähnlicher Weise findet man (vgl. Formel (5.) § 6)

$$(27.) \qquad \begin{vmatrix} \sigma_{01} & \sigma_{02} & \sigma_{03} & \sigma_{04} \\ \sigma_{21} & r & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & r & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & r \end{vmatrix} = (\psi_{0234} + r\sigma_{0234})(\psi_{1234} + r\sigma_{1234}) + (r^2 - \varphi)(\sigma_{01}r - \psi_{0234,1234})$$

und folglich für $r = 0$

$$(28.) \qquad \sigma\binom{0\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4} = \psi_{0234}\psi_{1234} + \varphi\psi_{0234,1234}.$$

Nun ist nach einem bekannten Determinantensatze

$$\sigma\binom{0\,1\,2\,3\,4}{0\,1\,2\,3\,4}\sigma\binom{2\,3\,4}{2\,3\,4} = \sigma\binom{0\,2\,3\,4}{0\,2\,3\,4}\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4} - \left(\sigma\binom{0\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4}\right)^2.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der orthogonalen Systeme ist aber

$$\sigma\binom{0\,1\,2\,3\,4}{0\,1\,2\,3\,4} = +\varphi\sigma\binom{5\,6\,7}{5\,6\,7},$$

und folglich ist

$$4\varphi\sigma_{67}\sigma_{75}\sigma_{56}\sigma_{34}\sigma_{42}\sigma_{23} = (\psi^2_{0234} + \varphi\varphi_{0234})(\psi^2_{1234} + \varphi\varphi_{1234}) - (\psi_{0234}\psi_{1234} + \varphi\psi_{0234,1234})^2$$

oder

$$(29.) \qquad \begin{cases} 4\sigma_{34}\sigma_{42}\sigma_{23}\sigma_{67}\sigma_{75}\sigma_{56} = \psi^2_{0234}\varphi_{1234} + \psi^2_{1234}\varphi_{0234} \\ \qquad -2\psi_{0234}\psi_{1234}\psi_{0234,1234} + \varphi(\varphi_{0234}\varphi_{1234} - \psi^2_{0234,1234}). \end{cases}$$

Endlich ist

$$(30.) \qquad \sigma\binom{0\,1\,2\,3}{0\,4\,5\,6} = \psi_{0123}\psi_{0456} + \varphi\sigma_{0123}\sigma_{0456}$$

und nach (7.) § 7

$$(31.) \qquad \sigma\binom{0\,1\,2\,3}{0\,1\,4\,5} = \psi_{0123}\psi_{0145} - \varphi(\sigma_{0236}\sigma_{0456} + \sigma_{0237}\sigma_{0457}).$$

Sind $z_0, z_1, \ldots z_7$ unbestimmte Grössen, so lässt sich die quadratische Form $\Sigma s_{\varkappa\lambda} z_\varkappa z_\lambda$, weil ihr Rang gleich 4 ist, in eine Summe von vier Quadraten transformiren

$$(32.) \qquad \Sigma s_{\varkappa\lambda} z_\varkappa z_\lambda = \sum_{\mu}^{3}{}_0 \left(\sum_{\lambda}^{7}{}_0 A^{(\mu)}_\lambda z_\lambda\right)^2.$$

Die Grössen $A_\lambda^{(\mu)}$ sind durch diese Bedingung nicht bestimmt, sondern können durch

$$B_\lambda^{(\mu)} = \sum_\nu^3{}_0 R_{\mu\nu} A_\lambda^{(\nu)}$$

ersetzt werden, wo die 16 Grössen $R_{\mu\nu}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution von der Determinante $+1$ oder -1 sind. Demnach ist

$$(33.) \qquad \sum_\mu^3{}_0 A_\lambda^{(\mu)2} = s = \sqrt{\varphi(u)}$$

und

$$(34.) \qquad \sum_\mu^3{}_0 A_\varkappa^{(\mu)} A_\lambda^{(\mu)} = \sigma_{\varkappa\lambda}(u).$$

Ersetzt man s durch $-s$, so geht jene quadratische Form in $\Sigma s_{\varkappa\lambda} z_\varkappa z_\lambda - 2s\Sigma z_\lambda^2$ über, und da deren Rang ebenfalls gleich 4 ist, so lässt sie sich auch in eine Summe von vier Quadraten verwandeln

$$2s\Sigma z_\lambda^2 - \Sigma s_{\varkappa\lambda} z_\varkappa z_\lambda = \sum_\mu^7{}_4 (\sum_\lambda^7{}_0 A_\lambda^{(\mu)} z_\lambda)^2.$$

Mithin ist

$$\sum_\mu^7{}_0 (\sum_\lambda^7{}_0 A_\lambda^{(\mu)} z_\lambda)^2 = 2s\Sigma z_\lambda^2,$$

also bilden die Grössen $A_\lambda^{(\mu)}$ ein orthogonales System. Folglich ist

$$(35.) \qquad \sum_\lambda A_\lambda^{(\mu)2} = 2s = 2\sqrt{\varphi(u)}, \quad \sum_\lambda A_\lambda^{(\mu)} A_\lambda^{(\nu)} = 0.$$

Von den Grössen $A_\lambda^{(\mu)} (\mu = 4, 5, 6, 7)$ mache ich im Folgenden weiter keinen Gebrauch. Setzt man nun

$$(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta) = |A_\lambda^{(\mu)}| \qquad \binom{\lambda = \alpha, \beta, \gamma, \delta}{\mu = 0, 1, 2, 3},$$

so ist nach (33.) und (34.)

$$(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta)(A_{\alpha'}, A_{\beta'}, A_{\gamma'}, A_{\delta'}) = s\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} = F_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}.$$

Man kann daher die Grössen $A_\lambda^{(\mu)}$ so wählen, dass

$$(36.) \qquad (A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta) = F_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

wird. Auch dann können sie immer noch durch die allgemeineren Ausdrücke $B_\lambda^{(\mu)}$ ersetzt werden, es müssen aber die Grössen $R_{\mu\nu}$ die Coefficienten einer eigentlichen orthogonalen Substitution sein. Ist $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa, \lambda, \mu, \nu$ eine eigentliche Permutation der Indices 0, 1, ... 7, so ist

$$(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta) = \psi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \sqrt{\varphi}\,\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (A_\varkappa, A_\lambda, A_\mu, A_\nu) = -\psi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \sqrt{\varphi}\,\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

und mithin

$$(37.) \qquad 2\sqrt{\varphi(u)}\,\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = (A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta) + (A_\varkappa, A_\lambda, A_\mu, A_\nu)$$

und

$$(38.) \qquad 2\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = (A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta) - (A_\varkappa, A_\lambda, A_\mu, A_\nu).$$

Damit sind die Functionen $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $\sqrt{\varphi}$ durch 32 Grössen $A_\lambda^{(\mu)}$ dargestellt, welche den Gleichungen (33.) und (35.) genügen, und man überzeugt sich leicht, dass durch diese Formeln den in § 6 und § 7 entwickelten Gleichungen sämmtlich genügt wird.

§ 9.

Irrationale Invarianten und Covarianten von $F(x)$.

Setzt man in den vier Formeln (1.) § 8 $u = 0$, so erhält man

$$(1.) \qquad \sum_\lambda f_{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} = 0,$$

gleichgültig, ob die Indices verschieden oder gleich sind. Diese Gleichung kann man mit Hülfe der Beziehung (4.) § 5 auf die Gestalt bringen

$$(2.) \qquad f_{\alpha\beta\gamma\varkappa} f_{\lambda\mu\nu\varrho} + f_{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\mu\nu\varrho\varkappa} + f_{\alpha\beta\gamma\mu} f_{\nu\varrho\varkappa\lambda} + f_{\alpha\beta\gamma\nu} f_{\varrho\varkappa\lambda\mu} + f_{\alpha\beta\gamma\varrho} f_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0.$$

Demzufolge kann man acht lineare Functionen von vier Variabeln z^0, z', z'', z''',

$$(3.) \qquad z_\lambda = a_\lambda^{(0)} z^{(0)} + a_\lambda' z' + a_\lambda'' z'' + a_\lambda''' z''' \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots 7)$$

so bestimmen, dass

$$(4.) \qquad f_{\alpha\beta\gamma\delta} = (a_\alpha, a_\beta, a_\gamma, a_\delta) = |a_\lambda^{(\mu)}| \qquad \begin{pmatrix} \lambda = \alpha, \beta, \gamma, \delta \\ \mu = 0, 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

wird. Z. B. kann man, wenn $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ eine eigentliche Permutation der Indices 0, 1, 2, 3 ist,

$$f_{0123}^{\frac{3}{4}} a_\varrho^{(\nu)} = f_{\varkappa\lambda\mu\varrho} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots 7)$$

setzen. Aus den Formeln (1.) folgt in Verbindung damit, dass die Grössen $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sämmtlich von Null verschieden sind, die identische Gleichung

$$(5.) \qquad \sum_\lambda z_\lambda^2 = 0$$

und allgemein, wenn $f_2(w^{(0)}, w', w'', w''') = f_2(w)$ eine beliebige quadratische Function der Variabeln $w^{(0)}, w', w'', w'''$ ist,

$$(6.) \qquad \sum_\lambda f_2(a_\lambda) = 0.$$

Betrachtet man die Grössen $a_\lambda^{(0)}, a_\lambda', a_\lambda'', a_\lambda'''$ als die Coordinaten einer Ebene a_λ in Bezug auf irgend ein Coordinatentetraeder, so besagt diese Gleichung, dass die acht Ebenen $a_0, a_1, \ldots a_7$ die gemeinsamen Berührungsebenen dreier Flächen zweiter Klasse sind.

Aus den Formeln (15.) § 4 und (3.) § 5 folgt

$$c^3 g c_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm \varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} g_{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} g_{\alpha\delta} g_{\beta,\gamma,\delta},$$

und mithin ist

$$c^{12} g^4 c_{0246} c_{0257} c_{0347} c_{0356} f_{0246} f_{0257} f_{0347} f_{0356} = (01,23)(45,67)(23) g_{2,4,6} g_{2,5,7} g_{3,4,7} g_{3,5,6} (\Pi g_{0\lambda}^2) : g_{01}^2.$$

Nach (1.) und (11.) § 4 erhält man demnach

$$c^4 f_{0246} f_{0257} f_{0347} f_{0356} = -(j,k)(01,23)(45,67)(0123) h \frac{c_{0357} c_{0346} c_{0256} c_{0247}}{c c_{0123} c_{0145} c_{0167}}.$$

Ebenso ist

$$c^4 f_{0357} f_{0346} f_{0256} f_{0247} = -(j,k)(01,23)(45,67)(0123) h \frac{c_{0246} c_{0257} c_{0347} c_{0356}}{c c_{0123} c_{0145} c_{0167}}.$$

Setzt man also

$$(7.) \qquad c^4 f = -\varepsilon h = -\varepsilon g^2,$$

so ist nach (6.) § 3

$$f = f_{0246} f_{0257} f_{0347} f_{0356} - f_{0357} f_{0346} f_{0256} f_{0247}.$$

Dieser Ausdruck wechselt daher nur das Vorzeichen, wenn man irgend zwei der Indices unter einander vertauscht, und folglich ist allgemein

$$(8.) \qquad \pm f = f_{\varkappa\alpha\beta\gamma} f_{\varkappa\alpha'\beta'\gamma'} f_{\varkappa\alpha'\beta\gamma'} f_{\varkappa\alpha'\beta'\gamma} - f_{\varkappa\alpha'\beta'\gamma'} f_{\varkappa\alpha'\beta\gamma} f_{\varkappa\alpha\beta'\gamma} f_{\varkappa\alpha\beta\gamma'},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\varkappa\varkappa'\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ eine eigentliche oder uneigentliche Vertauschung der Indices 0, 1, ... 7 ist.

Nach (15.) § 4 ist

$$(9.) \qquad c^3 g^2 c_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm \varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} g_{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} g_{\beta\delta} g_{\gamma\delta}$$

und mithin

$$c^{15} g^{10} \Pi_\lambda^7 (c_{012\lambda} f_{012\lambda}) = -(012)(1,2)(2,0)(0,1)\varepsilon (g_{12} g_{20} g_{01})^3 (\Pi g_{0\lambda})(\Pi g_{1\lambda})(\Pi g_{2\lambda}),$$

wo λ z. B. in dem Producte $\Pi g_{0\lambda}$ alle von 0 verschiedenen Indices durchläuft. Nach (11.) § 4 ist also

$$(10.) \qquad c^4 \Pi_\lambda^7 f_{012\lambda} = (012)(1,2)(2,0)(0,1)\varepsilon f g_{0,1,2}^2.$$

Ferner ist

$$c^{18} g^{12} c_{0134} c_{0142} c_{0123} c_{0167} c_{0175} c_{0156} f_{0134} f_{0142} f_{0123} f_{0167} f_{0175} f_{0156}$$
$$= -\varepsilon (01)(0234,1234) g_{01}^2 (g_{34} g_{42} g_{23})(g_{67} g_{75} g_{56})(\Pi g_{0\lambda})^2 (\Pi g_{1\lambda})^2$$

und mithin nach (1.) und (11.) § 4

$$(11.) \qquad c^4 f_{0134} f_{0142} f_{0123} f_{0167} f_{0175} f_{0156} = -(0234,1234) f g_{01}^2 c_{0234}^2 c_{1234}^2.$$

Nach Formel (4.) § 6 ist

$$\varepsilon_{01} (k567) c_{0234} c_{1234} \frac{g_{01}^2}{cg} \psi_{01} = (567,2) \frac{g_{0,1,2}}{g_{34}} \frac{c_{0134} \sigma_{0134}}{f_{0134}} \sigma_{34} + \cdots$$
$$\cdots + (567,234) \frac{g_{0,1,234}}{g_{01}} c\sigma\sigma_{01}.$$

Nun ist aber nach (18.) § 4 und (11.)

$$(567,234) c^2 g g_{0,1,234} f_{0134} f_{0142} f_{0123} f_{0167} f_{0175} f_{0156} = \varepsilon_{01} (k567) c_{0234} c_{1234} g_{01}^3 f f_{0234} f_{1234}.$$

Ferner ist

$$(567,2) c c_{0134} g g_{0,1,2} f_{0134} f_{2345} f_{2346} f_{2347} = \varepsilon_{01} (k567) c_{0234} c_{1234} f g_{34} g_{01}^2.$$

Denn multiplicirt man diese Gleichung mit $f_{2340}f_{2341}$, so geht sie nach (10.) § 4 und (10.) über in

$$g_{02}g_{12}g_{34}g_{23}^2g_{24}^2(\varepsilon_{2567}c_{0134}f_{0134}) = -c^3g^2g_{01}(\varepsilon_{1567}c_{0234}f_{0234})(\varepsilon_{0567}c_{1234}f_{1234}),$$

welche mit Hülfe der Gleichung (9.) leicht zu verificiren ist. Demnach ist

$$(12.)\quad \frac{f_{2345}f_{2346}f_{2347}}{f}\psi_{01} = \frac{\sigma_{0134}\sigma_{34}}{f_{0134}^2} + \frac{\sigma_{0142}\sigma_{42}}{f_{0142}^2} + \frac{\sigma_{0123}\sigma_{23}}{f_{0123}^2} + \frac{f_{0234}f_{1234}\sigma\sigma_{01}}{f_{0134}f_{0142}f_{0123}}.$$

Nach Formel (7.) § 6 ist

$$\varepsilon_{01}(k4)(23,567)c_{0234}c_{1234}\frac{g_{01}^2}{cg}\psi_{01} = (234,567)c_{0123}\frac{g_{0,1,4}}{g_{23}}\frac{\sigma_{0123}}{f_{0123}}\sigma_{23} + \sum_{\lambda}^{7}{}_5(234,\lambda)c_{014\lambda}\frac{g_{0,1,23\lambda}}{g_{4\lambda}}\frac{\sigma_{014\lambda}}{f_{014\lambda}}\sigma_{4\lambda}.$$

Nun ist aber, wie aus der zweiten oben benutzten Formel durch Vertauschung der Indices 2 und 4 hervorgeht,

$$(4,567)cc_{0123}gg_{0,1,4}f_{0123}f_{2345}f_{2346}f_{2347} = \varepsilon_{01}(k4)c_{0234}c_{1234}fg_{23}g_{01}^2$$

und nach (22.) und (23.) § 4

$$(234,5)cc_{0145}gg_{0,1,235}f_{0123}f_{2345} = -\varepsilon_{01}(k4)(23,567)c_{0234}c_{1234}g_{01}^2g_{45}f_{0235}f_{1235}$$

und folglich

$$(13.)\quad f_{0123}\psi_{01} = \frac{f}{f_{2345}f_{2346}f_{2347}}\frac{\sigma_{0123}\sigma_{23}}{f_{0123}} - \sum_{\lambda}^{7}{}_5 f_{023\lambda}f_{123\lambda}\frac{\sigma_{014\lambda}\sigma_{4\lambda}}{f_{014\lambda}f_{234\lambda}}.$$

Die Glieder der ersten Dimension in der Entwicklung von $\sigma_{\alpha\beta}(u)$ seien, wenn man u durch x ersetzt,

$$(14.)\quad x_{\alpha\beta} = a'_{\alpha\beta}x' + a''_{\alpha\beta}x'' + a'''_{\alpha\beta}x'''.$$

Da die Entwicklungen der Functionen $\psi_{\alpha\beta}(u)$ und $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)$ mit den Gliedern der dritten Dimension anfangen, so folgt aus den Gleichungen (1.) § 7, (12.) und (13.)

$$(15.)\quad \sum_{\lambda}f_{\lambda\beta\gamma\delta}x_{\alpha\lambda} = 0,$$

$$(16.)\quad \frac{x_{34}}{f_{0134}} + \frac{x_{42}}{f_{0142}} + \frac{x_{23}}{f_{0123}} + \frac{f_{0234}f_{1234}x_{01}}{f_{0134}f_{0142}f_{0123}} = 0,$$

$$(17.)\quad \sum_{\lambda}^{7}{}_5\frac{f_{023\lambda}f_{123\lambda}}{f_{234\lambda}}x_{4\lambda} = \frac{fx_{23}}{f_{2345}f_{2346}f_{2347}}.$$

Die Determinante der drei linearen Functionen $x_{\varkappa\lambda}$, $x_{\mu\nu}$, $x_{\varrho\sigma}$ bezeichne ich mit $[\varkappa\lambda, \mu\nu, \varrho\sigma]$. Aus der Gleichung (15.), die man auch schreiben kann

$$f_{a\lambda\mu\nu}x_{a\varkappa} - f_{a\varkappa\mu\nu}x_{a\lambda} + f_{a\varkappa\lambda\nu}x_{a\mu} - f_{a\varkappa\lambda\mu}x_{a\nu} = 0,$$

folgt, dass

$$[\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta] = m_a f_{a\beta\gamma\delta},$$

wo m_α von β, γ, δ unabhängig ist. Setzt man in (17.) $x_{46} = x_{47} = 0$, so erhält man

$$f[23, 46, 47] = -m_4 f_{2346} f_{2347} f_{4670} f_{4671} f_{4675}.$$

Setzt man in (16.) $x_{34} = x_{42} = 0$, so erhält man

$$f_{0142} f_{0143}[23, 34, 42] = -f_{2340} f_{2341}[01, 42, 43],$$

also mit Hülfe der vorhergehenden Relation

$$f[23, 34, 42] = m_4 f_{2340} f_{2341} f_{2345} f_{2346} f_{2347}.$$

Daraus ergiebt sich durch Vertauschung der Indices, dass $m_4 = m_3$ ist. Bezeichnet man den gemeinsamen Werth der acht Grössen m_α mit m, so erhält man folglich die Gleichungen:

$$(18.) \quad [\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta] = m f_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$(19.) \quad f[\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta] = m \Pi_\lambda f_{\alpha\beta\gamma\lambda},$$

$$(20.) \quad f[\alpha\beta, \varkappa\lambda, \varkappa\mu] = -m f_{\varkappa\lambda\alpha\beta} f_{\varkappa\mu\alpha\beta} f_{\varkappa\lambda\nu\varrho} f_{\varkappa\lambda\mu\sigma} f_{\varkappa\lambda\mu\tau}.$$

In dem Producte (19.) durchläuft λ die fünf von α, β, γ verschiedenen Indices. In der Formel (20.) sind $\alpha\beta\varkappa\lambda\mu\varrho\sigma\tau$ die sämmtlichen acht Indices. Bei unserer Definition der *Jacobi*schen Functionen ist ein allen gemeinsamer Factor willkürlich geblieben, und daher bleibt m völlig unbestimmt. Wie man bei bestimmter Verfügung über jenen Factor die Grösse m berechnen kann, habe ich in meiner Arbeit *Ueber die constanten Factoren der Thetareihen* (dieses Journal Bd. 98) gezeigt.

Dass die Coefficienten der Anfangsglieder der 28 ungeraden Thetafunctionen die Coordinaten der 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung sind, ist gewiss eine der merkwürdigsten Eigenschaften dieser Functionen. In den bisherigen Darstellungen ihrer Theorie findet sich aber keine Identität, aus der sich jener Satz so direct ablesen liesse, wie aus der in § 8 entwickelten Formel (19.) oder (26.). Bezeichnet man nämlich die Glieder der vierten Dimension in der Entwicklung von $\varphi(u)$, falls man darin u durch x ersetzt, mit $F(x', x'', x''')$ oder kurz mit $F(x)$, so folgt aus derselben die Relation

$$(21.) \quad f^2_{\alpha\beta\gamma\delta} F(x) = \text{Norm}\,[\sqrt{x_{\alpha\beta}x_{\gamma\delta}} + \sqrt{x_{\alpha\gamma}x_{\delta\beta}} + \sqrt{x_{\alpha\delta}x_{\beta\gamma}}],$$

aus der jener Satz unmittelbar hervorgeht. (Noch einfacher ergiebt er sich aus der Formel (14.) § 14). Sind ferner $G_{\alpha\beta}(x)$ und $G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ die Glieder der dritten Dimension in den Entwicklungen von $\psi_{\alpha\beta}(u)$ und $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)$, so folgt aus der Gleichung (20.) § 8

$$(22.) \quad f_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = x_{\gamma\delta}x_{\delta\beta}x_{\beta\gamma} + x_{\delta\alpha}x_{\alpha\gamma}x_{\gamma\delta} + x_{\alpha\beta}x_{\beta\delta}x_{\delta\alpha} + x_{\beta\gamma}x_{\gamma\alpha}x_{\alpha\beta}.$$

In meiner Abhandlung ***Ueber die Jacobischen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung*** (dieses Journal Bd. 103), die ich im Folgenden mit J. C. citiren werde, habe ich die in diesem Paragraphen entwickelten Relationen auf einem anderen Wege hergeleitet, so wie auch viele andere, die sich aus den Formeln des § 8 durch Coefficientenvergleichung ergeben. Mit Hülfe der Gleichungen (18.), (19.) und (20.) habe ich dort gezeigt, dass G_{0123} die Functionaldeterminante von irgend drei der quadratischen Functionen

$$x_{01}x_{23}, \quad x_{02}x_{31}, \quad x_{03}x_{12}, \quad x_{45}x_{67}, \quad x_{46}x_{75}, \quad x_{47}x_{56}$$

ist. Aus den Formeln, die ich in § 10 entwickeln werde, folgt dann, dass G_{01} die Functionaldeterminante von irgend drei der Functionen

$$x_{02}x_{12}, \quad x_{03}x_{13}, \quad x_{04}x_{14}, \quad x_{05}x_{15}, \quad x_{06}x_{16}, \quad x_{07}x_{17}$$

ist.

§ 10.

Uebergang von einem Fundamentalsystem zu den andern.

Aus den entwickelten Relationen kann man neue ableiten, indem man die Formen untersucht, welche sie annehmen, wenn man statt des ursprünglichen Fundamentalsystems ein anderes zu Grunde legt. Setzt man

$$(1.) \qquad a = [0123],$$

so bilden die acht Charakteristiken

$$(2.) \qquad [0'] = [0a], \quad \ldots \quad [3'] = [3a], \quad [4'] = [4], \quad \ldots \quad [7'] = [7]$$

ein Fundamentalsystem, für welches die Summe der ungeraden und die halbe Summe der sämmtlichen Charakteristiken

$$(3.) \qquad k' \equiv ka, \quad j' \equiv j \pmod 2$$

ist. Der Kürze halber schreibe ich z. B. $\vartheta'_{k\alpha\beta}$ für $\vartheta_{k'\alpha'\beta'}$ und bezeichne allgemein durch den einem Ausdruck beigefügten Strich den Ausdruck, welcher auf die analoge Weise mit Zugrundelegung des neuen Fundamentalsystems gebildet ist. Die Function $\varphi'(u)$ kann sich ihrer Definition nach von $\varphi(u)$ nur um einen constanten Factor unterscheiden. Da aber nach § 3 $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$ ist, so ist auch $\varphi'(u) = \varphi(u)$ und folglich $F'(x) = F(x)$.

Setzt man

$$f_0 = \prod_{\lambda}^{7} f_{123\lambda}, \quad f_1 = \prod_{\lambda}^{7} f_{023\lambda}, \quad f_2 = \prod_{\lambda}^{7} f_{013\lambda}, \quad f_3 = \prod_{\lambda}^{7} f_{012\lambda},$$
$$f_4 = \prod_{\lambda}^{3} f_{567\lambda}, \quad f_5 = \prod_{\lambda}^{3} f_{467\lambda}, \quad f_6 = \prod_{\lambda}^{3} f_{457\lambda}, \quad f_7 = \prod_{\lambda}^{3} f_{456\lambda},$$

so ist nach (10.) § 9

$$(4.)\quad \begin{cases} c^4\varepsilon_{4567}f_{4567}f_0 = -(0,a)fg_{1,2,3}^2, & c^4\varepsilon_{4567}f_{4567}f_1 = -(1,a)fg_{0,2,3}^2, \quad \ldots, \\ c^4\varepsilon_{0123}f_{0123}f_4 = -(4,a)fg_{5,6,7}^2, & c^4\varepsilon_{0123}f_{0123}f_5 = -(5,a)fg_{4,6,7}^2, \quad \ldots \end{cases}$$

Die Formel (16.) § 3 lautet für $b=[0a]$

$$c_{0123}^2\varphi(u) = \sum_\lambda{}_0^3(k0a\lambda, 0\lambda)h_{0\lambda}(\vartheta_{k0a\lambda}(u))^2 + \sum_\lambda{}_4^7(k0\lambda, 0a\lambda)h_{0a\lambda}(\vartheta_{k0\lambda}(u))^2$$

oder

$$\frac{c_{0123}^2}{c^2}\varphi = (a,01)\frac{g_{01}^2}{g_{23}^2}\sigma_{23}^2 + (a,02)\frac{g_{02}^2}{g_{31}^2}\sigma_{31}^2 + (a,03)\frac{g_{03}^2}{g_{12}^2}\sigma_{12}^2 + \sum_\lambda{}_4^7(a,0a\lambda)\frac{g_{123\lambda}^2}{g_{0\lambda}^2}\sigma_{0\lambda}^2.$$

Den Formeln (4.) zufolge ist aber

$$\frac{c^6f_0f_1}{f^2} = (01,a)\frac{g_{1,2,3}^2g_{0,2,3}^2}{c_{0123}^2g_{0123}^2}$$

und mithin nach (10.) und (15.) § 4

$$(a,01)\frac{g_{01}^2c^2}{g_{23}^2c_{0123}^2} = \frac{f^2}{f_0f_1}.$$

Ferner ist

$$\varepsilon(a)c^6c_{0123}^2g_{0123}^2f_0f_4 = (04,a)f^2g_{1,2,3}^2g_{5,6,7}^2$$

und folglich

$$(a,0a4)c^6f_0f_4(g_{01}g_{02}g_{03})^2 = fhc_{0123}^2(g_{67}g_{75}g_{56})^2.$$

Multiplicirt man mit $(g_{04}g_{05}g_{06}g_{07})^2$, so erhält man nach (11.) § 4

$$(a,0a4)c^4f_0f_4 = fc_{0123}^2c_{0567}^2g_{04}^2f_{0567}^2$$

und mithin

$$(a,0a4)\frac{g_{1234}^2c^2}{g_{04}^2c_{0123}^2} = \frac{ff_{0567}^4}{f_0f_4}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die oben für φ aufgestellte Formel ein, so findet man

$$(5.)\quad \varphi(u) = \frac{f^2}{f_0f_1}\sigma_{23}^2 + \frac{f^2}{f_0f_2}\sigma_{31}^2 + \frac{f^2}{f_0f_3}\sigma_{12}^2 + \sum_\lambda{}_4^7\frac{ff_{123\lambda}^4}{f_0f_\lambda}\sigma_{0\lambda}^2.$$

Setzt man dagegen in der Gleichung (16.) § 3 $b=[4]$, so erhält man durch analoge Umformungen

$$(6.)\quad \varphi(u) = \sum_\lambda{}_0^3\frac{ff_{567\lambda}^4}{f_4f_\lambda}\sigma_{4\lambda}^2 + \frac{f^2}{f_4f_5}\sigma_{67}^2 + \frac{f^2}{f_4f_6}\sigma_{75}^2 + \frac{f^2}{f_4f_7}\sigma_{56}^2.$$

Durchläuft λ die sechs von α und β verschiedenen Indices, so bestehen zwischen den sechs Functionen $\sigma_{\alpha\lambda}\sigma_{\beta\lambda}$ drei Relationen von der Form $\sum_\lambda C_\lambda\sigma_{\alpha\lambda}\sigma_{\beta\lambda}=0$. Für die Coefficienten C_λ kann man jedes System von Werthen nehmen, welche die Gleichung $\sum_\lambda C_\lambda x_{\alpha\lambda}x_{\beta\lambda}=0$ identisch befriedigen. Um nun zu erkennen, wodurch sich die zwischen jenen Functionen auf-

gestellte Relation (6.) § 6 auszeichnet, betrachte ich das Anfangsglied in der Entwicklung der Gleichung (13.) § 6. Ersetzt man in demselben u und du durch x und y, so erhält man

$$(7.) \qquad \sum_{\lambda} x_{\alpha\lambda} y_{\beta\lambda} = 0,$$

wo

$$(8.) \qquad y_{\alpha\beta} = a'_{\alpha\beta} y' + a''_{\alpha\beta} y'' + a'''_{\alpha\beta} y'''$$

ist. Durch die Betrachtung der Glieder der zweiten Dimension in der Formel (5.) § 5 zeigt man, dass die Gleichung (7.) auch gilt, wenn $\alpha = \beta$ ist. Aus der Formel $\Sigma \sigma'_{0\lambda} \sigma'_{1\lambda} = 0$ folgt daher, dass eine Relation von der Form

$$C_2 \sigma_{13} \sigma_{03} + C_3 \sigma_{12} \sigma_{02} + \sum_{\lambda}^{7}{}_{4} C_\lambda \sigma_{0\lambda} \sigma_{1\lambda} = 0$$

besteht, deren Coefficienten die Gleichung

$$C_2 x_{13} y_{03} + C_3 x_{12} y_{02} + \sum_{\lambda}^{7}{}_{4} C_\lambda x_{0\lambda} y_{1\lambda} = 0$$

identisch befriedigen. Setzt man

$$x_{04} = x_{05} = y_{16} = y_{17} = 0,$$

so erhält man

$$C_2[13, 04, 05][03, 16, 17] + C_3[12, 04, 05][02, 16, 17] = 0$$

und folglich der Formel (20.) § 9 zufolge $C_2 f_2 = C_3 f_3$. Setzt man

$$x_{12} = x_{05} = y_{16} = y_{17} = 0,$$

so erhält man

$$C_2[13, 12, 05][03, 16, 17] + C_4[04, 12, 05][14, 16, 17] = 0$$

oder $C_2 f_2 f^2_{0234} f^2_{1234} = C_4 f f_4$. Mithin ist

$$(9.) \qquad \frac{f \sigma_{13} \sigma_{03}}{f_2} + \frac{f \sigma_{12} \sigma_{02}}{f_3} + \sum_{\lambda}^{7}{}_{4} \frac{f^2_{123\lambda} f^2_{023\lambda} \sigma_{0\lambda} \sigma_{1\lambda}}{f_\lambda} = 0.$$

In ähnlicher Weise führt die Formel $\Sigma \sigma'_{0\lambda} \sigma'_{4\lambda} = 0$ zu der Gleichung

$$(10.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f^2_{5671} \sigma_{23} \sigma_{41}}{f_1} + \dfrac{f^2_{5672} \sigma_{31} \sigma_{42}}{f_2} + \dfrac{f^2_{5673} \sigma_{12} \sigma_{43}}{f_3} \\ + \dfrac{f^2_{1235} \sigma_{05} \sigma_{67}}{f_5} + \dfrac{f^2_{1236} \sigma_{06} \sigma_{75}}{f_6} + \dfrac{f^2_{1237} \sigma_{07} \sigma_{56}}{f_7} = 0, \end{array} \right.$$

und die Formel $\Sigma \sigma'_{4\lambda} \sigma'_{5\lambda}$ zu der Gleichung

$$(11.) \qquad \sum_{\lambda}^{3}{}_{0} \frac{f^2_{567\lambda} f^2_{467\lambda} \sigma_{4\lambda} \sigma_{5\lambda}}{f_\lambda} + \frac{f \sigma_{57} \sigma_{47}}{f_6} + \frac{f \sigma_{56} \sigma_{46}}{f_7} = 0.$$

Nun mögen $\alpha\beta\gamma\delta$ die Indices 0123 und $\varkappa\lambda\mu\nu$ die Indices 4567 in irgend einer Reihenfolge bezeichnen. Dann ist $\sigma'_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta}$, $\sigma'_{\varkappa\lambda} = C_{\varkappa\lambda} \sigma_{\mu\nu}$ und

$\sigma'_{a\varkappa} = C_{a\varkappa}\sigma_{a\varkappa}$. Aus der Vergleichung der Formel (5.) mit der Relation $\varphi(u) = \Sigma(\sigma'_{0\lambda})^2$ ergiebt sich

$$C_{01}^2 = \frac{f^2}{f_0 f_1}, \quad C_{02}^2 = \frac{f^2}{f_0 f_2}, \quad \ldots \quad C_{07}^2 = \frac{f f_{1237}^4}{f_0 f_7}.$$

Ebenso findet man

$$C_{12}^2 = \frac{f^2}{f_1 f_2}, \quad C_{13}^2 = \frac{f^2}{f_1 f_3}, \quad \ldots \quad C_{17}^2 = \frac{f f_{0237}^4}{f_1 f_7}.$$

Ferner erhält man aus der Relation (9.)

$$C_{02}C_{12} : C_{03}C_{13} : \cdots : C_{07}C_{17} = \frac{f}{f_2} : \frac{f}{f_3} : \cdots : \frac{f_{1237}^2 f_{0237}^2}{f_7}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Constanten $C_{a\beta}$ berechnen. Setzt man $\sqrt{abc\ldots} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\ldots$, so findet man, dass entweder

$$(12.) \quad \begin{cases} \sigma'_{a\beta}(u) = \dfrac{f\sigma_{\gamma\delta}(u)}{\sqrt{f_a f_\beta}}, \quad \sigma'_{\varkappa\lambda}(u) = \dfrac{f\sigma_{\mu\nu}(u)}{\sqrt{f_\varkappa f_\lambda}}, \\ \sigma'_{a\varkappa}(u) = \dfrac{\sqrt{f} f_{\beta\gamma\delta\varkappa}^2 \sigma_{a\varkappa}(u)}{\sqrt{f_a f_\varkappa}} = \dfrac{\sqrt{f} f_{a\lambda\mu\nu}^2 \sigma_{a\varkappa}(u)}{\sqrt{f_a f_\varkappa}} \end{cases}$$

ist, oder dass diesen Ausdrücken sämmtlich das entgegengesetzte Zeichen ertheilt werden darf. Man könnte also noch in jeder dieser Formeln den Factor $\sqrt{1}$ hinzufügen. Dann enthalten sie zehn Quadratwurzeln $\sqrt{f_0}, \ldots \sqrt{f_7}, \sqrt{f}$ und $\sqrt{1}$, für welche sich auf dem obigen Wege keine Bestimmung ergiebt. Durch Uebertragung der Gleichung (4.) § 5 findet man, wie ich zeigen werde, zwischen denselben die Beziehung

$$(13.) \quad \sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3} = \sqrt{f_4 f_5 f_6 f_7}.$$

Ausserdem kommen jene Wurzeln in den obigen Formeln nur in gewissen Verbindungen vor, welche sich sämmtlich durch

$$\sqrt{1}, \quad \sqrt{f_0 f_1}, \quad \ldots \quad \sqrt{f_0 f_3}, \quad \sqrt{f_0 f_4 f}, \quad \ldots \quad \sqrt{f_0 f_7 f}$$

ausdrücken lassen. Mithin bleiben darin nur sieben Vorzeichen unbestimmt. Da aber auch bei der Definition der Functionen $\sigma_{a\beta}$ sieben Vorzeichen, nämlich die von $g_{01}, \ldots g_{07}$, willkürlich gelassen waren, so folgt daraus, dass die Vorzeichen der in den Formeln (12.) auftretenden Wurzeln keiner andern Beschränkung unterliegen als der Gleichung (13.). Der Einfachheit halber will ich ausserdem $\sqrt{1} = +1$ setzen.

Die Betrachtung der Glieder der ersten Dimension in jenen Gleichungen führt zu den Formeln

$$(14.) \quad x'_{a\beta} = \frac{f x_{\gamma\delta}}{\sqrt{f_a f_\beta}}, \quad x'_{\varkappa\lambda} = \frac{f x_{\mu\nu}}{\sqrt{f_\varkappa f_\lambda}}, \quad x'_{a\varkappa} = \frac{\sqrt{f} f_{\beta\gamma\delta\varkappa}^2 x_{a\varkappa}}{\sqrt{f_a f_\varkappa}} = \frac{\sqrt{f} f_{a\lambda\mu\nu}^2 x_{a\varkappa}}{\sqrt{f_a f_\varkappa}}.$$

Die nämlichen Formeln habe ich auf einem anderen Wege J. C. § 6 entwickelt, und aus ihnen die Beziehung (13.) abgeleitet. Man kann diese aber auch auf folgendem Wege finden:

Nach Formel (1.) § 5 und (12.) ist

$$\frac{g'_{\alpha\beta}\vartheta'_{k\alpha\beta}}{c'} = \frac{f}{\sqrt{f_\alpha f_\beta}}\frac{g_{\gamma\delta}\vartheta_{k\gamma\delta}}{c},$$

und folglich, weil $\vartheta'_{k\alpha\beta} = \vartheta_{k\alpha\beta aaa} = -(k, \gamma\delta)\vartheta_{k\gamma\delta}$ ist,

$$g'_{\alpha\beta} = -(k, \gamma\delta)\frac{c_{0123}}{c}\frac{f}{\sqrt{f_0 f_1}}g_{\gamma\delta}.$$

Nach Formel (9.) § 9 ist

$$c'^3 h' c'_{0123} f'_{0123} = \varepsilon'_{4567} g'_{01} g'_{02} g'_{03} g'_{12} g'_{13} g'_{23}.$$

Nun ist aber $h' = h$, $\varepsilon'_{4567} = \varepsilon_{4567}$, $c'_{0123} = (a, k)c$ und

$$(15.) \quad c^4 f_0 f_1 f_2 f_3 = (a) f^4 c^4_{0123},$$

und mithin

$$(16.) \quad f'_{0123} = \frac{f^2}{\sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3}} f_{0123}.$$

Ebenso findet man $f'_{4567} = \frac{f^2}{\sqrt{f_4 f_5 f_6 f_7}} f_{4567}$, und daraus ergiebt sich die Relation (13.). Mit Hülfe der Formeln (18.), (19.), (20.) § 9 habe ich J. C. § 7 weiter nachgewiesen, dass

$$(17.) \quad f'_{0124} = -\frac{f\sqrt{f f_4}}{\sqrt{f_0 f_1 f_2 f_{0124}}},$$

$$(18.) \quad f'_{0145} = -\frac{f}{\sqrt{f_0 f_1 f_4 f_5}} f_{0145} f_{0234} f_{0235} f_{1234} f_{1235}$$

und

$$(19.) \quad m' = -m, \quad f' = \frac{f^4}{f_0 f_1 f_2 f_3} f$$

ist. Ferner kann sich z. B. σ'_{0145} von σ_{2345} nur um einen constanten Factor unterscheiden. Setzt man $u = 0$, so erhält man $\frac{\sigma'_{0145}}{f'_{0145}} = \frac{\sigma_{2345}}{f_{2345}}$. Es ergeben sich also die Relationen

$$(20.) \quad \sigma'(u) = \frac{\sigma_{0123}(u)}{f_{0123}}, \quad \sigma'_{0123}(u) = \frac{f^2 f_{0123}}{\sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3}}\sigma(u),$$

$$(21.) \quad \sigma'_{0124}(u) = -\frac{f\sqrt{f f_4}}{\sqrt{f_0 f_1 f^2}}\frac{\sigma_{0124}(u)}{f^2_{0124}},$$

$$(22.) \quad \sigma'_{0145}(u) = -\frac{f}{\sqrt{f_0 f_1 f_4 f_5}} f_{0145} f_{0234} f_{0235} f_{1234} f_{1235}\frac{\sigma_{2345}(u)}{f_{2345}}.$$

Berechnet man mittelst der Formel (12.) § 9 die Function ψ'_{01}, so vertauschen sich in der Summe nur die beiden letzten Glieder, und man erhält

$$(23.) \qquad \psi'_{01} = \psi_{01}, \quad \psi'_{45} = \psi_{45}.$$

Vertauscht man in jener Formel die Indices 1 und 4, so findet man

$$f_{5670}\psi'_{04} = \Sigma\sigma_{02\lambda}\sigma_{\lambda 567} = \psi_{0567}$$

und daher

$$(24.) \qquad \psi'_{04} = \frac{\psi_{1234}}{f_{1234}}, \quad \psi'_{40} = \frac{\psi_{5670}}{f_{5670}}.$$

Umgekehrt ergiebt sich aus der Formel $\psi'_{0567} = \Sigma\sigma'_{02\lambda}\sigma'_{\lambda 567}$ die Relation

$$(25.) \qquad \frac{\psi'_{1234}}{f'_{1234}} = \psi_{04}, \quad \frac{\psi'_{5670}}{f'_{5670}} = \psi_{40}.$$

Ferner ist $\psi'_{0123} = \Sigma\sigma'_{02\lambda}\sigma'_{\lambda 123} = -\frac{f^2}{\sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3}}\Sigma\sigma_{02\lambda}\sigma_{\lambda 123}$ und folglich

$$(26.) \qquad \frac{\psi'_{0123}}{f'_{0123}} = -\frac{\psi_{0123}}{f_{0123}}.$$

Den constanten Factor C, durch welchen sich ψ'_{0145} von ψ_{0145} unterscheidet, könnte man bestimmen, indem man in der Gleichung $\Sigma\sigma'_{02\lambda}\sigma'_{\lambda 145} = C\Sigma\sigma_{02\lambda}\sigma_{\lambda 145}$ $u = [02]$ setzt. Indessen ist es bequemer, die Methode anzuwenden, die ich J. C. § 7 benutzt habe. Man findet so

$$(27.) \qquad \frac{\psi'_{0145}}{f'_{0145}} = \frac{\psi_{0145}}{f_{0145}}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man jede Relation auf alle Formen bringen, die sie anzunehmen vermag. So ist z. B. nach (26.) § 8

$$\sigma'\begin{pmatrix}0&1&2&4\\0&1&2&4\end{pmatrix} = \psi'^2_{0124} + \varphi'\varphi'_{0124}$$

und nach (8.) § 5 $\varphi'_{0124} = f'^2_{0124}\varphi_{34}$ und folglich

$$(28.) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} & f^2_{0567}\sigma_{04} \\ \sigma_{23} & 0 & \sigma_{03} & f^2_{1567}\sigma_{14} \\ \sigma_{13} & \sigma_{03} & 0 & f^2_{2567}\sigma_{24} \\ f^2_{0567}\sigma_{04} & f^2_{1567}\sigma_{14} & f^2_{2567}\sigma_{24} & 0 \end{vmatrix} = (\Pi^2_\lambda f_{\lambda 567})^2(\psi^2_{34} + \varphi\varphi_{34}).$$

Die Function $\psi_{0234,1234}$ ist in § 6 durch folgende Bedingungen definirt: Ihre Charakteristik ist [01], ihre Entwicklung fängt an der Stelle [0234] mit den Gliedern der dritten Dimension an, und sie hat für $u = 0$ den Werth $f_{0234}f_{1234}$. In ähnlicher Weise definire ich allgemein, wenn a und b zwei azygetische Charakteristiken sind, eine Function $\psi_{a,b} = \psi_{b,a}$. Ihre Charakte-

ristik ist *ab*, ihre Entwicklung beginnt an der Stelle *a* (und mithin auch an der Stelle *b*) mit den Gliedern der dritten Dimension, und für $u = 0$ ist

$$\psi_{\varkappa\lambda,\varkappa\mu} = 1, \quad \psi_{\varkappa\lambda,\varkappa\alpha\beta\gamma} = f_{\varkappa\alpha\beta\gamma} \quad \text{und} \quad \psi_{\varkappa\lambda\mu\nu,\varkappa\lambda\mu\varrho} = f_{\varkappa\lambda\mu\nu} f_{\varkappa\lambda\mu\varrho}.$$

Dann ist $\psi'_{0134,0124} = f'_{0134} f'_{0124} \varphi_{24,34}$, und aus der Gleichung (28.) § 8

$$\sigma'\begin{pmatrix} 0\,1\,3\,4 \\ 0\,1\,2\,4 \end{pmatrix} = \psi'_{0134}\psi'_{0124} + \varphi'\psi'_{0134,0124}$$

ergiebt sich folglich die Relation

$$(29.) \quad \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} & f^2_{0567}\sigma_{04} \\ \sigma_{23} & 0 & \sigma_{03} & f^2_{1567}\sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma_{02} & \sigma_{01} & f^2_{3557}\sigma_{34} \\ f^2_{0567}\sigma_{04} & f^2_{1567}\sigma_{14} & f^2_{2567}\sigma_{24} & 0 \end{vmatrix} = -f^2_{0567} f^2_{1567} f_{2567} f_{3567} (\psi_{24}\psi_{34} + \varphi\psi_{24,34}).$$

Aus der Formel (29.) § 8

$$4\varphi'\sigma'_{23}\sigma'_{31}\sigma'_{12}\sigma'_{04}\sigma'_{05}\sigma'_{45} = \psi'^2_{1236}\varphi'_{1237} + \psi'^2_{1237}\varphi'_{1236} - 2\psi'_{1236}\psi'_{1237}\psi'_{1236,1237} + \varphi'(\varphi'_{1236}\varphi'_{1237} - \psi'^2_{1236,1237})$$

folgt die Relation

$$(30.) \quad \frac{4}{f}\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{03}\sigma_{04}\sigma_{05}\sigma_{67} = \psi^2_{06}\varphi_{07} + \psi^2_{07}\varphi_{06} - 2\psi_{06}\psi_{07}\psi_{06,07} + \varphi(\varphi_{06}\varphi_{07} - \psi^2_{06,07}).$$

Aus der Gleichung (20.) § 8

$$\sigma'_{0123}\psi'_{0123} = \sigma'_{23}\sigma'_{31}\sigma'_{12} + \sigma'_{02}\sigma'_{03}\sigma'_{23} + \sigma'_{03}\sigma'_{01}\sigma'_{31} + \sigma'_{01}\sigma'_{02}\sigma'_{12}$$

ergiebt sich

$$(31.) \quad -f\sigma\psi_{0123} = f_0\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{03} + f_1\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{13} + f_2\sigma_{20}\sigma_{21}\sigma_{23} + f_3\sigma_{30}\sigma_{31}\sigma_{32},$$

und mithin lässt sich der Quotient zweier geraden Sigmafunctionen in der Form

$$(32.) \quad \frac{\sigma_{0123}}{f\sigma} = -\frac{\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{12} + \sigma_{02}\sigma_{03}\sigma_{23} + \sigma_{03}\sigma_{01}\sigma_{31} + \sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{12}}{f_0\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{03} + f_1\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{13} + f_2\sigma_{20}\sigma_{21}\sigma_{23} + f_3\sigma_{30}\sigma_{31}\sigma_{32}}$$

durch die ungeraden Sigmafunctionen darstellen, oder es ist nach (18.) und (19.) § 9

$$(33.) \quad \begin{cases} \sigma([01, 02, 03]\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{12} - [10, 12, 13]\sigma_{02}\sigma_{03}\sigma_{23} + \cdots) \\ = \frac{\sigma_{0123}}{f_{0123}}([23, 31, 12]\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{03} + [23, 02, 03]\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{13} + \cdots). \end{cases}$$

Auf diese Formel, die man auch leicht direct herstellen kann, und die auch gilt, wenn man die constanten Factoren der Functionen $\sigma_{\alpha\beta}$ ganz willkürlich wählt, kann man, wie ich beiläufig zeigen will, einen neuen Beweis des Satzes gründen, den ich in meiner Arbeit *Ueber die constanten Factoren der Thetareihen* (siehe dieses Journal Bd. 98; § 5) entwickelt habe. Nach Formel (6.) § 2 ist

$$c\vartheta_k(v+w)\vartheta_k(w+u)\vartheta_k(u+v) = \sum_\lambda (\alpha\lambda)\vartheta_{k\alpha\lambda}(u)\vartheta_{k\alpha\lambda}(v)\vartheta_{k\alpha\lambda}(w)\vartheta_{k\alpha\lambda}(u+v+w).$$

Ist α einer der Indices 0, 1, 2, 3, und setzt man $w = [a] = [0123]$, und ersetzt man v durch $-v-u$, so findet man

$$c\vartheta_k(u)\vartheta_{k'}(u+v)\vartheta_k(v) - c'\vartheta_k(u)\vartheta_k(u+v)\vartheta_{k'}(v)$$
$$= \sum_\lambda((k, \alpha\lambda))(\alpha\lambda, a)\vartheta_{k'a\lambda}(0)\vartheta_{ka\lambda}(u)\vartheta_{k'a\lambda}(v)\vartheta_{ka\lambda}(u+v),$$

wo sich λ von 4 bis 7 bewegt. Vermehrt man v um $\alpha\beta$, wo $\beta = 0, 1, 2, 3$ von α verschieden ist, so erhält man

$$c\vartheta_{k'}(u)\vartheta_{k'a\beta}(u+v)\vartheta_{ka\beta}(v) - c'\vartheta_k(u)\vartheta_{ka\beta}(u+v)\vartheta_{k'a\beta}(v)$$
$$= \sum_\lambda((k, \alpha\lambda))(\lambda, a)(\alpha\lambda, \alpha\beta)\vartheta_{k'a\lambda}(0)\vartheta_{ka\lambda}(u)\vartheta_{k'\beta\lambda}(v)\vartheta_{k\beta\lambda}(u+v).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach v und setzt dann $v = 0$, so ergiebt sich

$$c\vartheta_{k'}(u)\vartheta_{k'a\beta}(u)d\vartheta_{ka\beta}(0) - c'\vartheta_k(u)\vartheta_{ka\beta}(u)d\vartheta_{k'a\beta}(0)$$
$$= \sum_\lambda((k, \alpha\lambda))(\lambda, a)(\alpha\lambda, \alpha\beta)\vartheta_{k'a\lambda}(0)\vartheta_{ka\lambda}(u)\vartheta_{k'\beta\lambda}(0)d\vartheta_{k\beta\lambda}(u).$$

Setzt man also

$$(\lambda, \alpha)\sqrt{((k, \lambda))}\sqrt{(\lambda, a)}\vartheta_{k'a\lambda}(0)\vartheta_{ka\lambda}(u) = R_{a\lambda} \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, 2, 3\\ \lambda = 4, 5, 6, 7\end{pmatrix},$$

so ist

$$\sum_\lambda R_{a\lambda}dR_{\beta\lambda} = ((k, \alpha))(\alpha, \alpha\beta)(c\vartheta_{k'}(u)\vartheta_{k'a\beta}(u)d\vartheta_{ka\beta}(0) - c'\vartheta_k(u)\vartheta_{ka\beta}(u)d\vartheta_{k'a\beta}(0)).$$

Setzt man aber in den obigen Gleichungen $v = 0$, so erhält man

$$\sum_\lambda R_{a\lambda}^2 = (c\vartheta_{k'}(u))^2 - (c'\vartheta_k(u))^2, \quad \sum_\lambda R_{a\lambda}R_{\beta\lambda} = 0.$$

Daher bilden die Grössen $R_{a\lambda}$ ein orthogonales System, und mithin ist die Determinante vierten Grades

$$|R_{a\lambda}| = \pm[(c\vartheta_{k'}(u))^2 - (c'\vartheta_k(u))^2]^2.$$

Sind φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 irgend vier Functionen von u', u'', u''', so bezeichne ich die Determinante

$$\left|\varphi_a, \quad \frac{\partial\varphi_a}{\partial u'}, \quad \frac{\partial\varphi_a}{\partial u''}, \quad \frac{\partial\varphi_a}{\partial u'''}\right| \qquad (a = 0, 1, 2, 3)$$

mit $[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$. Multiplicirt man dann die Determinante $[R_{04}, R_{05}, R_{06}, R_{07}]$ mit der Determinante $|R_{a\lambda}|$, so erhält man mit Hülfe der entwickelten Formeln

$$C(\sigma'^2 - \sigma^2)[\sigma_{04}, \sigma_{05}, \sigma_{06}, \sigma_{07}]$$
$$= |\sigma'\sigma_{23}a_{01}^{(\nu)} - \sigma\sigma_{01}a_{23}^{(\nu)}, \quad \sigma'\sigma_{31}a_{02}^{(\nu)} - \sigma\sigma_{02}a_{31}^{(\nu)}, \quad \sigma'\sigma_{12}a_{03}^{(\nu)} - \sigma\sigma_{03}a_{12}^{(\nu)}|$$
$$= \sigma'^3\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{12}[01, 02, 03]$$
$$-\sigma'^2\sigma(\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{13}[23, 02, 03] + \sigma_{20}\sigma_{21}\sigma_{23}[31, 03, 01] + \sigma_{30}\sigma_{31}\sigma_{32}[12, 01, 02])$$
$$+\sigma'\sigma^2(-\sigma_{02}\sigma_{03}\sigma_{23}[10, 12, 13] + \sigma_{03}\sigma_{01}\sigma_{31}[20, 21, 23] - \sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{12}[30, 31, 32])$$
$$-\sigma^3\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{03}[23, 31, 12],$$

wo C eine Constante und $\sigma'(u) = \frac{\sigma_{0123}(u)}{f_{0123}}$ ist. Aus dieser Gleichung folgt in Verbindung mit (33.)

$$C[\sigma_{04}, \sigma_{05}, \sigma_{06}, \sigma_{07}] = [23, 31, 12]\sigma\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{03} + [01, 02, 03]\sigma'\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{12}.$$

Vermehrt man hier u um eine beliebige halbe Periode, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$(34.) \quad [\vartheta_a, \vartheta_b, \vartheta_c, \vartheta_d] = A\vartheta_p\vartheta_q\vartheta_r\vartheta_s + B\vartheta_{pt}\vartheta_{qt}\vartheta_{rt}\vartheta_{st},$$

wo A und B zwei Constanten sind, die acht Charakteristiken a, b, c, d, p, q, r, s irgend ein Fundamentalsystem bilden und $t = pqrs \equiv abcd$ ist.

§ 11.

Die quadratische Form $h(z)$ und ihre adjungirte Form $g(w)$.

Setzt man in der Gleichung (10.) § 6 $v = -u$, $v' = 0$, $u' = [01]$, $w = [02]$, so erhält man

$$-8\vartheta_k(u)\vartheta_{k12}(u)\vartheta_{k20}(u)\vartheta_{k01}(u) = \sum_r (0r, r)(r, 12)\vartheta_{kr12}(0)\vartheta_{kr20}(0)\vartheta_{kr01}(0)\vartheta_{kr}(2u).$$

Da die linke Seite eine ungerade Function ist, so durchläuft kr nur die ungeraden Charakteristiken $[k\varkappa\lambda]$, und folglich ist

$$-8\vartheta_k(u)\vartheta_{k12}(u)\vartheta_{k20}(u)\vartheta_{k01}(u) = \sum_{\varkappa,\lambda}{}^{7}_{3}(012\varkappa\lambda, \varkappa\lambda)c_{12\varkappa\lambda}c_{20\varkappa\lambda}c_{01\varkappa\lambda}\vartheta_{k\varkappa\lambda}(2u).$$

Nach Formel (1.) und (20.) § 4 ist

$$cc_{012\varkappa}c_{012\lambda}g_{\varkappa,\lambda,012} = -(012\varkappa\lambda, \varkappa\lambda)c_{12\varkappa\lambda}c_{20\varkappa\lambda}c_{01\varkappa\lambda}g_{0,1,2}$$

und mithin nach (10.) und (18.) § 4

$$c^3 f_{012\varkappa}f_{012\lambda}g_{\varkappa\lambda} = -(012\varkappa\lambda, \varkappa\lambda)c_{12\varkappa\lambda}c_{20\varkappa\lambda}c_{01\varkappa\lambda}g_{12}g_{20}g_{01}.$$

Demnach ergiebt sich

$$8\sigma(u)\sigma_{12}(u)\sigma_{20}(u)\sigma_{01}(u) = \sum_{\varkappa,\lambda} f_{012\varkappa}f_{012\lambda}\sigma_{\varkappa\lambda}(2u)$$

und ebenso allgemein

$$(1.) \quad 8\sigma(u)\sigma_{\beta\gamma}(u)\sigma_{\gamma\alpha}(u)\sigma_{\alpha\beta}(u) = \sum_{\varkappa,\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\varkappa}f_{\alpha\beta\gamma\lambda}\sigma_{\varkappa\lambda}(2u),$$

wo $\varkappa$, λ alle verschiedenen Paare der Indices von 0 bis 7 durchlaufen. Setzt man also unter Anwendung der Bezeichnung (3.) § 9

$$(2.) \quad 8\sigma(u)h(z) = \sum_{\varkappa,\lambda} \sigma_{\varkappa\lambda}(2u)z_\varkappa z_\lambda,$$

so ist $h(z)$ eine quadratische Function der vier Variabeln $z^{(0)}$, z', z'', z''', welche an der Stelle

$$z^{(0)} = \begin{vmatrix} a'_\alpha & a''_\alpha & a'''_\alpha \\ a'_\beta & a''_\beta & a'''_\beta \\ a'_\gamma & a''_\gamma & a'''_\gamma \end{vmatrix}, \quad z' = -\begin{vmatrix} a^{(0)}_\alpha & a''_\alpha & a'''_\alpha \\ a^{(0)}_\beta & a''_\beta & a'''_\beta \\ a^{(0)}_\gamma & a''_\gamma & a'''_\gamma \end{vmatrix}, \quad z'' = \begin{vmatrix} a^{(0)}_\alpha & a'_\alpha & a'''_\alpha \\ a^{(0)}_\beta & a'_\beta & a'''_\beta \\ a^{(0)}_\gamma & a'_\gamma & a'''_\gamma \end{vmatrix}, \quad z''' = -\begin{vmatrix} a^{(0)}_\alpha & a'_\alpha & a''_\alpha \\ a^{(0)}_\beta & a'_\beta & a''_\beta \\ a^{(0)}_\gamma & a'_\gamma & a''_\gamma \end{vmatrix},$$

oder, wie ich mich kurz ausdrücken will, im Schnittpunkte der drei Ebenen a_α, a_β, a_γ den Werth $\sigma_{\beta\gamma}(u)\sigma_{\gamma\alpha}(u)\sigma_{\alpha\beta}(u)$ hat. Setzt man $s_{\lambda\lambda} = \sqrt{\varphi(2u)}$, $s_{\varkappa\lambda} = \sigma_{\varkappa\lambda}(2u)$, so ist nach Gleichung (5.) § 9 auch

$$16\sigma(u)h(z) = \sum_{\varkappa,\lambda} s_{\varkappa\lambda} z_\varkappa z_\lambda.$$

Sind nun $A^{(\mu)}_\lambda$ die in § 8 eingeführten Functionen, in denen aber u durch $2u$ ersetzt ist, und ist

$$\sum_\lambda A^{(\mu)}_\lambda a^{(\nu)}_\lambda = h^{(\nu)}_\mu \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3),$$

so ist nach (33.) und (34.) § 8

$$16\sigma(u)h(z) = \sum_\mu \Big(\sum_\nu h^{(\nu)}_\mu z^{(\nu)}\Big)^2.$$

Bezeichnet man also die Determinante von $h(z)$ mit D, so ist nach dem allgemeinen Multiplicationstheorem der Determinanten

$$(16\sigma(u))^2\sqrt{D} = |h^{(\nu)}_\mu| = \mathfrak{S} f_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Ist aber $\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu\nu$ eine eigentliche Vertauschung der Indices 0, 1, ... 7, so ist

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta\gamma\delta} + f_{\varkappa\lambda\mu\nu}F_{\varkappa\lambda\mu\nu} = f_{\alpha\beta\gamma\delta}(F_{\alpha\beta\gamma\delta} + F_{\varkappa\lambda\mu\nu}) = 2f_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{\varphi(2u)}\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(2u),$$

mithin

$$2^7(\sigma(u))^2\sqrt{D} = \sqrt{\varphi(2u)}\,\mathfrak{S} f_{0\alpha\beta\gamma}\sigma_{0\alpha\beta\gamma}(2u)$$

und folglich nach Formel (18.) § 5

$$(3.) \qquad 2^8 D = \varphi(u)^2\varphi(2u).$$

Die adjungirte Form von $h(z) = \Sigma a_{\mu\nu} z^{(\mu)} z^{(\nu)}$ bezeichne ich mit $\frac{1}{16}\varphi(u)g(w)$ und ihre Polare mit

$$\tfrac{1}{16}\varphi(u)g(v, w) = -\begin{vmatrix} 0 & w^{(0)} & w' & w'' & w''' \\ v^{(0)} & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v''' & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ich werde zeigen, dass die Coefficienten von $g(w)$ ungerade Thetafunctionen siebenten Grades (mit der Charakteristik k) sind, dass also die ersten Unterdeterminanten von D sämmtlich durch $\varphi(u)$ theilbar sind. Ist $\Phi(z)$ eine beliebige kubische Function der vier Variabeln $z^{(\nu)}$, und ist $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ ihr Werth

im Schnittpunkte der drei Ebenen a_α, a_β, a_γ, so ist

$$(4.) \qquad \frac{\Phi(z)h(z)}{\Pi z_\lambda} = \mathfrak{S}\frac{\Phi_{\alpha\beta\gamma}\sigma_{\beta\gamma}(u)\sigma_{\gamma\alpha}(u)\sigma_{\alpha\beta}(u)}{z_\alpha z_\beta z_\gamma \Pi' f_{\lambda\alpha\beta\gamma}},$$

wo λ in dem Producte $\Pi' f_{\lambda\alpha\beta\gamma}$ nur die 5 von α, β, γ verschiedenen Indices durchläuft. Denn die Differenz jener beiden Ausdrücke ist, mit Πz_λ multiplicirt, eine ganze Function fünften Grades, welche im Schnittpunkte von je drei der acht Ebenen a_0, a_1, ... a_7 Null ist und mithin identisch verschwindet (siehe dieses Journal Bd. 99, S. 288). Setzt man $\Phi(z) = z_5 z_6 z_7$, so ist demnach

$$(5.) \qquad -h(z) = \mathfrak{S}\frac{\sigma_{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\alpha}\sigma_{\alpha\beta}z_\varkappa z_\lambda}{f_{567\varkappa}f_{567\lambda}},$$

wo α, β, γ, $\varkappa$, λ die Indices 0, 1, 2, 3, 4 sind. Eliminirt man z_0 mittelst der Gleichung $\Sigma f_{567\lambda} z_\lambda = 0$, so möge sich ergeben $h(z) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{4}{}_1 p_{\varkappa\lambda} z_\varkappa z_\lambda$. Setzt man zur Abkürzung $\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{12} = v_{34} = v_{43}$, $\sigma_{01}\sigma_{03}\sigma_{13} = v_{24} = v_{42}$ u. s. w., ferner $v_{\lambda\lambda} = 0$ und $f_{567\lambda} = c_\lambda$, so ist

$$-2c_0^2 c_\varkappa c_\lambda p_{\varkappa\lambda} = c_0^2 v_{\varkappa\lambda} - c_\varkappa^2 v_{0\lambda} - c_\lambda^2 v_{\varkappa 0}.$$

Ist

$$w_1 = (w, a_2, a_3, a_4), \quad w_2 = -(w, a_1, a_3, a_4),$$
$$w_3 = (w, a_1, a_2, a_4), \quad w_4 = -(w, a_1, a_2, a_3),$$

also

$$\sum_{\lambda}^{4}{}_1 w_\lambda z_\lambda = f_{1234}\sum_{\nu}^{3}{}_0 w^{(\nu)} z^{(\nu)}$$

und $16c_0^2 q_{\varkappa\lambda} = \varphi(u)g(a_\varkappa, a_\lambda)$, so ist die Form $\frac{1}{16}\varphi(u)g(w) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{4}{}_1 q_{\varkappa\lambda} w_\varkappa w_\lambda$ die adjungirte der Form $\Sigma p_{\varkappa\lambda} z_\varkappa z_\lambda$ auch dann, wenn man z_1, ... z_4 und w_1, ... w_4 als die unabhängigen Variabeln betrachtet. Daher ist

$$q_{33}q_{44} - q_{34}^2 = (p_{11}p_{22} - p_{12}^2)|p_{\varkappa\lambda}| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, 3, 4)$$

und folglich, weil $c_0^2|p_{\varkappa\lambda}| = D$ ist,

$$g(a_3)g(a_4) - (g(a_3, a_4))^2 = c_0^2\varphi(2u)(p_{11}p_{22} - p_{12}^2).$$

Nun ist aber

$$4c_0^4 c_1 c_2(p_{11}p_{22} - p_{12}^2) = |c_0^2 v_{\alpha\beta} - c_\alpha^2 v_{0\beta} - v_{\alpha 0}c_\beta^2| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

eine Determinante zweiten Grades, die sich in die Determinante vierten Grades

$$-\begin{vmatrix} v_{00} & v_{01} & v_{02} & c_0^2 \\ v_{10} & v_{11} & v_{12} & c_1^2 \\ v_{20} & v_{21} & v_{22} & c_2^2 \\ c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 & 0 \end{vmatrix}$$

umwandeln lässt. Setzt man für $v_{\varkappa\lambda}$ seinen Werth ein, multiplicirt dann die Elemente der ersten Zeile und Colonne mit σ_{04}, die der zweiten mit σ_{14} und die der dritten mit σ_{24}, so enthält jedes der Elemente $v_{\varkappa\lambda}\sigma_{\varkappa 4}\sigma_{\lambda 4}$ den Factor $\sigma_{04}\sigma_{14}\sigma_{24}\sigma_{34}$, und man findet daher, dass jene Determinante gleich ist σ_{34}^2, multiplicirt mit der Determinante (28.) § 10. Folglich ist

$$g(a_3)g(a_4)-(g(a_3,\ a_4))^2 = -\tfrac{1}{4}\varphi(2u)\sigma_{34}^2(\psi_{34}^2+\varphi\varphi_{34})$$

und allgemein

$$(6.)\quad g(a_\alpha)g(a_\beta)-(g(a_\alpha,\ a_\beta))^2 = -\tfrac{1}{4}\varphi(2u)(\sigma_{\alpha\beta}(u))^2((\psi_{\alpha\beta}(u))^2+\varphi(u)\varphi_{\alpha\beta}(u)).$$

Ebenso ist

$$g(a_2,\ a_3)g(a_4)-g(a_2,\ a_4)g(a_3,\ a_4) = -c_0^2\varphi(2u)(p_{11}p_{23}-p_{12}p_{13})$$

und

$$4c_0^4c_1^2c_2c_3(p_{11}p_{23}-p_{12}p_{13}) = -\begin{vmatrix} v_{00} & v_{01} & v_{02} & c_0^2 \\ v_{10} & v_{11} & v_{12} & c_1^2 \\ v_{30} & v_{31} & v_{32} & c_3^2 \\ c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist gleich $\sigma_{24}\sigma_{34}$, multiplicirt mit der Determinante (29.) § 10. Daher ist

$$g(a_2,\ a_3)g(a_4)-g(a_2,\ a_4)g(a_3,\ a_4) = -\tfrac{1}{4}\varphi(2u)\sigma_{24}\sigma_{34}(\psi_{24}\psi_{34}+\varphi\psi_{24,34})$$

und allgemein

$$(7.)\quad \begin{cases} g(a_\alpha,\ a_\beta)g(a_\gamma)-g(a_\alpha,\ a_\gamma)g(a_\beta,\ a_\gamma) \\ = -\tfrac{1}{4}\varphi(2u)\sigma_{\alpha\gamma}(u)\sigma_{\beta\gamma}(u)(\psi_{\alpha\gamma}(u)\psi_{\beta\gamma}(u)+\varphi(u)\psi_{\alpha\gamma,\beta\gamma}(u)). \end{cases}$$

In ähnlicher Weise kann man auch die Determinante dritten Grades $q_{44} = \Sigma\pm p_{11}p_{22}p_{33}$ berechnen. Der Abwechslung halber schlage ich aber einen anderen Weg ein. Aus der Relation $\Sigma\pm q_{11}q_{22}q_{33} = p_{44}|p_{\varkappa\lambda}|^2$ folgt die Gleichung

$$\Sigma\pm g(a_1,\ a_1)g(a_2,\ a_2)g(a_3,\ a_3) = \tfrac{1}{16}\varphi(u)(\varphi(2u))^2\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{12}.$$

Daher ist

$$(g(a_0,\ a_0)g(a_6,\ a_6)-(g(a_0,\ a_6))^2)(g(a_0,\ a_0)g(a_7,\ a_7)-(g(a_0,\ a_7))^2)$$
$$-(g(a_0,\ a_0)g(a_6,\ a_7)-g(a_0,\ a_6)g(a_0,\ a_7))^2 = g(a_0,\ a_0)\Sigma\pm g(a_0,\ a_0)g(a_6,\ a_6)g(a_7,\ a_7)$$
$$= \tfrac{1}{16}g(a_0)\varphi(u)(\varphi(2u))^2\sigma_{06}\sigma_{07}\sigma_{67}.$$

Nach (6.) und (7.) ist aber die linke Seite gleich

$$\tfrac{1}{16}(\varphi(2u))^2\sigma_{06}^2\sigma_{07}^2((\psi_{06}^2+\varphi\varphi_{06})(\psi_{07}^2+\varphi\varphi_{07})-(\psi_{06}\psi_{07}+\varphi\psi_{06,07})^2).$$

Nach Formel (30.) § 10 ist folglich $g(a_0) = \frac{4}{f}\Pi\sigma_{0\lambda}$ und allgemein

$$(8.)\quad g(a_\alpha) = \frac{4}{f}\prod_\lambda\sigma_{\alpha\lambda}(u),$$

wo λ die sieben von α verschiedenen Indices durchläuft. Beiläufig ergiebt sich aus dieser Formel in Verbindung mit der Gleichung (6.) § 9 die merkwürdige Relation

$$(9.) \qquad (\Pi\sigma_{0\lambda})+(\Pi\sigma_{1\lambda})+\cdots+(\Pi\sigma_{7\lambda}) = 0$$

und mithin nach (11.) § 4

$$(10.) \qquad (j, 0)(0, k)(\Pi\vartheta_{k0\lambda})+(j, 1)(1, k)(\Pi\vartheta_{k1\lambda})+\cdots+(j, 7)(7, k)(\Pi\vartheta_{k7\lambda}) = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}&(g(a_0, a_0)g(a_1, a_1)-(g(a_0, a_1))^2)(g(a_0, a_1)g(a_2, a_2)-g(a_0, a_2)g(a_1, a_2))\\ &+(g(a_0, a_0)g(a_1, a_2)-g(a_0, a_1)g(a_0, a_2))(g(a_1, a_1)g(a_0, a_2)-g(a_1, a_0)g(a_1, a_2))\\ &= g(a_0, a_1)\Sigma\pm g(a_0, a_0)g(a_1, a_1)g(a_2, a_2)\end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\varphi g(a_0, a_1)}{\sigma_{01}} = (\psi_{01}^2+\varphi\varphi_{01})(\psi_{02}\psi_{12}+\varphi\psi_{02,12})+(\psi_{01}\psi_{02}+\varphi\psi_{01,02})(\psi_{10}\psi_{12}+\varphi\psi_{10,12}),$$

wo sich die durch φ nicht theilbaren Glieder aufheben. Allgemein ist folglich

$$(11.) \quad \begin{cases} \dfrac{g(a_\alpha, a_\beta)}{\sigma_{\alpha\beta}(u)} = (\psi_{\alpha\beta}(u))^2\psi_{\gamma\alpha,\gamma\beta}(u)+\psi_{\alpha\beta}(u)\psi_{\alpha\gamma}(u)\psi_{\beta\alpha,\beta\gamma}(u) \\ +\psi_{\beta\alpha}(u)\psi_{\beta\gamma}(u)\psi_{\alpha\beta,\alpha\gamma}(u)+\varphi_{\alpha\beta}(u)\psi_{\gamma\alpha}(u)\psi_{\gamma\beta}(u)+\varphi(u)\psi_{\alpha\beta,\alpha\gamma}(u)\psi_{\beta\alpha,\beta\gamma}(u) \\ +\varphi(u)\varphi_{\alpha\beta}(u)\psi_{\gamma\alpha,\gamma\beta}(u). \end{cases}$$

Dieser Ausdruck hat demnach für jeden von α und β verschiedenen Index γ denselben Werth.

Bezeichnet man die Glieder der fünften Dimension in der Entwicklung von $g(w)$ nach Potenzen von u (falls man u durch x ersetzt) mit $2F(x)G(x; w)$ und die Polare von $G(x; w)$ mit $G(x; v, w)$, so ist nach Formel (8.) und (11.)

$$(12.) \qquad G(x;\ a_\alpha) = 0, \quad G(x;\ a_\alpha,\ a_\beta) = x_{\alpha\beta}.$$

Demnach ist $G(x; w) = x'G'(w)+x''G''(w)+x'''G'''(w)$ eine ganze lineare Function von x, und $G'(w) = 0$, $G''(w) = 0$, $G'''(w) = 0$ sind die Gleichungen dreier Flächen zweiter Klasse, welche die acht Ebenen $a_0, a_1, \ldots a_7$ berühren. Dieselben werden nicht von einer und derselben Developpabeln vierter Klasse umhüllt. Denn sonst würde, wie sich aus den oben aufgestellten Formeln leicht ergiebt, die Determinante von je drei der linearen Functionen $x_{\alpha\beta}$ verschwinden.

Bezeichnet man die *Hesse*sche Covariante von $F(x)$ mit

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(\mu)}\partial x^{(\nu)}}\right| = -288m^2G(x),$$

so ist, wie ich J. C. § 11. gezeigt habe,

$$G \equiv G_{\alpha\beta}G_{\alpha\gamma}+G_{\beta\gamma}G_{\beta\alpha}+G_{\gamma\alpha}G_{\gamma\beta} \pmod{F}.$$

Sind also die Glieder der sechsten Dimension in $\varphi(u)$ gleich $G'(x)$, so sind sie in $\frac{g(a_\alpha, a_\beta)}{\sigma_{\alpha\beta}}$ nach (11.) congruent $G_{\alpha\beta}^2+G+2G'$. Vergleicht man daher in der Formel (6.), nachdem man sie durch $\sigma_{\alpha\beta}^2$ dividirt hat, die Glieder der zehnten Dimension, so erhält man

$$3G' \equiv G \pmod{F}.$$

Die Glieder der sechsten Dimension in $\varphi(u)$ sind also $\frac{1}{3}G(x)+F(x)Q(x)$, wo $Q(x)$ eine quadratische Function ist.

§ 12.

Die Function $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)$.

Die Berechnung derjenigen Determinanten zweiten Grades des Systems $g(a_\alpha, a_\beta)$, die im vorigen Paragraphen noch nicht bestimmt sind, führt auf eine bisher noch nicht betrachtete Thetafunction vierten Grades. Durch die Gleichung

$$(1.) \qquad f^2 p_{01,23} = \Pi_\lambda^7 f_{014\lambda} f_{234\lambda},$$

wo der Index 4 nur scheinbar bevorzugt ist, wird eine Constante $p_{\alpha\beta,\gamma\delta} = p_{\gamma\delta,\alpha\beta}$ definirt, die das Zeichen wechselt, wenn man α mit β oder γ mit δ vertauscht. Nach Formel (9.) und (10.) § 9 ist

$$f_{0123}p_{01,23} = -\frac{f_{0123}^2}{f^2}\frac{(\Pi f_{014\lambda})(\Pi f_{234\lambda})}{(\Pi f_{567\lambda})} = (0123)(01,23)\varepsilon\left(\frac{g_{0,1,2}g_{0,1,3}g_{0,1,4}g_{2,3,4}g_{23}}{g_{5,6,7}\,g\,g_{01}\,c^3\,c_{0123}}\right)^2,$$

also nach (4.) § 4

$$(2.) \qquad f_{0123}p_{01,23} = (0123)(01,23)\varepsilon\left(\frac{g_{01}g_{23}}{g\,c\,c_{0123}}\right)^2.$$

Aehnlich wie die Formeln (10.) und (11.) § 9 und (15.) § 10 den Formeln (1.), (20.) und (7.) § 4 entsprechen, entspricht diese Formel der Formel (22.) § 4, und man kann auch Formeln aufstellen, die den Formeln (21.), (23.) und (6.) § 4 in derselben Weise analog sind.

Setzt man in der Gleichung (11.) § 6 $v = -u$, so erhält man

$$8\vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u)\vartheta_{k23}(u)\vartheta_{k0123}(u) = \Sigma(r, 0123r)\vartheta_{kr01}(0)\vartheta_{kr23}(0)\vartheta_{kr0123}(0)\vartheta_{kr}(2u).$$

Hier kann r nur gleich $[02\varkappa\lambda]$ oder $[03\varkappa\lambda]$ sein, wo $\varkappa, \lambda = 4, 5, 6, 7$ ist, und folglich ist

$$8\vartheta_k(u)\vartheta_{k01}(u)\vartheta_{k23}(u)\vartheta_{k0123}(u)$$
$$= \sum_{\varkappa,\lambda}^{4,7}(0,12)(2,03)(0123\varkappa\lambda, \varkappa\lambda)c_{02\varkappa\lambda}c_{31\varkappa\lambda}c_{03\varkappa\lambda}c_{12\varkappa\lambda}\left(\frac{\vartheta_{k02\varkappa\lambda}(2u)}{c_{02\varkappa\lambda}} - \frac{\vartheta_{k03\varkappa\lambda}(2u)}{c_{03\varkappa\lambda}}\right).$$

Aus den Gleichungen (22.) und (23.) § 4 ergiebt sich aber

$$\frac{g_{4501}g_{4523}}{g_{0123}}cc_{0123}c_{0145}c_{2345} = \frac{g_{01}g_{23}}{g_{0123}}(0,12)(2,03)(45,67)c_{0245}c_{3145}c_{0345}c_{1245}$$

und mithin

$$(0,12)(2,03)(45,67)g_{01}g_{23}c_{0245}c_{3145}c_{0345}c_{1245} = c^3c_{0123}f_{0145}f_{2345}.$$

Daher ist

$$(3.)\qquad 8\sigma(u)\sigma_{01}(u)\sigma_{23}(u)\frac{\sigma_{0123}(u)}{f_{0123}} = \mathop{\mathfrak{S}}_{\varkappa,\lambda}^{7}{}_{4}f_{01\varkappa\lambda}f_{23\varkappa\lambda}\Big(\frac{\sigma_{02\varkappa\lambda}}{f_{02\varkappa\lambda}}-\frac{\sigma_{03\varkappa\lambda}}{f_{03\varkappa\lambda}}\Big).$$

Nun ist nach Gleichung (9.) § 9 und (2.)

$$p_{01,23} = \frac{(0,13)(3,02)cg_{01}g_{23}}{c_{0123}g_{02}g_{31}g_{03}g_{12}}.$$

Durch Vermehrung von u um $[02]$ findet man folglich

$$(4.)\qquad 8p_{01,23}\sigma_{02}(u)\sigma_{31}(u)\sigma_{03}(u)\sigma_{12}(u) = \mathop{\mathfrak{S}}_{\varkappa,\lambda}^{7}{}_{4}f_{01\varkappa\lambda}f_{23\varkappa\lambda}\Big(\frac{\sigma_{02\varkappa\lambda}(2u)}{f_{02\varkappa\lambda}}+\frac{\sigma_{03\varkappa\lambda}(2u)}{f_{03\varkappa\lambda}}\Big).$$

Setzt man also

$$(5.)\qquad \chi_{0123}(u) = p_{01,23}\sigma_{02}\sigma_{31}\sigma_{03}\sigma_{12}+p_{02,31}\sigma_{03}\sigma_{12}\sigma_{01}\sigma_{23}+p_{03,12}\sigma_{01}\sigma_{23}\sigma_{02}\sigma_{31},$$

so ist nach (2.) § 9

$$(6.)\qquad -8\chi_{0123}(u) = \mathop{\mathfrak{S}}_{\varkappa,\lambda}(f_{01\varkappa\lambda}\sigma_{23\varkappa\lambda}(2u)+f_{02\varkappa\lambda}\sigma_{31\varkappa\lambda}(2u)+f_{03\varkappa\lambda}\sigma_{12\varkappa\lambda}(2u)).$$

Dieser Gleichung zufolge ist

$$(7.)\qquad \chi_{a\beta\gamma\delta}(u) = \pm\chi_{\varkappa\lambda\mu\nu}(u).$$

Die Function $\chi_{a\beta\gamma\delta}$ wechselt das Zeichen, wenn man irgend zwei ihrer Indices vertauscht. Eigentlich müsste diese Function mit $\chi_{k,ka\beta\gamma\delta}$ bezeichnet werden. In ähnlicher Weise entspricht jedem Paar gerader Charakteristiken eine Function $\chi_{a,b}$, und folglich ist die Anzahl solcher Functionen gleich $\frac{36.35}{2}=630$, wie ich J. C. § 13 auf einem anderen Wege berechnet habe.

Setzt man ferner

$$(8.)\qquad \chi_{01,23}(u) = p_{01,23}\sigma_{02}\sigma_{31}\sigma_{03}\sigma_{12}+\frac{\sigma\sigma_{0123}}{f_{0123}}(\sigma_{02}\sigma_{31}-\sigma_{03}\sigma_{12}),$$

so ist

$$(9.)\qquad \chi_{a\beta\gamma\delta} = \chi_{a\beta,\gamma\delta}+\chi_{a\gamma,\delta\beta}+\chi_{a\delta,\beta\gamma}$$

und nach (3.) und (4.)

$$(10.)\qquad 8\chi_{01,23}(u) = \mathop{\mathfrak{S}}_{\varkappa,\lambda}(f_{01\varkappa\lambda}\sigma_{23\varkappa\lambda}(2u)-f_{02\varkappa\lambda}\sigma_{31\varkappa\lambda}(2u)-f_{03\varkappa\lambda}\sigma_{12\varkappa\lambda}(2u)).$$

Die Function $\chi_{0123}(u)$ hat die Periode $[0123]$, und aus den Gleichungen (6.)

und (10.) ergiebt sich, dass

$$(11.) \qquad \chi_{01,23}(u) = \frac{(01)\chi_{0123}(u+[01])}{(\eta_{01}(u))^4} = \frac{(23)\chi_{0123}(u+[23])}{(\eta_{23}(u))^4}$$

ist. Zu den Functionen $\psi_{\alpha\beta}$ steht die Function $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ in einer einfachen Beziehung, die man auf folgendem Wege finden kann: Die Summe

$$\begin{aligned}&\Sigma(F_{0\alpha\beta\gamma}f_{1\alpha\beta\gamma}-F_{1\alpha\beta\gamma}f_{0\alpha\beta\gamma})(F_{2\varkappa\lambda\mu}f_{3\varkappa\lambda\mu}-F_{3\varkappa\lambda\mu}f_{2\varkappa\lambda\mu})\\ &+(F_{0\alpha\beta\gamma}f_{2\alpha\beta\gamma}-F_{2\alpha\beta\gamma}f_{0\alpha\beta\gamma})(F_{3\varkappa\lambda\mu}f_{1\varkappa\lambda\mu}-F_{1\varkappa\lambda\mu}f_{3\varkappa\lambda\mu})\\ &+(F_{0\alpha\beta\gamma}f_{3\alpha\beta\gamma}-F_{3\alpha\beta\gamma}f_{0\alpha\beta\gamma})(F_{1\varkappa\lambda\mu}f_{2\varkappa\lambda\mu}-F_{2\varkappa\lambda\mu}f_{1\varkappa\lambda\mu}),\end{aligned}$$

in der sich jeder der sechs Indices von 0 bis 7 bewegt, zerfällt, wenn man die Multiplicationen ausführt, in zwölf Summen, von denen ich je zwei vereinige. Dann ist z. B. nach (13.) § 8

$$\begin{aligned}-\mathfrak{S}_{01} &= \Sigma f_{0\alpha\beta\gamma}f_{1\varkappa\lambda\mu}(F_{2\alpha\beta\gamma}F_{3\varkappa\lambda\mu}-F_{3\alpha\beta\gamma}F_{2\varkappa\lambda\mu})\\ &= \Sigma f_{0\alpha\beta\gamma}f_{1\varkappa\lambda\mu}(F_{\alpha\beta\gamma\varkappa}F_{23\lambda\mu}+F_{\alpha\beta\gamma\lambda}F_{23\mu\varkappa}+F_{\alpha\beta\gamma\mu}F_{23\varkappa\lambda}).\end{aligned}$$

Da sich die drei Summen, die hier auftreten, nur durch die Bezeichnung der Summationsbuchstaben unterscheiden, so ist mithin

$$-\mathfrak{S}_{01} = 3\Sigma f_{0\alpha\beta\gamma}f_{1\varkappa\lambda\delta}F_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{23\varkappa\lambda}.$$

Vertauscht man δ mit α, β und γ und addirt die drei so erhaltenen Summen zu der ursprünglichen, so erhält man

$$-4\mathfrak{S}_{01} = 3\Sigma(f_{1\varkappa\lambda\delta}f_{0\alpha\beta\gamma}-f_{1\varkappa\lambda\alpha}f_{0\delta\beta\gamma}-f_{1\varkappa\lambda\beta}f_{0\alpha\delta\gamma}-f_{1\varkappa\lambda\gamma}f_{0\alpha\beta\delta})F_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{23\varkappa\lambda},$$

und folglich nach (2.) § 9

$$-4\mathfrak{S}_{01} = 3\Sigma f_{\alpha\beta\gamma\delta}f_{01\varkappa\lambda}F_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{23\varkappa\lambda}.$$

Ebenso findet man

$$-4\mathfrak{S}_{23} = 4\Sigma F_{0\alpha\beta\gamma}F_{1\varkappa\lambda\mu}(f_{2\alpha\beta\gamma}f_{3\varkappa\lambda\mu}-f_{3\alpha\beta\gamma}f_{2\varkappa\lambda\mu}) = 3\Sigma f_{\alpha\beta\gamma\delta}f_{23\varkappa\lambda}F_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{01\varkappa\lambda}.$$

Da nun z. B. $\Sigma f_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta\gamma\delta} = 24\mathfrak{S}f_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist, so erhält man die identische Determinantenrelation

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}(F_{0\alpha\beta\gamma}f_{1\alpha\beta\gamma}-F_{1\alpha\beta\gamma}f_{0\alpha\beta\gamma}).\mathfrak{S}(F_{2\alpha\beta\gamma}f_{3\alpha\beta\gamma}-F_{3\alpha\beta\gamma}f_{2\alpha\beta\gamma})\\ &+\mathfrak{S}(F_{0\alpha\beta\gamma}f_{2\alpha\beta\gamma}-F_{2\alpha\beta\gamma}f_{0\alpha\beta\gamma}).\mathfrak{S}(F_{3\alpha\beta\gamma}f_{1\alpha\beta\gamma}-F_{1\alpha\beta\gamma}f_{3\alpha\beta\gamma})\\ &+\mathfrak{S}(F_{0\alpha\beta\gamma}f_{3\alpha\beta\gamma}-F_{3\alpha\beta\gamma}f_{0\alpha\beta\gamma}).\mathfrak{S}(F_{1\alpha\beta\gamma}f_{2\alpha\beta\gamma}-F_{2\alpha\beta\gamma}f_{1\alpha\beta\gamma})\\ =&-\mathfrak{S}(f_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta\gamma\delta}).\mathfrak{S}(f_{01\varkappa\lambda}F_{23\varkappa\lambda}+f_{23\varkappa\lambda}F_{01\varkappa\lambda}+f_{02\varkappa\lambda}F_{31\varkappa\lambda}+f_{31\varkappa\lambda}F_{02\varkappa\lambda}+f_{03\varkappa\lambda}F_{12\varkappa\lambda}+f_{12\varkappa\lambda}F_{03\varkappa\lambda}).\end{aligned}$$

Mit Hülfe der Formeln (37.) § 8, (18.) § 5, (17.) § 6 und (6.) ergiebt sich daraus die Gleichung

$$(12.) \qquad \sigma_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}\psi_{\gamma\delta}+\sigma_{\alpha\gamma}\psi_{\alpha\gamma}\sigma_{\delta\beta}\psi_{\delta\beta}+\sigma_{\alpha\delta}\psi_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma}\psi_{\beta\gamma} = \varphi.\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Vermehrt man in der Gleichung (18.) § 5 u um $[01]$, so erhält man bis auf einen constanten Factor

$$(13.)\quad 8(\sigma_{01}(u))^2\varphi_{01}(u) = -\mathfrak{S}_{\varkappa,\lambda} f_{01\varkappa\lambda}\sigma_{01\varkappa\lambda}(2u)+\mathfrak{S}^{7}_{2\,\alpha,\beta,\gamma} f_{0\alpha\beta\gamma}\sigma_{0\alpha\beta\gamma}(2u).$$

Aus den Gleichungen (5.), (6.) und (17.) § 5 (für $v=0$) ergiebt sich die Relation

$$4(\sigma_{01}(u))^2 = -\mathfrak{S}_{\varkappa,\lambda}(\sigma_{01\varkappa\lambda}(u))^2+\mathfrak{S}^{7}_{2\,\alpha,\beta,\gamma}(\sigma_{0\alpha\beta\gamma}(u))^2.$$

Betrachtet man in diesen beiden Formeln die Glieder der zweiten Dimension, so erkennt man, dass der constante Factor in der Gleichung (13.) richtig bestimmt ist. Vermehrt man in dem Ausdruck (17.) § 6 für $\sigma\sigma_{12}\psi_{12}$ die Variable um $[01]$, so erhält man bis auf einen constanten Factor

$$(14.)\quad -8\sigma_{01}(u)\sigma_{02}(u)\psi_{01,02}(u) = \mathfrak{S}_{\varkappa,\lambda}(f_{01\varkappa\lambda}\sigma_{02\varkappa\lambda}(2u)+f_{02\varkappa\lambda}\sigma_{01\varkappa\lambda}(2u)).$$

Dass der constante Factor richtig bestimmt ist, erkennt man mit Hülfe der Gleichung

$$-2\sigma_{01}(u)\sigma_{02}(u) = \mathfrak{S}_{\varkappa,\lambda}\sigma_{01\varkappa\lambda}(u)\sigma_{02\varkappa\lambda}(u),$$

die sich aus (1.) § 8 ergiebt.

Nach diesen Vorbereitungen wende ich mich zur Bestimmung der Determinante $g(a_\alpha, a_\gamma)g(a_\beta, a_\delta)-g(a_\alpha, a_\delta)g(a_\beta, a_\gamma)$, welche ich gleich

$$-\tfrac{1}{4}\varphi(2u)(\sigma_{\alpha\beta}(u)\sigma_{\gamma\delta}(u)\psi_{\alpha\beta}(u)\psi_{\gamma\delta}(u)-\varphi(u)\chi_{\alpha\beta,\gamma\delta}(u)-f_{\alpha\beta\gamma\delta}t_{\alpha\beta\gamma\delta})$$

setze. Um die so definirte Grösse $t_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zu berechnen, betrachte ich die lineare Function

$$f(w) = \frac{4}{\varphi(2u)}(g(a_0, a_2)g(a_1, w)-g(a_1, a_2)g(a_0, w))$$
$$+\frac{\sigma_{01}(u)\psi_{01}(u)}{8\sigma(u)}\mathfrak{S}_{\alpha,\beta,\gamma}\sigma_{2\alpha\beta\gamma}(2u)(w, a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)$$
$$-\frac{\varphi(u)}{8}\mathfrak{S}_{\varkappa,\lambda}(\sigma_{01\varkappa\lambda}(2u)(a_2, w, a_\varkappa, a_\lambda)-\sigma_{02\varkappa\lambda}(2u)(w, a_1, a_\varkappa, a_\lambda)-\sigma_{12\varkappa\lambda}(2u)(a_0, w, a_\varkappa, a_\lambda)).$$

Ist $\lambda > 2$, so ist $f(a_\lambda) = f_{012\lambda}t_{012\lambda}$. Nach (7.) § 11 ist $f(a_0) = f(a_1) = f(a_2) = 0$. Endlich ist nach (6.) § 9 $\sum_\lambda f_{567\lambda}f(a_\lambda) = 0$ und folglich $t_{0123} = t_{0124}$. Daher ist $t_{\alpha\beta\gamma\delta}$ von δ unabhängig. Da ferner $t_{\alpha\beta\gamma\delta} = t_{\beta\alpha\delta\gamma} = t_{\gamma\delta\alpha\beta} = t_{\delta\gamma\beta\alpha}$ ist, so ist $t_{\alpha\beta\gamma\delta} = t$ von den Indices unabhängig. Aus der Identität

$$(g(a_\alpha, a_\gamma)g(a_\beta, a_\delta)-g(a_\alpha, a_\delta)g(a_\beta, a_\gamma))+(g(a_\alpha, a_\delta)g(a_\beta, a_\gamma)-g(a_\alpha, a_\beta)g(a_\gamma, a_\delta))$$
$$+(g(a_\alpha, a_\beta)g(a_\gamma, a_\delta)-g(a_\alpha, a_\gamma)g(a_\beta, a_\delta)) = 0$$

erkennt man mit Hülfe der Gleichungen (9.) und (12.), dass $t=0$ ist. Demnach erhält man die Relation

$$(15.)\quad \begin{cases} g(a_\alpha, a_\gamma)g(a_\beta, a_\delta)-g(a_\alpha, a_\delta)g(a_\beta, a_\gamma) \\ = -\tfrac{1}{4}\varphi(2u)(\sigma_{\alpha\beta}(u)\sigma_{\gamma\delta}(u)\psi_{\alpha\beta}(u)\psi_{\gamma\delta}(u)-\varphi(u)\chi_{\alpha\beta,\gamma\delta}(u)). \end{cases}$$

§ 13.

Die Function $h(y, z)$.

Ist $h(y, z)$ die Polare von $h(z)$ und $h_{\alpha\beta\gamma,\alpha'\beta'\gamma'}$ ihr Werth, falls man für y die Coordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen a_α, a_β, a_γ und für z die des Schnittpunktes der drei Ebenen $a_{\alpha'}$, $a_{\beta'}$, $a_{\gamma'}$ setzt, so ist

$$(1.)\quad \Sigma \pm g(a_\alpha, a_{\alpha'}) g(a_\beta, a_{\beta'}) g(a_\gamma, a_{\gamma'}) = \tfrac{1}{16}\varphi(u)(\varphi(2u))^2 h_{\alpha\beta\gamma,\alpha'\beta'\gamma'},$$

und wie leicht zu zeigen

$$(2.)\quad \begin{cases} -\begin{vmatrix} 0 & f_{\alpha'\beta'\gamma'\varkappa'} & f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda'} & f_{\alpha'\beta'\gamma'\mu'} \\ f_{\alpha\beta\gamma\varkappa} & g(a_\varkappa, a_{\varkappa'}) & g(a_\varkappa, a_{\lambda'}) & g(a_\varkappa, a_{\mu'}) \\ f_{\alpha\beta\gamma\lambda} & g(a_\lambda, a_{\varkappa'}) & g(a_\lambda, a_{\lambda'}) & g(a_\lambda, a_{\mu'}) \\ f_{\alpha\beta\gamma\mu} & g(a_\mu, a_{\varkappa'}) & g(a_\mu, a_{\lambda'}) & g(a_\mu, a_{\mu'}) \end{vmatrix} \\ = \varphi(2u)(h_{\alpha\beta\gamma,\alpha'\beta'\gamma'} h_{\varkappa\lambda\mu,\varkappa'\lambda'\mu'} - h_{\alpha\beta\gamma,\varkappa'\lambda'\mu'} h_{\varkappa\lambda\mu,\alpha'\beta'\gamma'}). \end{cases}$$

Einen speciellen Fall dieser Formel, nämlich die Gleichung

$$(3.)\quad \begin{cases} f_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} (g(a_\alpha, a_{\alpha'}) g(a_\beta, a_{\beta'}) - g(a_\alpha, a_{\beta'}) g(a_\beta, a_{\alpha'})) \\ \quad = \varphi(2u)(h_{\alpha\beta\gamma,\alpha'\beta'\gamma'} h_{\alpha\beta\delta,\alpha'\beta'\delta'} - h_{\alpha\beta\gamma,\alpha'\beta'\delta'} h_{\alpha\beta\delta,\alpha'\beta'\gamma'}) \end{cases}$$

habe ich in § 11 mehrfach benutzt.

Um jene Werthe von $h(y, z)$ zu berechnen, führe ich die Bezeichnungen

$$(4.)\quad \sigma_{\varkappa\lambda}(u)\psi_{\varkappa\lambda}(u) = \Psi_{\varkappa\lambda}(u), \quad \sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = f_{\alpha\beta\gamma\delta}\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)$$

ein. Diese Functionen wechseln das Zeichen, wenn man zwei ihrer Indices vertauscht, und es ist

$$(5.)\quad \Psi_{\varkappa\lambda\mu\nu}(u) = \mp \Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u).$$

Sind zwei der Indices gleich, so sollen diese Ausdrücke identisch verschwinden. Sowohl zwischen den geraden Functionen $\Psi_{\varkappa\lambda}$, wie zwischen den ungeraden Functionen $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ giebt es eine grosse Anzahl linearer Gleichungen. Nach Formel (17.) § 6 und (18.) § 5 ist

$$(6.)\quad 8\sigma(u)\Psi_{\varkappa\lambda}(u) = \mathop{\mathfrak{S}}_{\alpha,\beta,\gamma} f_{\lambda\alpha\beta\gamma}\sigma_{\varkappa\alpha\beta\gamma}(2u) = -\mathop{\mathfrak{S}}_{\alpha,\beta,\gamma} f_{\varkappa\alpha\beta\gamma}\sigma_{\lambda\alpha\beta\gamma}(2u)$$

und

$$8(\sigma(u))^2\varphi(u) = \mathop{\mathfrak{S}}_{\alpha,\beta,\gamma} f_{\varkappa\alpha\beta\gamma}\sigma_{\varkappa\alpha\beta\gamma}(2u).$$

Nach Gleichung (1.) § 9 ist daher

$$(7.)\quad \sum_\lambda f_{\alpha\beta\gamma\lambda}\Psi_{\lambda\delta}(u) = f_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma(u)\varphi(u),$$

gleichgültig ob die Indices α, β, γ, δ verschieden sind oder nicht, und

allgemeiner

$$(8.) \qquad \sum_{\lambda} \Psi_{\varkappa\lambda} z_\lambda = -\sigma(u)\varphi(u) z_\varkappa.$$

Von den mannigfachen Gleichungen, die sich hieraus ableiten lassen, erwähne ich nur die folgende: Durchlaufen $\varkappa$, λ die Indices 0, 1, 2 und μ, ν die Indices 3, 4, 5, so ist

$$\sum_{\lambda} \Psi_{\varkappa\lambda} f_{\beta\lambda 67} + \sum_{\nu} \Psi_{\varkappa\nu} f_{\beta\nu 67} = -\sigma\varphi f_{\beta\varkappa 67}$$

und folglich

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \Psi_{\varkappa\lambda} f_{\alpha\varkappa 67} f_{\beta\lambda 67} + \sum_{\varkappa,\nu} \Psi_{\varkappa\nu} f_{\alpha\varkappa 67} f_{\beta\nu 67} = -\sigma\varphi \sum_{\varkappa} f_{\alpha\varkappa 67} f_{\beta\varkappa 67}.$$

Ebenso ist

$$\sum_{\varkappa,\nu} \Psi_{\varkappa\nu} f_{\alpha\varkappa 67} f_{\beta\nu 67} + \sum_{\mu,\nu} \Psi_{\mu\nu} f_{\alpha\mu 67} f_{\beta\nu 67} = +\sigma\varphi \sum_{\nu} f_{\alpha\nu 67} f_{\beta\nu 67}$$

und mithin

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \Psi_{\varkappa\lambda} f_{\alpha\varkappa 67} f_{\beta\lambda 67} = \sum_{\mu,\nu} \Psi_{\mu\nu} f_{\alpha\mu 67} f_{\beta\nu 67},$$

oder weil

$$f_{\alpha\varkappa 67} f_{\beta\lambda 67} - f_{\alpha\lambda 67} f_{\beta\varkappa 67} = f_{\alpha\beta 67} f_{\varkappa\lambda 67}$$

ist,

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \Psi_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\lambda 67} = \sum_{\mu,\nu} \Psi_{\mu\nu} f_{\mu\nu 67}.$$

Allgemein ist, wenn α, β, γ, $\varkappa$, λ, μ sechs verschiedene Indices sind,

$$(9.) \qquad (f_{\alpha\beta\gamma\varkappa}\Psi_{\lambda\mu} + f_{\alpha\beta\gamma\lambda}\Psi_{\mu\varkappa} + f_{\alpha\beta\gamma\mu}\Psi_{\varkappa\lambda}) + (f_{\varkappa\lambda\mu\alpha}\Psi_{\beta\gamma} + f_{\varkappa\lambda\mu\beta}\Psi_{\gamma\alpha} + f_{\varkappa\lambda\mu\gamma}\Psi_{\alpha\beta}) = 0.$$

Setzt man die Ausdrücke (1.) § 11 in die Gleichung (20.) § 8 ein, so erhält man

$$(10.) \quad 8\sigma(u)\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = \sum_{\lambda} (f_{\lambda\beta\gamma\delta}\sigma_{\alpha\lambda}(2u) + f_{\alpha\lambda\gamma\delta}\sigma_{\beta\lambda}(2u) + f_{\alpha\beta\lambda\delta}\sigma_{\gamma\lambda}(2u) + f_{\alpha\beta\gamma\lambda}\sigma_{\delta\lambda}(2u)),$$

und diese Gleichung gilt auch, wenn die Indices nicht verschieden sind. Allgemeiner ist, wie ich beiläufig erwähnen will,

$$(11.) \quad \begin{cases} 4(\sigma(u)\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(v) + \sigma(v)\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(v)\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)) \\ = f_{\alpha\beta\gamma\delta}\sum_{\lambda}(\sigma_{\lambda\beta\gamma\delta}(u-v)\sigma_{\alpha\lambda}(u+v) + \sigma_{\alpha\lambda\gamma\delta}(u-v)\sigma_{\beta\lambda}(u+v) \\ + \sigma_{\alpha\beta\lambda\delta}(u-v)\sigma_{\gamma\lambda}(u+v) + \sigma_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u-v)\sigma_{\delta\lambda}(u+v)). \end{cases}$$

Aus jener Gleichung folgt

$$8\sigma \sum_{\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} \Psi_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \sum_{\varkappa,\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(f_{\varkappa\beta\gamma\lambda}\sigma_{\alpha\varkappa} + f_{\alpha\varkappa\gamma\lambda}\sigma_{\beta\varkappa} + f_{\alpha\beta\varkappa\lambda}\sigma_{\gamma\varkappa} + f_{\alpha\beta\gamma\varkappa}\sigma_{\varkappa\lambda})$$

und mithin nach (1.) § 9

$$(12.) \qquad 8\sigma(u)\sum_{\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}\Psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u) = \sum_{\varkappa,\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\varkappa} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}\sigma_{\varkappa\lambda}(2u).$$

Nach Gleichung (2.) § 11 ist daher

$$(13.) \qquad 2h_{\alpha\beta\gamma,\alpha'\beta'\gamma'} = \sum_{\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}\Psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u) = \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda}\Psi_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(u).$$

Z. B. erhält man für $\alpha'\beta'\gamma' = \alpha\beta\gamma$ die Gleichung

$$(14.) \quad 2\sigma_{\beta\gamma}(u)\sigma_{\gamma\alpha}(u)\sigma_{\alpha\beta}(u) = \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda}\Psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u) = \sum_{\lambda}\sigma_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u)\psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}(u),$$

welche ein specieller Fall der Formel (4.) § 8 ist.

Zu der Formel (13.) kann man auch auf folgendem Wege gelangen: Nach (20.) § 8, (1.) § 11 und (1.) ist der Coefficient von r in der Determinante vierten Grades

$$|g(a_\varkappa, a_\lambda) + re_{\varkappa\lambda}| \qquad (\varkappa, \lambda = \alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

gleich $\frac{1}{16}\varphi(u)(\varphi(2u))^2 f_{\alpha\beta\gamma\delta}\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Mit Hülfe der Methode, die ich J. C. § 8 benutzt habe, schliesst man daraus, dass allgemeiner

$$(15.) \quad \left\{ \frac{1}{32}\varphi(u)(\varphi(2u))^2 (f_{\alpha\beta\gamma\delta}\Psi_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}(u) + f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = |g(a_\lambda, a_{\lambda'}) + re_{\lambda\lambda'}|_{r^1} \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} \lambda = \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta \\ \lambda' = \alpha'\beta'\gamma'\delta' \end{pmatrix} \right.$$

ist. Wie nun dort die Formel (3.) erhalten wurde, findet man hier mit Hülfe der Gleichung (1.) die Formel (13.). Man kann aber auch die weiteren Entwicklungen jenes Paragraphen auf die vorliegende Untersuchung übertragen, und findet, wie dort die Formeln (5.), hier die Gleichung

$$(16.) \quad \sum_{\lambda} g(a_\alpha, a_\lambda)\Psi_{\lambda\beta\gamma\delta} = \tfrac{1}{8} f_{\alpha\beta\gamma\delta}\varphi(u)\varphi(2u),$$

in welcher α, β, γ, δ nicht verschieden zu sein brauchen, und, wie dort die Formel (6.), hier die Gleichung

$$(17.) \quad \tfrac{1}{4}\varphi(2u)\sum_{\lambda}\Psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}\Psi_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} = |g(a_\lambda, a_{\lambda'}) + re_{\lambda\lambda'}|_{r^1} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = \alpha\ \beta\ \gamma \\ \lambda' = \alpha'\beta'\gamma' \end{pmatrix}.$$

Mit Hülfe der Formeln (6.) und (7.) § 11 und (15.) § 12 ergeben sich daraus die Relationen

$$(18.) \quad \begin{cases} \sum_{\lambda}\Psi^2_{\alpha\beta\gamma\lambda} + \Psi^2_{\beta\gamma} + \Psi^2_{\gamma\alpha} + \Psi^2_{\alpha\beta} = -\varphi(\sigma^2_{\beta\gamma}\varphi_{\beta\gamma} + \sigma^2_{\gamma\alpha}\varphi_{\gamma\alpha} + \sigma^2_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}), \\ \sum_{\lambda}\Psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}\Psi_{\alpha\beta\delta\lambda} + \Psi_{\beta\gamma}\Psi_{\beta\delta} + \Psi_{\alpha\gamma}\Psi_{\alpha\delta} = -\varphi(\sigma_{\beta\gamma}\sigma_{\beta\delta}\psi_{\beta\gamma,\beta\delta} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\alpha\delta}\psi_{\alpha\gamma,\alpha\delta}), \\ \sum_{\lambda}\Psi_{\alpha\beta\varkappa\lambda}\Psi_{\gamma\delta\varkappa\lambda} + \Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\gamma\delta} = \varphi\chi_{\alpha\beta,\gamma\delta}, \\ \sum_{\lambda}\Psi_{\alpha\beta\gamma\lambda}\Psi_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} = 0. \end{cases}$$

§ 14.

Neue Darstellungen für die Function $\varphi(u)$.

Zum Schluss will ich noch eine Darstellung der Function $\varphi(u)$ entwickeln, welche von den bisher betrachteten gänzlich verschieden ist, und auf welche ich durch die Bemerkungen des Herrn *Schottky* am Ende seiner Arbeit *Zur Theorie der Abelschen Functionen von vier Variabeln* (dieses Journal Bd. 102) geführt worden bin. Seien p_1 und p_2 zwei von der ver-

schwindenden Charakteristik p_0 verschiedene syzygetische Charakteristiken, und sei $p_3 = -p_1 p_2$. Dann kann man eine ungerade Charakteristik a_0 so bestimmen, dass die vier Charakteristiken $a_0 p_\lambda = a_{0\lambda}$ sämmtlich ungerade sind, und drei gerade Charakteristiken a_1, a_2, a_3 so, dass die zwölf Charakteristiken $a_\alpha p_\lambda = a_{\alpha\lambda}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ sämmtlich gerade sind. (Vgl. meine im Folgenden mit Gr. citirte Arbeit ***Ueber Gruppen von Thetacharakteristiken***, dieses Journal Bd. 96, § 3). Von den vier Charakteristiken a_0, a_1, a_2, a_3 sind je drei azygetisch, und ihre Summe ist einer der Charakteristiken p_λ congruent.

Schreibt man für $\vartheta_{a_\varkappa p_\lambda}$ kurz $\vartheta_{\varkappa\lambda}$, so haben die beiden Producte $\vartheta_{\varkappa 0}\vartheta_{\varkappa 1}$ und $\vartheta_{\varkappa 2}\vartheta_{\varkappa 3}$ die halbe Periode p_1 zur Periode und die Ausdrücke

$$\vartheta_{\varkappa 0}\vartheta_{\varkappa 1} + \varepsilon(a_\varkappa, p_1)\sqrt{(p_2, p_3)}\,\vartheta_{\varkappa 2}\vartheta_{\varkappa 3},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, ausserdem noch die halbe Periode p_2, und zwar ändern sie sich bei Vermehrung von u um p_1 oder p_2 für alle Werthe von $\varkappa$ in der gleichen Weise. Daher sind unter diesen vier Functionen höchstens zwei linear unabhängig (Gr. § 4). Es besteht also eine Gleichung von der Form

$$\sum_\alpha{}_1^3 C_\alpha\big(\vartheta_{\alpha 0}(u)\vartheta_{\alpha 1}(u) + \varepsilon(a_\alpha, p_1)\sqrt{(p_2, p_3)}\,\vartheta_{\alpha 2}(u)\vartheta_{\alpha 3}(u)\big) = 0.$$

Die Verhältnisse der Constanten C_α bestimmt man, indem man $u = a_1 a_2$ oder $a_1 a_3$ setzt. So findet man die (auch aus Gr. § 6 (2.) leicht abzuleitende) Gleichung

$$\sum_\alpha{}_1^3(a_\alpha, p_1)((a_0, a_\alpha))\big(\vartheta_{\alpha 0}(0)\vartheta_{\alpha 1}(0) + \varepsilon(a_\alpha, p_1)\sqrt{(p_2, p_3)}\,\vartheta_{\alpha 2}(0)\vartheta_{\alpha 3}(0)\big)$$
$$\times\big(\vartheta_{\alpha 0}(u)\vartheta_{\alpha 1}(u) + \varepsilon(a_\alpha, p_1)\sqrt{(p_2, p_3)}\,\vartheta_{\alpha 2}(u)\vartheta_{\alpha 3}(u)\big) = 0.$$

Da dieselbe für $\varepsilon = \pm 1$ gilt, so folgt daraus

$$\sum_\alpha{}_1^3((a_0, a_\alpha))\big(\vartheta_{\alpha 2}(0)\vartheta_{\alpha 3}(0)\vartheta_{\alpha 0}(u)\vartheta_{\alpha 1}(u) + \vartheta_{\alpha 0}(0)\vartheta_{\alpha 1}(0)\vartheta_{\alpha 2}(u)\vartheta_{\alpha 3}(u) = 0.$$

Setzt man also

$$(1.) \qquad r_\alpha = ((a_0, a_\alpha))\prod_\lambda{}_0^3 \vartheta_{\alpha\lambda}(0) \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

so ist

$$(2.) \qquad \sum_\alpha{}_1^3 r_\alpha\Big(\frac{\vartheta_{\alpha 0}(u)\vartheta_{\alpha 1}(u)}{\vartheta_{\alpha 0}(0)\vartheta_{\alpha 1}(0)} + \frac{\vartheta_{\alpha 2}(u)\vartheta_{\alpha 3}(u)}{\vartheta_{\alpha 2}(0)\vartheta_{\alpha 3}(0)}\Big) = 0$$

und für $u = 0$

$$(3.) \qquad r_1 + r_2 + r_3 = 0.$$

Mithin verschwindet der Ausdruck

$$\sum_\alpha{}_1^3 r_\alpha\Big(\sum_\lambda{}_0^3\Big(\frac{\vartheta_{\alpha\lambda}(u)}{\vartheta_{\alpha\lambda}(0)}\Big)^2\Big)$$

für $u = 0$, und da die Glieder der zweiten Dimension in seiner Entwicklung dieselben sind, wie in dem verschwindenden Ausdrucke (2.), so fängt dieselbe mit den Gliedern der vierten Dimension an. Dieser Ausdruck kann sich folglich von der Function $\varphi(u)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden, der, wie ich unten zeigen werde, gleich $-r_1 r_2 r_3$ ist. Demnach ist

$$(4.) \qquad -\frac{\varphi(u)}{r_1 r_2 r_3} = \sum_{\alpha,\lambda} r_\alpha \Big(\frac{\vartheta_{\alpha\lambda}(u)}{\vartheta_{\alpha\lambda}(0)}\Big)^2.$$

Addirt man dazu die mit 2 multiplicirte Formel (2.) und die beiden analogen Formeln, so erhält man

$$-\frac{\varphi(u)}{r_1 r_2 r_3} = \sum_{\alpha,\varkappa,\lambda} r_\alpha \frac{\vartheta_{\alpha\varkappa}(u)\vartheta_{\alpha\lambda}(u)}{\vartheta_{\alpha\varkappa}(0)\vartheta_{\alpha\lambda}(0)},$$

oder wenn man

$$(5.) \qquad S_\alpha = \sum_{\lambda}^{3} {}_0 \frac{\vartheta_{\alpha\lambda}(u)}{\vartheta_{\alpha\lambda}(0)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

setzt,

$$(6.) \qquad -\frac{\varphi(u)}{r_1 r_2 r_3} = \sum_{\alpha}^{3} {}_1 r_\alpha S_\alpha^2.$$

Diese Gleichung lässt sich auf mannigfache andere Formen bringen mit Hülfe eines Systems von Formeln, das ich jetzt ableiten will. Sind a, $a_1, \ldots a_{2^{\mu}-1}$ und b, $b_1, \ldots b_{2^{2\varrho-\mu}-1}$ zwei adjungirte vollständige Systeme (Gr. § 5), so ist

$$\begin{aligned} &2^{\varrho-\mu}\Sigma(ba_\lambda)\vartheta_{a_\lambda}(u+v)\vartheta_{a_\lambda}(u-v)\vartheta_{a_\lambda}(u'+v')\vartheta_{a_\lambda}(u'-v') \\ &= (ab)\Sigma(ab_\lambda)\vartheta_{b_\lambda}(u+v')\vartheta_{b_\lambda}(u-v')\vartheta_{b_\lambda}(u'+v)\vartheta_{b_\lambda}(u'-v). \end{aligned}$$

Solche zwei Systeme bilden z. B. für $\varrho = 3$, $\mu = 2$ die vier Charakteristiken $a_{\alpha 0}$, $a_{\alpha 1}$, $a_{\alpha 2}$, $a_{\alpha 3}$, wo α ein bestimmter der vier Indices 0, 1, 2, 3 ist, und die 16 Charakteristiken $a_{\varkappa\lambda}$ ($\varkappa$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$), und mithin ist

$$\begin{aligned} &2\sum_{\lambda}(p_\lambda)\vartheta_{a\lambda}(u+v)\vartheta_{a\lambda}(u-v)\vartheta_{a\lambda}(u'+v')\vartheta_{a\lambda}(u'-v') \\ &= \sum_{\varkappa,\lambda}(a_\alpha a_{\varkappa\lambda})\vartheta_{\varkappa\lambda}(u+v')\vartheta_{\varkappa\lambda}(u-v')\vartheta_{\varkappa\lambda}(u'+v)\vartheta_{\varkappa\lambda}(u'-v). \end{aligned}$$

Ersetzt man u, v, u', v' durch $u+\frac{w}{2}$, $v+\frac{w}{2}$, $\frac{w}{2}$, $\frac{w}{2}$, so erhält man

$$\begin{aligned} &2\sum_{\lambda}(p_\lambda)\vartheta_{a\lambda}(0)\vartheta_{a\lambda}(w)\vartheta_{a\lambda}(v-u)\vartheta_{a\lambda}(u+v+w) \\ &= \sum_{\varkappa,\lambda}(p_\lambda)((a_\alpha, a_\varkappa))\vartheta_{\varkappa\lambda}(u)\vartheta_{\varkappa\lambda}(u+w)\vartheta_{\varkappa\lambda}(v)\vartheta_{\varkappa\lambda}(v+w). \end{aligned}$$

Setzt man $v = u+p_1$ und $w = p_2$, so findet man

$$\begin{aligned} &2\Sigma(p_\lambda)\vartheta_{a_{\alpha\lambda}}(0)\vartheta_{a_{\alpha\lambda}p_1}(0)\vartheta_{a_{\alpha\lambda}p_2}(0)\vartheta_{a_{\alpha\lambda}p_3}(2u) \\ &= \sum_{\varkappa,\lambda}(p_\lambda)((a_\alpha, a_\varkappa))\vartheta_{a_{\varkappa\lambda}}(u)\vartheta_{a_{\varkappa\lambda}p_1}(u)\vartheta_{a_{\varkappa\lambda}p_2}(u)\vartheta_{a_{\varkappa\lambda}p_3}(u). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite sind hier je vier Summanden einander gleich. Setzt man also

$$(7.) \qquad R_\varkappa = ((a_0, a_\varkappa))\prod_\lambda \vartheta_{\varkappa\lambda}\left(\frac{u}{2}\right) \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3),$$

so erhält man, falls $\alpha = 0$ ist, $\Sigma R_\varkappa = 0$, und falls $\alpha = 1, 2, 3$ ist,

$$\tfrac{1}{2} r_\alpha S_\alpha = \sum_\varkappa{}^3_0((a_0, a_\alpha, a_\varkappa))R_\varkappa.$$

Sind α, β, γ verschieden, so ist $((a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)) = -1$, weil die drei Charakteristiken $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$ azygetisch sind. Sind aber α, β, γ nicht alle verschieden, so ist $((a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)) = +1$. Demnach ergeben sich die Gleichungen

$$(8.) \qquad \begin{cases} 0 = R_0 + R_1 \quad + R_2 + R_3, \\ \tfrac{1}{4} r_1 S_1 = R_0 + R_1 = -R_2 - R_3, \\ \tfrac{1}{4} r_2 S_2 = R_0 + R_2 = -R_3 - R_1, \\ \tfrac{1}{4} r_3 S_3 = R_0 + R_3 = -R_1 - R_2. \end{cases}$$

In Verbindung mit den Formeln (3.) und (6.) folgt aus diesen Relationen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{16}\varphi(u) &= -r_2 r_3 (R_2 + R_3)^2 - r_3 r_1 (R_3 + R_1)^2 - r_1 r_2 (R_1 + R_2)^2 \\ &= r_1^2 R_1^2 + r_2^2 R_2^2 + r_3^2 R_3^2 - 2 r_2 r_3 R_2 R_3 - 2 r_3 r_1 R_3 R_1 - 2 r_1 r_2 R_1 R_2 \end{aligned}$$

oder

$$(9.) \qquad \tfrac{1}{16}\varphi(u) = N(\sqrt{r_1 R_1} + \sqrt{r_2 R_2} + \sqrt{r_3 R_3}).$$

Dabei habe ich diejenigen Darstellungen von S_1, S_2, S_3 benutzt, in denen R_0 nicht vorkommt. Ist $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ und benutzt man die, in denen R_γ nicht vorkommt, so erhält man

$$(10.) \qquad \tfrac{1}{16}\varphi(u) = N(\sqrt{r_\gamma R_0} - \sqrt{r_\alpha R_\beta} + \sqrt{r_\beta R_\alpha}).$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (8.)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4} r_\alpha r_\beta (S_\alpha + S_\beta) &= -r_\beta (R_\beta + R_\gamma) - r_\alpha (R_\gamma + R_\alpha) = r_\beta (R_0 + R_\alpha) + r_\alpha (R_0 + R_\beta), \\ \tfrac{1}{4} r_\alpha r_\beta (S_\alpha - S_\beta) &= -r_\beta (R_\beta + R_\gamma) - r_\alpha (R_0 + R_\beta) = r_\beta (R_0 + R_\alpha) + r_\alpha (R_\gamma + R_\alpha), \end{aligned}$$

also

$$(11.) \qquad \tfrac{1}{4} r_\alpha r_\beta (S_\alpha + S_\beta) = \quad r_\gamma R_\gamma - r_\alpha R_\alpha - r_\beta R_\beta = -r_\gamma R_0 + r_\alpha R_\beta + r_\beta R_\alpha$$

und

$$(12.) \qquad \tfrac{1}{4} r_\alpha r_\beta (S_\alpha - S_\beta) = -r_\alpha R_0 - r_\beta R_\gamma + r_\gamma R_\beta = \quad r_\beta R_0 + r_\alpha R_\gamma - r_\gamma R_\alpha.$$

Nach (9.) ist aber

$$\tfrac{1}{16}\varphi(u) = (r_\gamma R_\gamma - r_\alpha R_\alpha - r_\beta R_\beta)^2 - 4 r_\alpha r_\beta R_\alpha R_\beta$$

und mithin

$$(13.) \qquad \varphi(u) = r_\alpha^2 r_\beta^2 \left((S_\alpha + S_\beta)^2 - 64 \frac{R_\alpha R_\beta}{r_\alpha r_\beta}\right)$$

und ebenso

$$(14.) \quad \varphi(u) = r_\alpha^2 r_\beta^2 (S_\alpha - S_\beta)^2 - 64 r_\alpha r_\beta R_0 R_\gamma.$$

Ersetzt man endlich in der identischen Gleichung

$$(x-y-z)(y-z-x)(z-x-y) - 8xyz = (x+y+z)N(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$$

x, y, z durch $r_1 R_1$, $r_2 R_2$, $r_3 R_3$ oder durch $r_\gamma R_0$, $r_\alpha R_\beta$, $r_\beta R_\alpha$, so erhält man

$$(15.) \quad \begin{cases} r_1^2 r_2^2 r_3^2 (S_2+S_3)(S_3+S_1)(S_1+S_2) - 8^3 r_1 r_2 r_3 R_1 R_2 R_3 \\ = 4\varphi(u)(r_1 R_1 + r_2 R_2 + r_3 R_3) = -\varphi(u)(r_1^2 S_1 + r_2^2 S_2 + r_3^2 S_3) \end{cases}$$

und

$$(16.) \quad \begin{cases} r_1^2 r_2^2 r_3^2 (S_\alpha+S_\beta)(S_\beta-S_\gamma)(S_\gamma-S_\alpha) - 8^3 r_1 r_2 r_3 R_0 R_\alpha R_\beta \\ = 4\varphi(u)(r_\gamma R_0 + r_\alpha R_\beta + r_\beta R_\alpha) = \varphi(u)(r_\gamma^2 S_\gamma - r_\alpha^2 S_\alpha - r_\beta^2 S_\beta). \end{cases}$$

Vergleicht man in der Formel

$$(14.) \quad \varphi(u) = r_\alpha^2 r_\beta^2 \sum_\lambda \left(\frac{\vartheta_{\alpha\lambda}(u)}{\vartheta_{\alpha\lambda}(0)} - \frac{\vartheta_{\beta\lambda}(u)}{\vartheta_{\beta\lambda}(0)} \right)^2 - 64 r_\alpha r_\beta \prod_\lambda \left(\vartheta_{0\lambda}\left(\frac{u}{2}\right) \vartheta_{\gamma\lambda}\left(\frac{u}{2}\right) \right)$$

die Glieder der vierten Dimension, so erhält man, falls man u durch x ersetzt,

$$CF(x) = Q^2 - 4 r_\alpha r_\beta r_\gamma \Pi(X_{0\lambda}),$$

wo $X_{0\lambda}$ das Aggregat der Glieder der ersten Dimension in der Entwicklung von $\vartheta_{0\lambda}(u)$ ist, Q eine Function zweiten Grades von x bedeutet, und C eine Constante ist, von der ich jetzt beweisen werde, dass sie gleich 1 ist. Diese Gleichung zeigt wieder, dass die Coefficienten der Anfangsglieder der 28 ungeraden Thetafunctionen die Coordinaten der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung sind, und dass die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten, von denen je drei syzygetisch sind, auf einem Kegelschnitt liegen. Wählt man das in § 2 zu Grunde gelegte Fundamentalsystem so, dass $p_1 = [45]$, $p_2 = [67]$, $-p_3 = [4567]$ wird, so kann man $a_0 = [k47]$, $a_1 = [k4701]$, $a_2 = [k4702]$ und $a_3 = [k4703]$ setzen. Nun ist nach Formel (21.) § 9

$$f_{4567}^2 F(x) = (x_{46}x_{75} + x_{47}x_{56} - x_{45}x_{67})^2 - 4 x_{46}x_{75}x_{47}x_{56}$$

oder

$$F(x) = R^2 - 4 \frac{g_{46} g_{75} g_{47} g_{56}}{c^4 f_{4567}^2} X_{k46} X_{k75} X_{k47} X_{k56},$$

wo X_{k46} das Anfangsglied von $\vartheta_{k46}(u)$ ist. Ferner ist

$$\frac{g_{46} g_{75} g_{47} g_{56}}{c^4 f_{4567}^2} = \prod_\alpha^3 (c_{046\alpha} c_{075\alpha} c_{047\alpha} c_{056\alpha})$$

und

$$r_\alpha r_\beta r_\gamma (\Pi X_{0\lambda}) = \left(\prod_\alpha c_{046\alpha} c_{075\alpha} c_{047\alpha} c_{056\alpha}\right) X_{k46} X_{k75} X_{k47} X_{k56}.$$

Bezeichnet man dies Product mit $\frac{1}{4}P$, so ist demnach $CF = Q^2 - P$ und $F = R^2 - P$ und mithin $(C-1)F = (Q+R)(Q-R)$. Da aber die Curve $F = 0$ 28 verschiedene Doppeltangenten hat, so kann sie nicht in zwei Kegelschnitte zerfallen, und folglich muss $C = 1$ sein.

In der Formel (13.) sind $a_{\alpha 0}, \ldots a_{\alpha 3}, a_{\beta 0}, \ldots a_{\beta 3}$ irgend acht gerade Charakteristiken, die ein syzygetisches (*Göpel*sches) System bilden. Demnach ist

$$(17.) \qquad \varphi(u) = (\Pi_\lambda^7 \vartheta_\lambda(0))^2 \left[\left(\Sigma_\lambda^7 \frac{\vartheta_\lambda(u)}{\vartheta_\lambda(0)} \right)^2 - 64 \left(\Pi_\lambda^7 \frac{\vartheta_\lambda\left(\frac{u}{2}\right)}{\vartheta_\lambda(0)} \right) \right],$$

wo die Charakteristiken der acht geraden Thetafunctionen $\vartheta_\lambda(u)$ irgend eins der 135 syzygetischen Systeme bilden. Aus dieser Formel ergiebt sich der von Herrn *Schottky* l. c. bewiesene Satz, dass dieser Ausdruck von der Wahl des syzygetischen Systems unabhängig ist.

In der Gleichung (9.) oder

$$(18.) \qquad \tfrac{1}{16}\varphi(2u) = N(\sqrt{\Pi_0^3 \vartheta_{1\lambda}(0)\vartheta_{1\lambda}(u)} + \sqrt{\Pi_0^3 \vartheta_{2\lambda}(0)\vartheta_{2\lambda}(u)} + \sqrt{\Pi_0^3 \vartheta_{3\lambda}(0)\vartheta_{3\lambda}(u)})$$

ist die Function $\varphi(2u)$ durch dieselben zwölf geraden Thetafunctionen ausgedrückt, aus deren Quadraten die Function $\varphi(u)$ in der Formel (4.) zusammengesetzt worden ist*).

*) Im 104. Bande dieses Journals Seite 4 bemerkt Herr *Thomé* über einen Satz, den ich in einer Untersuchung über lineare Differentialgleichungen aufgestellt habe, er bedürfe einer Modification, eventuell sein Beweis einer Ergänzung. Diesen Ausstellungen gegenüber halte ich Satz und Beweis vollständig aufrecht. Die Voraussetzungen des Satzes bedürfen keiner Erweiterung, sondern brauchen nur richtig benutzt und combinirt zu werden, und auch meine Darstellung des Beweises scheint mir, nachdem ich mich schon vorher auf die grundlegenden, zuerst im Programm der städtischen Gewerbeschule zu Berlin Ostern 1865 und später in diesem Journal erschienenen Arbeiten des Herrn *Fuchs* bezogen habe, hinreichend vollständig zu sein. Näher auf die Sache einzugehen habe ich um so weniger Veranlassung, als jener Satz bekanntlich in einer aus *Riemanns* Nachlass in den gesammelten Werken 1876 veröffentlichten Arbeit über lineare Differentialgleichungen ausführlich behandelt worden ist.

Rein geometrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen.

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Münster i. W.)

Die Beschäftigung mit dem im vergangenen Jahre erschienenen ersten Bande von Herrn *Darboux*' „Leçons sur la théorie générale des surfaces", dessen drittes und umfangreichstes Buch den Minimalflächen gewidmet ist, hat mich veranlasst, den Versuch zu machen, einige wichtige Eigenschaften *) insbesondere der algebraischen Minimalflächen durch rein geometrische Ueberlegungen zu erhalten, bei denen ich übrigens die Benutzung der einfachsten Vorstellungen der Coordinaten-Geometrie (vgl. Nr. 25, 27) nicht ausschliessen will. Meine Absicht ist vornehmlich, (in I) einen allgemeinen Beweis der Ordnung und der Klasse zu liefern, genauer: wenn zwei (verschiedene oder identische) algebraische Curven Γ, Γ_1 vorliegen, zu ermitteln, wie viele Punkte des Orts der Mitten der Verbindungslinien der Punkte der einen und der andern Curve auf einer *beliebigen* Geraden liegen, wie viele Berührungsebenen dieser Fläche durch eine *beliebige* Gerade gehen, und zwar erstens für den allgemeinen Fall, dass die beiden Curven Γ, Γ_1 von einander unabhängig sind, und zweitens für den besonderen Fall, dass die Tangenten der einen Curve sowohl, wie der andern sämmtlich demselben unendlich fernen Kegelschnitte begegnen; denn jede Minimalfläche ist ein solcher Mittenort, wenn der unendlich ferne Kugelkreis als der genannte Kegelschnitt angenommen wird.

In dem kürzeren Abschnitte II gebe ich für die Sätze der Herren *Schwarz* und *Henneberg*, dass jede auf einer Minimalfläche gelegene Gerade eine Symmetrie-Axe für dieselbe ist, dass der Normalschnitt jedes einer alge-

*) Hinsichtlich des geometrischen Beweises der Minimums-Eigenschaft selbst sehe man den Aufsatz *Steiners*: „Ueber parallele Flächen" (Berliner Monatsberichte 1840; Gesammelte Werke Bd. II S. 173).

braischen Minimalfläche umgeschriebenen Cylinders die Evolute einer algebraischen Curve sein muss, und verwandte Sätze rein geometrische Beweise.

Es ist natürlich, dass ich in der Einleitung einige synthetische Betrachtungen, die Herr *Lie* in dem ersten seiner beiden grossen Aufsätze über Minimalflächen*) oder Herr *Darboux* insbesondere im sechsten Kapitel des genannten Buchs gemacht hat, sei es unverändert, sei es in anderer Reihenfolge der Gedanken wiederhole, bezw. verallgemeinere.

I.

1. Die Grund-Eigenschaft der Minimalflächen wird durch die folgenden mit einander identischen Sätze ausgesprochen:

In jedem Punkte einer Minimalfläche ist die mittlere Krümmung oder die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser Null oder die Dupinsche Indicatrix eine gleichseitige Hyperbel oder hat die Involution der conjugirten Tangenten zwei rechtwinklige reelle Doppelstrahlen oder sind die beiden den unendlich fernen Kugelkreis treffenden Tangenten conjugirte Tangenten.

2. *Wir nehmen in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ einen beliebigen, aber festen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ an, construiren in jeder Tangentialebene einer gegebenen Fläche (F) die beiden Tangenten, die ihn treffen. Wir setzen voraus, dass (F) die Beschaffenheit habe, dass in jedem ihrer Punkte diese beiden Tangenten conjugirt sind.* Von jedem Punkte der Fläche in der Richtung dieser Tangenten fortschreitend, gelangen wir so zu zwei conjugirten Curvensystemen auf der Fläche.

Wenn P, P' die Schnitte einer Curve γ des einen Systems mit zwei unendlich nahen γ_1, γ_1' des andern sind, so muss, nach der Definition conjugirter Tangenten, die Berührungsebene von P' an (F) diejenige von P in der Tangente von P an γ_1 schneiden; der eine der beiden Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}$ hat sich also von dieser zu jener Ebene nicht geändert, die Tangenten in P, P' an γ_1, γ_1' gehen nach demselben Punkte von $\mathfrak{K}$, sind parallel.

Die längs einer Curve des einen oder andern Systems der Fläche (F) umgeschriebene abwickelbare Fläche ist ein Cylinder, dessen Spitze sich auf $\mathfrak{K}$ befindet.

Das Flächenelement zwischen zwei unendlich nahen Curven des einen Systems und zwei eben solchen des andern ist ein Parallelogramm; demnach sind die Bogen auf allen Curven des einen Systems zwischen zwei

*) Math. Annalen Bd. 14, 15.

Curven des andern von gleicher Länge. ***Folglich besteht jedes der beiden Systeme aus congruenten und parallelen Curven,*** die durch Verschiebung längs einer Curve des andern Systems aus einander hervorgehen.

γ, γ_1 seien die durch einen beliebigen Punkt P der Fläche gehenden Curven der beiden Systeme, γ^0, γ_1^0 irgend zwei andere feste Curven derselben mit dem Schnitte O; Q, Q_1 seien die Schnitte $\gamma^0\gamma_1$, $\gamma_1^0\gamma$ oder die Punkte, die auf γ^0, γ_1^0 dem Punkte P entsprechen, insofern er zu γ oder γ_1 gerechnet wird. Wir verlängern OQ, OQ_1 um sich selbst bis R, R_1 so ist, wie man leicht erkennt, P die Mitte von RR_1. Bewegt sich P über die Fläche, so erzeugen die Punkte R, R_1 die beiden Curven Γ, Γ_1, welche, in Bezug auf O als Centrum, homothetisch sind zu γ^0, γ_1^0 im Verhältniss 2.

Unsere Fläche ist also Ort der Mitten der Sehnen (Verbindungslinien) zwischen einem Punkte der einen und einem Punkte der andern dieser beiden Curven Γ, Γ_1.

Wenn wir O die Fläche oder γ^0, γ_1^0 die beiden Curvensysteme durchlaufen lassen, so ergeben sich schon ∞^2 Curvenpaare, aus denen (F) als Ort der Sehnenmitten abgeleitet werden kann. Nimmt man jedoch mit Γ, Γ_1 zwei Translationen von gleicher Grösse und Richtung, aber entgegengesetztem Sinne vor, so ändert sich der Ort der Sehnenmitten nicht; denn gelangen dadurch R, R_1 nach S, S_1, so erkennt man leicht, dass die Mitte von SS_1 mit der von RR_1 identisch ist.

Es giebt daher ∞^3 Curvenpaare Γ, Γ_1, aus denen (F) als Ort der Sehnenmitten sich ergiebt, und jede zwei solche Paare können durch zwei Translationen der genannten Art aus einander abgeleitet werden. ***Dass die Tangenten den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ treffen,*** geht von den γ, γ_1 über zu den Γ, Γ_1 und den durch Translation aus diesen sich ergebenden Curven.

3. ***Lassen wir aber zunächst diese Eigenschaft fallen und nehmen zwei beliebige Curven Γ, Γ_1 an. (M) sei der Ort der Mitten der Sehnen zwischen ihnen. Wir sehen unmittelbar, dass derselbe von zwei Curvensystemen überzogen ist: die einen γ sind zur Curve Γ homothetisch im Verhältniss $\frac{1}{2}$ in Bezug auf die verschiedenen Punkte von Γ_1 als Centra der Homothetie, die anderen hingegen zur Curve Γ_1 in Bezug auf die Punkte von Γ.*** Durch jeden Punkt M von (M) gehen die beiden Curven γ, γ_1, welche zu den Endpunkten P, P_1 der in ihm gehälfteten Sehne als Centren gehören. Die Tangenten der Curven des einen Systems, z. B. der γ, in den Punkten, in denen sie eine und dieselbe Curve γ_1 des andern treffen, sind alle der Tangente an Γ in

demjenigen Punkte parallel, zu dem als Homothetie-Centrum γ_1 gehört, also auch unter einander; folglich ist der von ihnen gebildete Cylinder die der Fläche (M) längs der Curve γ_1 umgeschriebene abwickelbare Fläche; woraus dann wieder folgt, dass ***die Tangenten an die beiden in einem Punkte M von (M) sich schneidenden Curven γ und γ_1 conjugirte Tangenten sind*** und die Curven also zwei conjugirte Systeme bilden. Die beiden genannten Tangenten m, m_1 sind parallel den Tangenten p, p_1 an Γ, Γ_1 in den Endpunkten P, P_1 der Sehne, deren Mitte M ist. Sind demnach insbesondere diese beiden Endpunkts-Tangenten p, p_1 parallel, so fallen unsere beiden Tangenten m, m_1 im Punkte M zusammen, und wir erhalten eine Haupt- oder Inflexionstangente der Fläche (M).

Im Allgemeinen bestimmen diese beiden Tangenten m, m_1 die Berührungsebene μ des Punktes M an (M). Wir erhalten demnach folgenden Satz:

Ist M die Mitte der Sehne PP_1 zwischen den beiden Curven Γ, Γ_1, so construire man durch die beiden Tangenten p, p_1 in den Endpunkten P, P_1 die Parallelebenen π, π_1; ihre Mittelebene ist die Berührungsebene μ im Punkte M an die Ortsfläche (M) der Mitten aller Sehnen zwischen beiden Curven. Die Fläche (M) wird also von den Ebenen eingehüllt, die parallel zu zwei beliebigen Tangenten von Γ und Γ_1 je in der Mitte zwischen ihnen liegen.

Sind die beiden Tangenten p, p_1 parallel, so führt unsere Construction zu ∞^1 Ebenen, allen Ebenen des Büschels um die Mittelparallele zwischen p, p_1; die Tangentialebene braucht aber damit nicht unbestimmt zu werden, da die Unbestimmtheit der Construction nur darauf beruht, dass die zur Bestimmung der Berührungsebene gewählten Tangenten ungeeignet geworden sind. Wir kommen auf die genauere Bestimmung dieser Ebene noch zurück.

4. ***Suchen wir die Ordnung und die Klasse der Fläche (M) zu bestimmen, im Falle die gegebenen Curven Γ, Γ_1 algebraisch sind. Es seien n, r Ordnung und Rang bei der ersteren Curve und n_1, r_1 bei der zweiten*** *).

Wenn g eine beliebige Gerade ist, so möge mit (Γ, g) der Cylinder

*) Den Satz, dass bei einer algebraischen Fläche (M) die beiden Curven Γ, Γ_1 algebraisch sein müssen, beweist Herr *Darboux* (S. 345) durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung. Er nimmt eine Translation vor, durch die eine Curve γ in eine andere γ' übergeführt wird; letztere ist dann ein Theil des Schnittes der Fläche in ihren beiden Lagen, also algebraisch, mithin auch die zu ihr homothetische Curve Γ; vgl. auch *Lie* a. a. O. S. 345.

$n$ter Ordnung $r$ter Klasse bezeichnet werden, welcher I' in der Richtung von g projicirt oder durch die Curven entsteht, die aus I' durch Translationen von der Richtung von g sich ergeben. Dieser Cylinder enthält aber auch die Spiegelbilder dieser Curven, genommen in Bezug auf irgend eine zu g senkrechte Ebene.

Mit $[I', g]$ hingegen soll der zu diesem Cylinder in Bezug auf g symmetrische Cylinder bezeichnet werden. Er enthält nicht bloss die symmetrischen Curven zu den beiden eben geschilderten Curvenschaaren, genommen in Bezug auf g; sondern auch die Curven, welche zu einer Curve einer dieser Schaaren, z. B. zu I', symmetrisch sind in Bezug auf die einzelnen Punkte von g; doch führt dies zu keinen neuen Curven; denn man erkennt leicht, dass die Curve, welche zu I' in Bezug auf den Punkt G von g symmetrisch ist, sich ergiebt, indem man zunächst von I' das Spiegelbild in Bezug auf die in G auf g senkrechte Ebene nimmt und zu diesem dann die in Bezug auf g symmetrische Curve herstellt.

Gerade aber als Ort der in Bezug auf die verschiedenen Punkte von g zu I' symmetrischen Curven ist uns der jetzige Cylinder $[I', g]$ wichtig, dessen Ordnung und Klasse gleichfalls n, r sind, sodann aber noch wegen folgender Eigenschaft:

Er wird von denjenigen Parallelebenen zu Tangentialebenen der Curve I' eingehüllt, bei denen die Mittelebene zwischen zwei solchen Parallelebenen durch g geht.

Jene Eigenschaft von $[I', g]$ führt zur Ordnung, diese zur Klasse von (M).

5. Um die Ordnung zu erhalten, wollen wir wissen, wie oft die Mitte einer Sehne zwischen I', I_1' auf g fällt, oder wie viele Symmetriecurven von I', genommen in Bezug auf Punkte von g, die Curve I_1' treffen; d. h. wie oft diese dem Cylinder $[I', g]$ begegnet.

Bei beliebiger Lage der beiden Curven I', I_1' geschieht es in nn_1 Punkten; haben sie aber w unendlich ferne Punkte gemein, in $nn_1 - w$ Punkten; denn dass die unendlich fernen gemeinsamen Punkte von $[I', g]$ und I_1' für unsern Zweck nicht geeignet sind, erkennt man leicht.

Die unendlich fernen Sehnen — nn_1 im allgemeinen Falle — gehören ganz zur Fläche, da auf ihnen die Mitte unbestimmt wird. *)

Die unendlich fernen Punkte $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$ von I', I_1' sind auf der Fläche

*) *Geiser*, Math. Ann. Bd. 3 S. 530.

(M) n_1-, bezw. n-fach; denn lassen wir g durch einen $\mathfrak{U}$ gehen, so sinken (I', g) und $[I', g]$ zur $(n-1)$ten Ordnung und g hat im Endlichen nur $(n-1)n_1$ Schnitte mit (M). Der Anschmiegungskegel $n_1$ter Ordnung ergiebt sich folgendermassen: Man projicire aus $\mathfrak{U}$ die Curve I_1' und ziehe zwischen jeder Kante des projicirenden Cylinders und der Asymptote u in $\mathfrak{U}$ an I' die Mittelparallele. Denn wenn wir g eine dieser Linien sein lassen, so fällt die der Asymptote u entsprechende Kante des Cylinders $[I', g]$ $(n-1)$ter Ordnung auf eine Kante des Cylinders $(\mathfrak{U}, I_1')$, also auch einer der $(n-1)n_1$ Schnitte von I_1' mit $[I', g]$; der andere Endpunkt der zugehörigen auf g halbirten Sehne muss der im Allgemeinen vom unendlich fernen Scheitel verschiedene, hier aber auch mit ihm sich vereinigende zweite Schnitt der Kante u des Cylinders $[I', g]$ sein; die Mitte wird also auch unendlich fern.

6. Es sei nun M die Mitte einer Sehne PP_1, deren Endpunktstangenten p, p_1 parallel sind; solcher Punkte haben wir nur eine endliche Zahl, so lange die unendiich fernen Curven der Tangenten-Developpablen von I' und I_1' keinen gemeinsamen Theil besitzen.

Wir führen unsere Gerade g durch M; dann sind P_1 und p_1 symmetrisch zu P, p in Bezug auf M, also sind sie Punkt und Tangente des Cylinders $[I', g]$, der in Folge dessen von I_1' in P_1 berührt wird. Daraus folgt, dass unser Punkt M ein Doppelpunkt der Fläche (M) ist. P' sei der Nachbarpunkt von P auf I', P_1' der zu ihm in Bezug auf M symmetrische Nachbarpunkt von P_1 auf I_1', und p', p_1' seien ihre beiden Tangenten. In einem Strahlenbüschel mit dem Scheitel M giebt es nur einen Strahl, der parallel ist zu den beiden durch p', p_1' gelegten Parallelebenen. Für diesen Strahl als g wird $[I', g]$ von I_1' in P_1 osculirt werden, mithin er selbst in M drei vereinigte Schnitte mit der Fläche (M) haben. Demnach ist unser Punkt M ein uniplanarer Punkt der Fläche (M). Seine Berührungsebene μ ergiebt sich folgendermassen: Wenn P, P_1 die beiden Punkte auf I', I_1' mit parallelen Tangenten sind, M die Mitte ihrer Verbindungssehne und P', P_1' ferner die ebenfalls in Bezug auf M symmetrischen Nachbarpunkte, dann fasse man zwei Punkte der beiden Curven ins Auge, die auf denselben Seiten von P, bezw. P_1 liegen, wie P', bezw. P_1', und gleiche (geradlinige oder Bogen-) Entfernung von P, bezw. P_1 haben, construire die Mittelebene zu den durch ihre Tangenten geführten Parallelebenen, bewege die Punkte auf P, P_1 zu, immer die Gleichheit der Entfernung festhaltend; die Lage, welche die

Mittelebene erhält, wenn die Punkte durch P und P_1 hindurchgehen, ist die gewünschte Berührungsebene μ.

7. Es sei nun g wieder eine beliebige Gerade; so erinnern wir uns nun der zweiten Eigenschaft des Cylinders $[\Gamma, g]$. Die rr_1 gemeinsamen Tangentialebenen, welche er mit dem Cylinder (Γ_1, g) hat, beweisen, dass rr_1 Mittelebenen zwischen den Parallelebenen durch eine Tangente von Γ und eine Tangente von Γ_1 durch g gehen, d. h. dass die Fläche (M) von der Klasse rr_1 ist.

Fassen wir nun die Hauptergebnisse in einen Satz zusammen:

Wenn eine Curve Γ von der Ordnung n und dem Range r und eine andere Γ_1 von der Ordnung n_1 und dem Range r_1 gegeben sind, so ist der Ort der Mitten der Sehnen zwischen Punkten der einen und der andern Curve von der Ordnung nn_1 und der Klasse rr_1. Die unendlich fernen Punkte der ersteren Curve sind n_1-fache, die der andern n-fache (conische) Punkte der Fläche; die nn_1 Verbindungslinien jener mit diesen bilden den vollständigen Schnitt mit der unendlich fernen Ebene. Bei rr_1 Sehnen haben die Endpunkte parallele Tangenten; die Mitten dieser Sehnen sind uniplanare Doppelpunkte der Fläche.

8. Für die Theorie der sogenannten doppelten Minimalflächen ist es nothwendig, noch den besonderen Fall zweier identischen Curven Γ, Γ_1 zu betrachten, also *den Ort der Mitten der Sehnen einer einzigen Curve* zu untersuchen.

Der Cylinder $[\Gamma, g]$ geht durch die unendlich fernen Punkte von Γ und begegnet ihr demnach noch in $n(n-1)$ endlichen Punkten, welche offenbar $\frac{1}{2}n(n-1)$ Paare bilden, deren Mitten auf g liegen. Die Ordnung des Orts ist mithin $\frac{1}{2}n(n-1)$.*) Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Sehnen der Curve Γ in $\mathfrak{E}$ bilden den unendlich fernen Schnitt der Fläche. Wenn g durch einen der unendlich fernen Punkte $\mathfrak{U}$ von Γ geht, so wird, wie oben, der Cylinder $[\Gamma, g]$ $(n-1)$ter Ordnung und hat mit Γ die $(n-1)$-fache Spitze und $n-1$ weitere Punkte im Unendlichen gemein; die Gerade g schneidet also in $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ endlichen Punkten die Fläche, und $\mathfrak{U}$ ist demnach $(n-1)$-fach auf ihr. Der Anschmiegungscylinder ergiebt sich ähnlich wie oben: Wir ziehen zwischen der Asymptote u und jeder Kante des Cylinders $(\mathfrak{U}, \Gamma)$ die Mittelparallele.

*) Dies weicht nur scheinbar von der Angabe des Herrn *Darboux* S. 369 oben ab und ist allgemeiner, als was in der Dissertation von *Schilling* (die Minimalflächen fünfter Klasse, Göttingen 1880) S. 24 gesagt wird.

Dieser Cylinder geht durch u und hat die Schmiegungsebene von $\mathfrak{U}$ zur zugehörigen Berührungsebene.

Die Tangente u muss als Sehne, deren beide Endpunkte im Unendlichen liegen, einen unbestimmten Mittelpunkt haben, also ganz der Fläche angehören, sie enthält ausserdem noch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1$ Mitten von Sehnen mit endlichen Endpunkten.

Bei dieser Fläche bilden die Curven γ, γ_1 nicht zwei getrennte, sondern nur ein System, von dem jedoch durch jeden Punkt der Fläche zwei Curven gehen. Lassen wir die Sehnen in Tangenten von Γ übergehen, so erkennen wir erstens, dass die Curve Γ auf der Fläche liegt, und zweitens, dass sie eine Haupttangentencurve ist; denn die drei Punkte — Endpunkte und Mitte — die (ausser andern Punkten) eine beliebige Sehne mit der Fläche gemein hat, sind hier in einen zusammengerückt. Berührungsebene ist in jedem Punkte der Curve Γ die Schmiegungsebene. Die Curve Γ wird in jedem ihrer Punkte von derjenigen Curve γ berührt, für die der Punkt das Centrum der Homothetie ist.

Um die Klasse der jetzigen Fläche zu gewinnen, haben wir wiederum für eine beliebig gelegene Gerade g die gemeinsamen Berührungsebenen der beiden Cylinder $[\Gamma, g]$ und (Γ, g) zu betrachten; da diese Cylinder symmetrisch in Bezug auf g sind, so tangiren die r Berührungsebenen aus g an den einen auch den andern. Diese Ebenen berühren aber die beiden Cylinder in zwei symmetrischen Kanten und führen nicht zu durch g gehenden Mittelebenen zwischen parallelen Tangentialebenen der Curve in verschiedenen Punkten; wohl aber gilt dies für die $r(r-1)$ übrigen gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Cylinder, und diese bilden $\frac{1}{2}r(r-1)$ Paare in Bezug auf g symmetrischer Tangentialebenen von Γ; demnach ist $\frac{1}{2}r(r-1)$ die Klasse unserer Fläche.

Die Fläche der Mitten der Sehnen einer Curve Γ von der Ordnung n und dem Range r ist von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-1)$ und der Klasse $\frac{1}{2}r(r-1)$; sie hat die unendlich fernen Punkte der Curve Γ zu $(n-1)$-fachen (conischen) Punkten, enthält die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinien dieser Punkte, so wie die n Asymptoten von Γ vollständig und die Curve Γ als Haupttangentencurve. Endlich führt jedes Paar paralleler Tangenten von Γ — deren Zahl gleich der Ordnung der Doppelcurve auf der Tangenten-Developpable (Γ) ist — ***zu einem uniplanaren Knotenpunkte.***

9. Die ***der kubischen Raumcurve*** entsprechende Fläche dritter Ord-

nung sechster Klasse ergiebt sich aus der von mir am Schlusse meines Aufsatzes über das Flächennetz zweiter Ordnung *) behandelten Fläche — der Polfläche einer beliebigen Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf alle Flächen zweiter Ordnung, die durch eine kubische Raumcurve gehen —, wenn die Ebene $\mathfrak{E}$ sich ins Unendliche entfernt. Nur die Eigenschaft, dass die Curve Haupttangentencurve der Fläche ist, habe ich damals noch nicht bemerkt. Uniplanare Punkte bietet dieser Fall nicht, weil die kubische Raumcurve keine parallelen Tangenten besitzt.

Ich schliesse hier gleich einen wegen der folgenden Betrachtungen interessanten Specialfall an, nämlich den der kubischen Parabel, weil deren Tangentenfläche von der unendlich fernen Ebene in einem Kegelschnitte geschnitten wird.

Wir haben zu jedem Schmiegungsstrahle einer kubischen Raumcurve, d. h. zu einem Strahle, gezogen durch einen Punkt O der Curve in der zugehörigen Schmiegungsebene, einen associirten Schmiegungsstrahl **); wir ziehen die einzige Tangente der Curve, die den ersten Schmiegungsstrahl trifft, und durch ihren Berührungspunkt den Schmiegungsstrahl, welcher die Tangente von O trifft; dies ist der associirte. Conjugirt in Bezug auf eine kubische Raumcurve heissen bekanntlich zwei Punkte auf einer Sehne derselben, die zu deren Endpunkten harmonisch sind.

Nun hat Herr *Cremona* bewiesen, dass die conjugirten Punkte zu den Punkten eines Schmiegungsstrahles auf dem associirten liegen.

Demnach ist der Ort der Sehnenmitten einer kubischen Parabel eine Regelfläche dritten Grades, erzeugt durch die Schmiegungsstrahlen, welche die unendlich ferne Tangente der Curve schneiden. Da die Nachbartangente zu den Erzeugenden gehört, so ***ist diese Fläche eine Cayleysche Regelfläche dritten Grades*** ***). Die Reduction der Klasse auf 3 werden die folgenden Erörterungen näher erklären.

10. Wir wenden uns jetzt zu dem besondern Fall, dass ***sämmtliche Tangenten der einen und der andern Curve Γ und Γ_1 den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ treffen, so dass derselbe auf den Tangentenflächen (Γ), (Γ_1) der beiden Curven liegt; der Grad seiner Vielfachheit auf denselben sei m, bezw. m_1.***

*) Dieses Journal Bd. 70 S. 212.

**) *Cremona*, dieses Journal Bd. 58 S. 138.

***) Vergl. *Lie*, Math. Ann. Bd. 14 S. 353 Anm.

Einen Einfluss auf die Ordnung der Fläche (M) hat diese Specialisirung im Allgemeinen nicht, wohl aber erleidet die Klasse durch sie eine Erniedrigung und zwar aus zweierlei Gründen.

Da angenommen wird, dass alle Tangenten von I' die Curve $\mathfrak{K}$ treffen, so kann der Restschnitt der Ebene $\mathfrak{E}$ mit (I') nur aus Tangenten der Curve bestehen, der Zahl nach $r-2m$. Dieselben können aber auch zu zweien, dreien, ... unendlich nahe an einander liegen. Durch eine einzelne wird $\mathfrak{E}$ dann einfache Berührungsebene; liegen zwei unendlich nahe, dann wird $\mathfrak{E}$ Schmiegungsebene; liegen $i-1$ unendlich nahe an einander, so wird sie i-punktig berührende Ebene der Curve I'.

Sie sei an α_2 Stellen einfache Tangentialebene von I', an α_3 Stellen Schmiegungsebene, ... an α_i Stellen i-punktig berührende Ebene; so dass

$$\alpha_2+2\alpha_3+\cdots+(i-1)\alpha_i+\cdots=\Sigma(i-1)\alpha_i=r-2m.$$

Sie wird dann, wenn g wiederum eine beliebige Gerade ist, für den Cylinder (I', g) sowohl wie für den zu ihm nach g symmetrischen Cylinder $[I', g]$ α_2-mal einfache Berührungsebene, α_3-mal Wendeberührungsebene, ... α_i-mal i-kantig berührende Tangentialebene.

Eine i-kantig berührende Tangentialebene eines Kegels ist aber eine $(i-1)$-fache Berührungsebene desselben; daher ist die Vielfachheit der Ebene $\mathfrak{E}$ als Berührungsebene der beiden Cylinder (I', g) und $[I', g]$ gleich $\Sigma(i-1)\alpha_i$ oder $r-2m$, und ebenso ist $\mathfrak{E}$ (r_1-2m_1)-fache Tangentialebene für die beiden Cylinder (I_1', g) und $[I_1', g]$.

Demnach stellt sie $(r-2m)(r_1-2m_1)$ gemeinsame Berührungsebenen der Cylinder $[I', g]$ und (I_1', g) dar, welche von den in Nr. 7 erhaltenen rr_1 abzuziehen sind.

11. Hierzu kommen aber noch weitere abzuziehende in Folge des Umstandes, dass es im vorliegenden Falle nicht bloss eine endliche Zahl von Sehnen zwischen I', I_1' giebt mit parallelen Endpunkts-Tangenten, sondern ∞^1. Denn jede Tangente der Curve I' z. B. ist zu m_1 Tangenten von I_1' parallel, mit denen sie sich in dem nämlichen Punkte von $\mathfrak{K}$ trifft. Jedes solche Paar paralleler Tangenten von I' und I_1' führt aber zu ∞^1 Mittelebenen zwischen parallelen Ebenen durch sie; die ∞^2 Mittelebenen, welche sich auf diese Weise ergeben, umhüllen eine Fläche (Φ), und eine endliche Zahl von ihnen geht durch g. Diese Zahl, die Klasse von (Φ), haben wir zu ermitteln und ersichtlich auch abzuziehen, da unter den je ∞^1 Mittelebenen, welche jedes Paar paralleler Tangenten liefert, nur

eine die Berührungsebene in der Mitte der Sehne ist, also die durch g gehenden Mittelebenen im Allgemeinen nicht Berührungsebenen sind. Alle parallelen Tangentialebenen durch parallele Tangenten von Γ und Γ_1, deren Mittelebenen durch g gehen, berühren die Cylinder (Γ, g) und (Γ_1, g) bezüglich. Es sei l eine beliebige die g schneidende Gerade. Wir stellen auf ihr eine Correspondenz her, in der sich entsprechen die Spuren zweier Tangentialebenen der beiden Cylinder, die durch parallele Tangenten von Γ und Γ_1 gehen und dann, wegen ihres Parallelismus mit g, auch zu einander parallel sind. Durch jeden Punkt X von l gehen r Tangentialebenen von (Γ, g); die Tangente an Γ in jeder hat m_1 parallele Tangenten von Γ_1; die Spuren der durch diese gehenden Berührungsebenen von (Γ_1, g) auf l geben die rm_1 Punkte X_1, die dem X entsprechen; jedem X_1 entsprechen ebenso $r_1 m$ Punkte X. Wir erhalten also eine Correspondenz $(rm_1, r_1 m)$ zwischen X und X_1 und ersichtlich eine ebensolche zwischen den Punkten X' und X_1, wenn X' je symmetrisch zu X in Bezug auf den Punkt gl ist. Zu dieser Correspondenz gelangt man direct, wenn man die Cylinder $[\Gamma, g]$ und (Γ_1, g) benutzt, statt (Γ, g) und (Γ_1, g).

Man verbinde die unendlich fernen Punkte $\mathfrak{G}, \mathfrak{L}$ von g und l; jeder der beiden Schnitte dieser Linie mit $\mathfrak{K}$ giebt uns mm_1 Paare paralleler Tangenten der beiden Curven und ebenso viele durch die genannte Gerade gehende Paare von Tangentialebenen von (Γ, g) und (Γ_1, g), welche jene enthalten; alle haben den unendlich fernen Punkt von l zur Spur, und da derselbe zu sich selbst symmetrisch ist nach gl, so haben wir damit $2mm_1$ in ihm vereinigte Coincidenzen der Correspondenz (X', X_1). Die $rm_1+r_1 m-2mm_1$ übrigen Coincidenzen liefern uns ebenso viele Paare correspondirender Punkte X, X_1, für welche der Punkt gl Mitte ist. Also geht die Mittelebene zwischen den zugehörigen Tangentialebenen von Γ und Γ_1, die durch parallele Tangenten gehen und zu g parallel sind, durch gl und mithin durch g. Demnach ist die Klasse der Fläche (Φ) gleich $rm_1+r_1 m-2mm_1$; was wir noch durch folgende Ueberlegung bestätigen wollen.

Die unendlich ferne Ebene $\mathfrak{E}$ geht durch $r-2m$ Tangenten von Γ; paaren wir sie mit einer Ebene durch eine der $m_1(r-2m)$ zu diesen parallelen Tangenten von Γ_1, so wird sie selbst Mittelebene; demnach ist $\mathfrak{E}$ eine Berührungsebene von (Φ) vom Grade der Vielfachheit: $m_1(r-2m)+m(r_1-2m_1)$; durch eine beliebige unendlich ferne Gerade (z. B. die obige Gerade $\mathfrak{GL}$) gehen, wie wir eben fanden, $2mm_1$ Paare von Ebenen, welche parallele

Tangenten von Γ, Γ_1 enthalten, also auch deren Mittelebenen; die Summe dieser beiden Zahlen ist, wie nothwendig, gleich der Klasse von (Φ).

12. Ziehen wir nun den Grad der Vielfachheit $(r-2m)(r_1-2m_1)$ der Ebene $\mathfrak{E}$ als gemeinsamer Berührungsebene der beiden Cylinder $[\Gamma, g]$, (Γ_1, g) und die eben erhaltene Klasse $rm_1+r_1m-2mm_1$ der Fläche (Φ) von der Klasse rr_1 ab, welche die Fläche (M) im allgemeinen Falle hat, so erhalten wir als Klasse für den jetzigen Fall

$$rm_1+r_1m-2mm_1 = m(r_1-m_1)+m_1(r-m),$$

was, nebenbei bemerkt, der Klasse von (Φ) gleich ist. Also:

Wenn die Tangentenflächen zweier Curven vom Range r, bezw. r_1 beide durch denselben in der unendlich fernen Ebene gelegenen Kegelschnitt gehen, so dass alle Tangenten beider Curven ihn treffen und er auf der ersten Fläche m-, auf der andern m_1-fach ist; so ist die Klasse des Orts der Mitten der Sehnen zwischen beiden Curven

$$m(r_1-m_1)+m_1(r-m),$$

wie Herr *Lie* durch Betrachtung des Tangentialkegels von einem Punkte des genannten Kegelschnitts an die Fläche gefunden hat. Wenn auch Herrn *Lie*s Beweis *) kürzer ist, so ist mein Beweis allgemeiner und zeigt, meine ich, den innern Grund des Resultats.

13. *Dieselbe Zahl giebt auch* die Klasse der Fläche, welche von den Ebenen der Ebenenbüschel um die Mittelparallelen zwischen den parallelen Tangenten der beiden Curven eingehüllt wird, oder besser die Anzahl der Mittelparallelen, die von einer Geraden getroffen werden, also *den Grad der Regelfläche dieser Mittelparallelen zwischen parallelen Tangenten der beiden Curven. Die Mitten der Sehnen mit parallelen Endpunkts-Tangenten bilden auf der Fläche (M)* eine Curve mit lauter uniplanaren Punkten, also *eine Cuspidalcurve.*

Die zu zwei Punkten P, P_1 von Γ, Γ_1 mit parallelen Tangenten p, p_1 gehörigen Schmiegungsebenen π, π_1 sind in diesem Falle, weil sie beide durch dieselbe Tangente von $\mathfrak{K}$ gehen, ebenfalls parallel. Also zeigt die Grenzbetrachtung von Nr. 6, dass *die Ebene μ, welche in dem Punkte der Cuspidalcurve, der die Mitte der Verbindungssehne ist, die Fläche (M) berührt, die Mittelebene zwischen den beiden Schmiegungsebenen der Endpunkte der Sehne ist.*

*) Math. Annalen Bd. 14 S. 351; *Darboux*, Nr. 233.

Sind P', P_1' die beiden Nachbarpunkte von P, P_1 mit ebenfalls parallelen Tangenten p', p_1', so fällt die Mitte M' von $P'P_1'$, also der Nachbarpunkt von M auf der Cuspidalcurve, auf die Mittelparallele m zwischen p, p_1. ***Folglich ist der Ort der Mittelparallelen zwischen parallelen Tangenten der beiden Curven die Tangentenfläche der Cuspidalcurve.*** Der Rang dieser Curve ist demzufolge $mr_1+m_1r-2mm_1$, und die Ebenenfläche (Φ) ist keine eigentliche Fläche, sondern der Inbegriff der Ebenen durch die Tangenten der Cuspidalcurve.

Die Tangente m' in M' an die Cuspidalcurve ist wiederum parallel zu p', p_1', also zu π, π_1 und fällt deshalb in die Berührungsebene μ von M hinein, welche dadurch Schmiegungsebene der Cuspidalcurve wird. ***Die Cuspidalcurve trifft mit allen ihren Tangenten den Kegelschnitt*** $\mathfrak{K}$ ***und berührt ihn mit ihren Schmiegungsebenen.***

Zu den Curven γ, γ_1 (Nr. 3) gehört die Cuspidalcurve jedoch nicht; sie ist gemeinsame Enveloppe des einen und des andern Systems, denn in ihrem Punkte M tangirt sie ersichtlich die beiden Curven γ, γ_1, die zu I', I_1' homothetisch sind, in Bezug auf die Endpunkte P_1, P der in M halbirten Sehne als Centra.

Zwischen den beiden Curven I' und I_1' besteht hinsichtlich ihrer Punkte mit parallelen Tangenten eine Correspondenz (m, m_1); da im Allgemeinen keine entsprechenden Punkte zusammenfallen, so folgt daraus, dass die Sehnen mit parallelen Endpunktstangenten eine Regelfläche vom Grade nm_1+n_1m erzeugen.

14. Wir wenden uns zur Ermittelung der Klasse der Fläche der Sehnenmitten einer einzigen Curve I', auf deren Tangentenfläche der von allen Tangenten getroffene unendlich ferne Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ m-fach liegt. Das sonstige Verhalten dieser Tangentenfläche zur Ebene $\mathfrak{E}$ sei wie oben in Nr. 10; so dass diese Ebene die beiden Cylinder (I', g) und $[I', g]$ α_2-mal einfach berührt, α_3-mal osculirt, α_i-mal i-kantig tangirt und zwar je längs der nämlichen Kanten; denn unendlich ferne Elemente werden ja durch die Symmetrisirung nicht geändert. Dieser Umstand kommt erst jetzt zur Verwerthung, wo es sich um die gemeinsamen Berührungsebenen dieser beiden Cylinder handelt. Zunächst repräsentirt, ähnlich wie oben, die Ebene $\mathfrak{E}$ eine $(r-2m)$-fache Tangentialebene beider Cylinder, also $(r-2m)^2$ gemeinsame Berührungsebenen derselben. Haben ferner zwei Kegel mit der nämlichen Ebene in denselben $i-1$ Kanten $i-1$ Berührungen, so kommen zu der Zahl

von gemeinsamen Berührungsebenen, welche die Ebene schon als $(i-1)$-fache Berührungsebene beider vertritt, wegen der Berührung in denselben Kanten noch $i-1$ weitere durch sie vertretene hinzu; dies bleibt bestehen, wenn die $i-1$ Berührungskanten zusammenrücken, so dass eine i-kantige Berührung entsteht. Danach vertritt $\mathfrak{E}$ insgesammt

$$(r-2m)^2+\Sigma(i-1)\alpha_i=(r-2m)^2+r-2m=(r-2m)(r-2m+1)$$

gemeinsame Berührungsebenen der beiden Cylinder. Ziehen wir diese Zahl von der schon oben (Nr. 8) erhaltenen Zahl $r(r-1)$ ab, so ergiebt sich $2(r-m)(2m-1)$. Die Hälfte dieser Zahl giebt uns dann die Anzahl der Ebenen durch g, welche in der Mitte zwischen zwei zu g und zu einander parallelen Tangentialebenen von Γ liegen.

15. Darunter befinden sich aber auch noch solche, bei denen überdies auch die zugehörigen Tangenten der Curve Γ parallel sind.

Zu jeder Tangente der Curve Γ sind $m-1$ andere parallel. Es sei wieder, wie in Nr. 11, l eine die g treffende Gerade; wir wollen nun aber, entsprechend der Bemerkung in dieser Nummer, gleich die beiden Cylinder $[\Gamma, g]$ und (Γ, g) benutzen. Von jedem Punkte X' von l gehen r Tangentialebenen an $[\Gamma, g]$; in jeder haben wir eine Tangente an irgend eine der in Bezug auf die verschiedenen Punkte von g zu Γ symmetrischen Curven, welche $[\Gamma, g]$ erzeugen; wir wollen annehmen, an Γ'', die in Bezug auf G' symmetrisch ist; diese hat, ausser derjenigen, zu welcher sie symmetrisch ist, $m-1$ parallele Tangenten von Γ; die Ebenen, welche durch diese tangential an (Γ', g) gehen, liefern auf l die $r(m-1)$ dem X' entsprechenden Punkte X_1; jedem X_1 entsprechen ebenso $r(m-1)$ Punkte X'. Wir ziehen wiederum die Verbindungslinie der unendlich fernen Punkte $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}$ von g und l; durch jeden der beiden Schnitte mit $\mathfrak{K}$ gehen m Tangenten an Γ'' und m Tangenten an Γ. Wir combiniren jede von jenen mit den $m-1$ von diesen, die zu ihr nicht symmetrisch sind in Bezug auf G', und erhalten so $2m(m-1)$ Paare von Tangentialebenen von $[\Gamma, g]\equiv(\Gamma'', g)$ und (Γ', g), die uns einerseits correspondirende Punkte X', X_1 auf l liefern, andererseits die l sämmtlich in $\mathfrak{L}$ treffen; folglich vereinigen sich in diesem Punkte $2m(m-1)$ Coincidenzen der Correspondenz zwischen X' und X_1; die $2(r-m)(m-1)$ übrigen geben uns halb so viele Punktepaare auf l, welche gl zur Mitte haben und von Tangentialebenen des Cylinders (Γ, g) herrühren, die durch parallele Tangenten von Γ gehen; denn jeder der beiden Punkte eines solchen Paares ist eine Coincidenz. Durch g gehen mithin $(r-m)(m-1)$ Mittelebenen zwi-

schen parallelen Berührungsebenen von I', deren zugehörige Tangenten auch parallel sind.

16. Zieht man diese Zahl von $(r-m)(2m-1)$ ab, so ergiebt sich $m(r-m)$ als Klasse der Fläche der Sehnenmitten von I', in Uebereinstimmung mit dem von Herrn *Lie**) auf andere Weise gefundenen Resultate. Also:

Wenn sämmtliche Tangenten einer Curve vom Range r einen unendlich fernen Kegelschnitt treffen, derartig, dass derselbe auf der Fläche der Tangenten m-fach ist, so ist die Klasse der Fläche der Sehnenmitten der Curve

$$m(r-m).$$

Die Cuspidalcurve dieser Fläche, erzeugt durch die Mitten der Sehnen mit parallelen Endpunkts-Tangenten und umhüllt von den Mittelparallelen zwischen diesen Tangenten, hat den Rang $(m-1)(r-m)$.

Dass sie nicht vorhanden ist, wenn $m=1$, ist ersichtlich. Die kubische Parabel: $n=3$, $r=4$, $m=1$ führt zu einer Fläche der Sehnenmitten dritter Ordnung und dritter Klasse (vgl. Nr. 9).

17. Was nun den *Minimalwerth* der Klasse $m_1(r-m)+m(r_1-m_1)$ im Falle zweier Curven, $m(r-m)$ im Falle einer einzigen Curve anlangt, so meine ich, führen folgende Ueberlegungen wohl am schnellsten zum Ziele.

Zunächst ist $r-m \geqq 3$; bei $r=4$ (kubische Raumcurve) ist, wie bekannt, nur $m=1$ möglich, also die Behauptung ersichtlich; im Allgemeinen aber ist $m \leqq \left[\frac{r}{2}\right]$, wenn damit die ganze Zahl in $\frac{r}{2}$ bezeichnet wird, weil der m-fache Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zum Schnitte von $\mathfrak{E}$ mit der Tangentenfläche von I' gehört, also $r-m \geqq r-\left[\frac{r}{2}\right]$, d. i. $\geqq 3$, wenn $r>4$ **).

Daraus folgt: $m_1(r-m)+m(r_1-m_1) \geqq 3(m+m_1) \geqq 6$. ***Dieser Minimalwerth 6 wird erreicht,*** wenn $r=r_1=3$, $m=m_1=1$, also *bei der Fläche der Sehnenmitten zwischen zwei kubischen Parabeln, deren Tangentenflächen durch den nämlichen unendlich fernen Kegelschnitt gehen:* Verallgemeinerung der *Enneper*schen Fläche.

Ferner erhält das Product $m(r-m)$, wenn r fest ist und m von 1 bis $\left[\frac{r}{2}\right]$ sich bewegt, seinen kleinsten Werth $r-1$ beim kleinsten Werthe 1 von m, und $r-1$ wiederum seinen kleinsten Werth, wenn r den kleinsten

---

*) Math. Ann. Bd. 14 S. 352; *Darboux,* Nr. 233.

**) Man vergleiche den Beweis bei *Lie* a. a. O. S. 353 oder bei *Darboux* Nr. 238.

zulässigen Werth, d. i. $r = 4$, hat; ***der Minimalwerth 3 der Klasse der Fläche der Sehnenmitten einer Curve ergiebt sich also bei der kubischen Parabel.***

18. Etwas anders aber wird die Sache, wenn die Curven *Γ imaginär* werden, was im Falle der Minimalflächen eintritt, wo der unendlich ferne Kugelkreis der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ wird, und es sich um das Minimum der Klasse *reeller* Minimalflächen handelt. Wir haben dann die Sätze *):

Damit eine („einfache") Minimalfläche, die aus zwei imaginären algebraischen „Minimalcurven" abgeleitet ist, reell sei, ist nothwendig, dass die beiden Curven zu einander conjugirt seien.

Damit die aus einer imaginären algebraischen Minimalcurve abgeleitete („doppelte" **)) Minimalfläche reell sei, ist nothwendig, dass diese Curve zu sich selbst conjugirt sei, oder, um einen von mir vor längerer Zeit ***) eingeführten Ausdruck zu gebrauchen, dass sie reell-imaginär sei.

Im ersteren Falle muss also $n = n_1$, $r = r_1$, $m = m_1$ sein, also ist die Klasse der Fläche $2m(r-m)$, und ***man erhält,*** weil die Curven nicht zu sich selbst, sondern nur jede zur andern conjugirt sein müssen, ***den kleinsten Werth 6,*** wenn $r = 4$, $m = 1$ $(n = 3)$, also ***wenn die beiden Curven zwei conjugirt imaginäre kubische Parabeln sind, die ihre Tangentenflächen durch den unendlich fernen Kugelkreis schicken,*** d. i. bei der ***Ennepers***chen Fläche †); die Ordnung ist $n^2 = 9$ (vergl. Nr. 7).

19. Damit aber im zweiten Falle die Curve reell-imaginär sei, müssen nicht bloss die Ordnung n der Curve, sondern auch der Rang r und die Klasse n' gerade sein ††); denn die Curve wird von der conjugirten Geraden jeder ihrer Tangenten berührt und von der conjugirten Ebene jeder ihrer Schmiegungsebenen osculirt; trifft eine reelle Gerade aber eine Tangente der Curve, so trifft sie auch die conjugirte.

Wir haben demnach die Raumcurve vom niedrigsten geraden Range

*) ***Lie,*** a. a. O. S. 345, 349; ***Darboux*** Nr. 222, 224.

) Die Ausdrücke: Minimalcurven (Raumcurven, deren sämmtliche Tangenten den unendlich fernen Kugelkreis treffen), doppelte, einfache Minimalfläche (je nachdem es möglich ist, die beiden Minimalcurven, deren Sehnenmitten-Ort die Fläche ist, durch zwei entgegengesetzte Translationen in eine und dieselbe Curve überzuführen, oder nicht) rühren von Herrn ***Lie* her: a. a. O. S. 337, 346; ***Darboux*** Nr. 219, 224.

***) Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung S. 283.

†) Zeitschrift f. Math. Bd. 9 S. 108; ***Darboux*** Nr. 207, 234.

††) Vergl. ***Lie,*** a. a. O. S. 375 Anm.

aufzusuchen, bei welcher Ordnung und Klasse ebenfalls gerade sind und auf deren Tangentenfläche sich ein einfacher Kegelschnitt befindet.

Da der Rang 4 nur mit der Ordnung und Klasse 3 verbunden ist, so müssen wir den Rang 6 untersuchen. Es giebt vier Raumcurven dieses Ranges mit gleichzeitig gerader Ordnung und Klasse:

α) zwei, bei denen $n = 4$, $n' = 6$, nämlich:

1) die Raumcurve vierter Ordnung erster Art mit einem Doppelpunkte;

2) die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art;

β) zwei, bei welchen $n = 6$, $n' = 4$, deren Tangentenflächen bezw. zu den Raumcurven α) dual sind, also:

1′) die Rückkehrcurve der abwickelbaren Fläche, eingehüllt von den gemeinsamen Tangentialebenen einer Fläche zweiten Grades F^2 und eines Kegelschnitts K, dessen Ebene von F^2 in einem (nicht auf K gelegenen) Punkte berührt wird;

2′) die Rückkehrcurve der Developpablen, eingehüllt von den Berührungsebenen, welche einer Fläche dritter Klasse und einer F^2, ausser zwei Ebenenbüscheln um sich nicht schneidende Axen, gemeinsam sind.

Von diesen vier Curven besitzt nur β) 1′) einen einfachen Kegelschnitt auf ihrer Tangentenfläche, nämlich den K; ist dieser also der unendlich ferne Kugelkreis, so erhalten wir die gewünschte reelle doppelte Minimalfläche niedrigster Klasse $6-1=5$.

Die niedrigste Klasse nicht bloss einer reellen algebraischen doppelten Minimalfläche, sondern einer reellen algebraischen Minimalfläche überhaupt ist 5. ***Ihr entspricht der Ort der Sehnenmitten der Rückkehrcurve sechster Ordnung derjenigen abwickelbaren Fläche, welche dem unendlich fernen Kugelkreise und einem reellen Paraboloide umgeschrieben ist: Hennebergs*** *) Fläche. Ihre Ordnung — über die einige Zeit Zweifel herrschte — ist nach Nr. 8 $\frac{1}{2}n(n-1) = 15$, wie durch ***Lie*** **) (und ***Schilling***) zuerst festgestellt worden ist.

Das Paraboloid kann durch jedes zu ihm confocale ersetzt werden, insbesondere auch durch jede der beiden Parabeln der Schaar confocaler Paraboloide, von denen jede die Focalcurve der andern ist und die bekanntlich congruent sind. Demnach hängt die ***Hennebergs***che Fläche gestaltlich nur

---

*) ***Henneberg,*** Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben, Heidelberger Dissertation, Zürich 1875; Annali di Matematica Ser. II Bd. 9 S. 54.

**) a. a. O. S. 416.

von dem gemeinsamen Parameter dieser Parabeln ab; woraus sich die von *Schilling* *) bemerkte ***Aehnlichkeit aller Henneberg'schen Flächen*** unmittelbar ergiebt. Die Ebenen der beiden Parabeln sind Symmetrie-Ebenen der Fläche.

20. Für die Curve β) 1') ist die Ebene von K, wie bekannt, doppelte Schmiegungsebene; die Osculationspunkte liegen auf K und sind die Berührungspunkte des K mit den beiden vom Berührungspunkte der F^2 mit der Ebene von K kommenden Tangenten, welche auch die Raumcurve in denselben Punkten berühren. Aus dieser doppelten Osculation folgt, dass von den 15 Geraden der *Henneberg*schen Fläche in $\mathfrak{E}$ sich 9 in eine den Kugelkreis schneidende reelle Gerade vereinigen, während in jeder der beiden Tangenten in den Schnitten desselben mit dieser Geraden drei weitere zusammenfallen **).

Da jede Ebene, welche die Tangentenfläche einer kubischen Raumcurve in einem Kegelschnitte durchschneidet, die Curve in einem auf demselben befindlichen Punkte osculirt, so findet man analog, dass der Schnitt von $\mathfrak{E}$ mit der *Enneper*schen Fläche, aus 9 Geraden besteht, die sich alle in der reellen Verbindungslinie der Osculationspunkte der beiden conjugirt imaginären kubischen Parabeln mit $\mathfrak{E}$ vereinigen.

21. Die Entstehung der Fläche der Sehnenmitten zwischen zwei Curven Γ, Γ_1, deren Tangenten sämmtlich den unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ treffen, durch ihre Tangentialebenen μ — Enveloppe der Mittelparallel-Ebenen zwischen je zwei Tangenten p, p_1 der Curven Γ, Γ_1 (Nr. 3) — kann man noch etwas anders beschreiben. Es sei w die Schnittlinie der beiden Schmiegungsebenen in P, P_1, also eine Gerade, welche die beiden Tangenten-Developpabeln (Γ), (Γ_1) gleichzeitig berührt, und zwar auf p, p_1 in W, W_1; der Mittelpunkt Z von WW_1 liegt ebenfalls in μ. Die unendlich ferne Gerade von μ verbindet die beiden unendlich fernen Punkte von p, p_1, die Tangenten in diesen an $\mathfrak{K}$ sind die unendlich fernen Geraden der beiden Schmiegungsebenen; also sind die unendlich fernen Elemente von w und μ polar in Bezug auf $\mathfrak{K}$, oder w und μ sind conjugirt in Bezug auf $\mathfrak{K}$, wenn dieser als ausgeartete Fläche zweiter Klasse angesehen wird.

Man construirt die gemeinsamen Tangenten der beiden Tangentenflächen von Γ, Γ_1 und legt je durch die Mitte zwischen den beiden Berührungspunkten

---

*) a. a. O. S. 31.

**) *Lie*, a. eben a. O., *Schilling*, a. a. O. S. 44.

einer solchen Tangente die zu ihr in Bezug auf die Fläche $\mathfrak{K}$ conjugirte Ebene. Diese Ebenen hüllen unsere Fläche ein.

Die Geraden w bilden eine Congruenz, welche (Γ) und (Γ_1) zu Brennflächen hat.

Ist $\mathfrak{K}$ der Kugelkreis, so ist μ zu w senkrecht, also die „Mittelebene" des Congruenzstrahls w, wenn wir diejenige Ebene so nennen, welche die Strecke auf ihm zwischen den Brennpunkten senkrecht halbirt. Nennen wir ferner, mit den französischen Geometern, eine Gerade isotrop, wenn sie den unendlich fernen Kugelkreis (ombilicale) trifft, eine abwickelbare Fläche isotrop, wenn ihre Erzeugenden es sind, und eine Strahlencongruenz isotrop, wenn sie zwei solche Developpablen zu Brennflächen hat, so haben wir:

Die Mittelebenen der Strahlen einer isotropen Congruenz umhüllen eine Minimalfläche, und jede Minimalfläche kann in ∞^3 Weisen so erzeugt werden *).

22. Setzen wir die beiden Curven Γ, Γ_1 wieder in allgemeiner Lage voraus und ***theilen die Sehnen PP_1 in M so, dass $PM : MP_1 = \lambda : \lambda_1$.*** Das Homothetie-Verhältniss der Curven γ, γ_1 (Nr. 3) ist nun $\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}$, $\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}$; sie bilden, wie früher, zwei conjugirte Systeme auf der Fläche (M), und diese ist, wenn Γ, Γ_1 Minimalcurven (lignes isotropes oder de longueur nulle) sind, eine Minimalfläche. Die Tangentialebene von M ist parallel zu den Parallelebenen durch die Tangenten von P, P_1 und theilt (um es kurz so auszudrücken) den Raum zwischen ihnen im Verhältnisse $\lambda : \lambda_1$. Wir erhalten auf diese Weise, den verschiedenen Werthen von $\lambda : \lambda_1$ entsprechend, ∞^1 Flächen (M) (Minimalflächen im besondern Falle), die in correspondirenden, d. h. auf derselben Sehne PP_1 gelegenen Punkten parallele Berührungsebenen haben **). Aber entsprechende Linienelemente dieser Flächen sind nicht gleich; also sind dieselben nicht auf einander abwickelbar, daher auch nicht die Verallgemeinerungen der „associirten" Flächen, welche Herr ***Darboux*** in Nr. 210 ff. bespricht, bei denen ja auch correspondirende Punkte auf einem Kegelschnitte liegen.

Wir construiren, wenn g wieder eine beliebige Gerade ist, zu Γ in Bezug auf einen beliebigen Punkt G' von g die homothetische Curve Γ' für das Verhältniss $-\frac{\lambda_1}{\lambda}$; der Cylinder (Γ', g) enthält die für das nämliche

*) ***Ribaucour,*** Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle (Mémoires couronnés par l'Académie de Belgique, Bd. 44) S. 30.

) ***Ribaucour,* a. a. O. S. 17.

Verhältniss in Bezug auf die übrigen Punkte von g zu Γ homothetischen Curven und wird von solchen Parallelebenen π' zu Tangentialebenen π von Γ eingehüllt, dass je die den Raum $\pi\pi'$ im Verhältniss $\lambda : \lambda_1$ theilende Ebene durch g geht; er tritt an Stelle von $[\Gamma, g]$. Wir erkennen leicht, dass mit den nothwendigen einfachen Veränderungen alles, was in Nr. 5—7, 10—13 gesagt ist, wiederholt werden kann, und dass insbesondere ***die Ordnung und Klasse der Fläche (M) sich nicht ändert.***

Handelt es sich aber um eine einzige Curve Γ, so liefert nun jede Sehne zwei Punkte, und weil nun die beiden Endpunkte sich ungleichartig verhalten, sind die in Nr. 8, 14—16 an verschiedenen Stellen vorgenommenen Halbirungen der erhaltenen Zahlen im jetzigen allgemeineren Falle nicht vorzunehmen, und so ergiebt sich z. B. in dem uns interessanteren Falle, dass $\mathfrak{R}$ von allen Tangenten von Γ getroffen wird, ***eine Fläche von der Ordnung $n(n-1)$ und der Klasse $2m(r-m)$.***

II.

23. Wir wollen annehmen, dass ***auf der Fläche (M) der Sehnenmitten zwischen Γ, Γ_1 eine Gerade s vollständig liege.*** Dann giebt es ∞^1 Sehnen, welche durch s gehälftet werden. Beide Endpunkte müssen die Curven durchlaufen, weil in Bezug auf einen festbleibenden Endpunkt auf der einen Curve die andere homothetisch zu s würde. Ist nun PP_1 eine durch s in M gehälftete Sehne, so fällt s in die Tangentialebene μ in M an (M); dies bewirkt, dass die Berührungsebenen der beiden Cylinder (Γ, s), (Γ_1, s) längs der beiden durch P, P_1 gehenden Kanten sowohl wie diese Kanten symmetrisch in Bezug auf s sind. Also sind es auch die Cylinder selbst.

Setzen wir nun wieder voraus, dass die Tangenten der beiden Curven Γ, Γ_1 denselben unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{R}$ treffen, und noch überdies, dass dieser Kegelschnitt den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{S}$ von s und die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{s}$ einer zu s senkrechten Ebene σ zu Pol und Polare habe.

Die Tangenten an Γ, Γ_1 in zwei in Bezug auf s symmetrischen Berührungsebenen der beiden Cylinder gehen entweder nach demselben von den beiden Punkten, in denen die unendlich ferne Gerade t der beiden Berührungsebenen den $\mathfrak{R}$ durchschneidet, oder die eine nach dem einen, die andere nach dem andern. Die Continuität fordert, dass jenes oder dieses dann durchweg eintritt. Im ersteren Falle sind die Tangenten PP' und P_1P_1'

durchweg parallel; dann erkennt man leicht, dass die beiden auf einander folgenden Sehnen PP_1, $P'P_1'$ denselben Mittelpunkt haben, den Schnitt von s mit der Ebene (PP', P_1P_1'). Der Mittelpunkt bleibt dann aber fest und durchläuft nicht die Gerade s. Dass s etwa in die Ebene (PP', P_1P_1') zweier parallelen Tangenten hineinfällt, kann nur an einzelnen Stellen geschehen, und müsste überdies s dann, wenn sie zwei nicht identische Mitten consecutiver Sehnen mit parallelen Endpunkts-Tangenten enthielte, als Tangente der Cuspidalcurve (Nr. 13) den $\mathfrak{K}$ treffen, was nicht angenommen ist.

Mithin kann nur der zweite Fall eintreten; aber die beiden Schnitte $(t\mathfrak{K})$ sind zu $\mathfrak{S}$ und $t\mathfrak{f}$ harmonisch; d. h. die beiden Tangenten PP', P_1P_1' haben entgegengesetzt gleiche Neigung gegen s oder σ. Die Curve Γ^* also, die zu Γ symmetrisch ist in Bezug auf s, liegt auf (Γ_1, s) so, dass die Tangenten von Γ_1 und Γ^* in Punkten derselben Cylinderkante parallel sind; was zur Folge hat, dass die eine Curve durch Translation mit der andern zur Deckung gebracht werden kann; oder, was dasselbe ist, man kann mit Γ selbst und Γ_1 zwei entgegengesetzt gleiche Translationen vornehmen, durch welche sie symmetrisch zu einander werden bezüglich s. Weil aber solche Translationen die Fläche (M) nicht ändern, so erhält man den Satz:

Wenn auf der Sehnenmitten-Fläche zweier Curven, deren Tangenten alle den unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ treffen, eine Gerade vollständig liegt, deren unendlich ferner Punkt der Pol der unendlich fernen Geraden einer zu ihr senkrechten Ebene in Bezug auf $\mathfrak{K}$ ist, so ist diese Gerade eine Symmetrie-Axe für die Fläche.

Ist $\mathfrak{K}$ der unendlich ferne Kugelkreis, dann wird von jeder Geraden die Polar-Bedingung erfüllt, und wir haben den Satz des Herrn *Schwarz* *):

Jede auf einer Minimalfläche gelegene Gerade ist eine Symmetrie-Axe für dieselbe.

24. Wir nehmen nun Γ und Γ_1 in symmetrischer Lage in Bezug auf s an und setzen weiter voraus, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zum Büschel der den Kugelkreis in seinen Schnitten mit $\mathfrak{f}$ berührenden Kegelschnitten gehöre — welcher Büschel ja den Kugelkreis selbst enthält —; d. h., dass alle Geraden, welche $\mathfrak{K}$ treffen, also auch die Tangenten von Γ und Γ_1, mit σ einen constanten Winkel φ bilden, — dessen Tangente gleich i wird, wenn $\mathfrak{K}$ in den Kugelkreis übergeht.

---

*) Dieses Journal, Bd. 80, S. 292; *Darboux* Nr. 249.

Es seien nun Δ, Δ_1 die (Orthogonal-) Projectionen der Curven Γ, Γ_1 auf die Ebene σ, ferner QQ', Q_1Q_1' diejenigen der Curvenelemente PP', P_1P_1' und N die der Mitte M von PP_1, einer beliebigen Sehne zwischen Γ, Γ_1; so ist $2NM = QP + Q_1P_1$; $Q'P' - QP = QQ' \operatorname{tang}\varphi$; also $QP = b \operatorname{tang}\varphi$, wenn b der Bogen von Δ ist, gemessen von einem passend *) gewählten Anfangspunkte auf dieser Curve bis zu Q; b_1 habe ähnliche Bedeutung für Δ_1, so dass $Q_1P_1 = b_1 \operatorname{tang}\varphi$, wobei angenommen wird, dass der positive Sinn für b_1 symmetrisch zu dem für b ist; demnach $2NM = (b+b_1)\operatorname{tang}\varphi$.

Die beiden Curven Δ und Δ_1 sind symmetrisch in Bezug auf den Fusspunkt S von s in σ; es sei Q^* der zu Q_1 symmetrische Punkt auf Δ, so ist $Q^*Q \parallel SN$ und $= 2SN$; der symmetrische Bogen zu b_1 sei b^*; die beiden Bogen b, b^* werden also auf Δ gemessen bis Q, Q^* beziehlich in demselben Sinne, aber von verschiedenen Anfangspunkten A, A^* aus.

Die Fläche (M) ergiebt sich demnach folgendermassen:

Man verbinde zwei Punkte Q^*Q der Curve Δ in der Ebene σ; b^*, b seien die Bogen dieser Curve bis zu Q^*, Q, anfangend in den Punkten A^*, A bezw.; man ziehe vom Punkte S die Gerade SN parallel und von gleichem Sinne mit Q^*Q und gleich $\frac{1}{2}Q^*Q$ und errichte auf σ in N das Loth NM gleich $\frac{1}{2}(b+b^*)\operatorname{tang}\varphi$; der Punkt M beschreibt dann die Fläche (M), für welche das Loth s auf σ in S Symmetrie-Axe ist.

Wir erkennen, dass eine Veränderung eines der beiden Anfangspunkte A, A^* nur eine translatorische, also unwesentliche Verschiebung der Fläche hervorbringt; also können wir sie zusammenfallen lassen; sodann ist ersichtlich, dass wir nur eine Aehnlichkeits-Transformation, also ebenfalls nur eine unwesentliche Aenderung vornehmen, wenn wir die beiden Factoren $\frac{1}{2}$ unterdrücken.

Man überzeugt sich leicht, dass Δ eine beliebige ebene Curve sein kann.

Ersetzt man, um zum Fall der Minimalflächen zu gelangen, $\operatorname{tang}\varphi$ durch i, so erhalten wir den Satz, den Herr *Darboux* in Nr. 250 ableitet, indem wir noch mit Δ in Bezug auf S als Centrum eine Aehnlichkeits-Transformation, deren Verhältniss i ist, vornehmen.

25. Der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{S}$ sei nun Scheitel eines Berührungscylinders der Fläche (M), so dass der Schnitt desselben mit σ ein Normal-

*) d. h. so, dass b und QP gleichzeitig durch O gehen und das Vorzeichen wechseln.

schnitt ist. Ueber $\mathfrak{K}$, der von allen Tangenten von Γ und Γ_1 getroffen wird, machen wir die nämliche Voraussetzung wie in der vorigen Nummer.

M sei ein Punkt der Berührungscurve des Cylinders; seine Tangentialebene μ ist also normal zu σ. Sie ist parallel zu den beiden Tangenten der Endpunkte P, P_1 der in M halbirten Sehne, folglich auch zu den beiden Ebenen π, π_1, welche dieselben auf σ projiciren. M', die Mitte von $P'P'_1$, sei zunächst ein beliebiger an M unendlich naher Punkt auf (M), also in μ. Die Projectionen von P, P_1, P', P'_1, M, M' auf σ seien Q, Q_1, Q', Q'_1, N, N'; so ist:

$$NN' \parallel QQ' \parallel Q_1Q'_1 \quad \text{und} \quad 2NN' = QQ' + Q_1Q'_1,$$

oder:

$$2d\beta = db + db_1,$$

wenn β, b, b_1 die Bogen des Normalschnitts des Cylinders und der Projectionen von Γ, Γ_1 sind. Bezeichnen wir die Abstände QP, Q_1P_1, NM mit z, z_1, ζ, so ist wegen des Verhaltens von Γ, Γ_1 zu $\mathfrak{K}$ und wegen der vorausgesetzten Eigenschaft dieser Curve:

$$db = dz \operatorname{cotg}\varphi, \quad db_1 = -dz_1 \operatorname{cotg}\varphi \text{ *)};$$

also:

$$2d\beta = (dz - dz_1)\operatorname{cotg}\varphi.$$

Ist M' der unendlich nahe Punkt neben M auf der Berührungscurve und schreiten wir auf dieser vorwärts, so schliessen sich die unendlich kleinen Grössen an einander an, und wir können summiren, wodurch sich, bei passend gewähltem Anfangspunkt für β, ergiebt:

$$(1.) \qquad 2\beta = (z - z_1)\operatorname{cotg}\varphi.$$

Wenn nun (M) algebraisch ist, so sind es auch Γ, Γ_1 und die Berührungscurve des Cylinders, und wir haben:

$$(2.) \qquad \zeta = \chi(\xi),$$

*) Die verschiedenen Vorzeichen ergeben sich so: Gleichem Sinne von QQ' und $Q_1Q'_1$ oder von db, db_1 entspricht ungleicher Sinn der Coordinaten-Zuwächse dz, dz_1; denn die beiden Ebenen durch MM', welche die Sehnen PMP_1, $P'M'P'_1$ enthalten, schneiden π, π_1 in zwei unendlich schmalen Streifen, die, weil MM' zwischen π, π_1 liegt, solche Lage haben, dass, wenn etwa in π die Parallele durch P' die höhere ist, in π_1 diejenige durch P_1 es ist; die beiden Tangenten PP', $P_1P'_1$ gehen eben auch hier nach den beiden verschiedenen Schnitten der parallelen Ebenen π, π_1 mit $\mathfrak{K}$ und haben also entgegengesetzt gleiche Neigung gegen σ; daher sind die unendlich kleinen Strecken PP', $P_1P'_1$, da die Streifen wohl gleiche Breite haben, aber nicht parallel zu σ sind, nicht gleich und ebenso wenig ihre Projectionen.

$$(3.) \qquad z = f(x), \quad z_1 = f_1(x_1),$$

worin ξ, x, x_1 die einen Coordinaten von N, Q, Q_1 in Bezug auf ein in σ gelegenes Coordinaten-System und χ, f, f_1 algebraische Functionen sind. Ferner:

$$(4.) \qquad x + x_1 = 2\xi,$$
$$z + z_1 = 2\zeta$$

oder:

$$(5.) \qquad f(x_1) + f_1(x_1) = 2\chi(\xi).$$

Aus (4.), (5.) ergeben sich x, x_1 als algebraische Functionen von ξ, demnach wegen (3.) auch z, z_1 und wegen (1.), da φ constant ist, auch β.

Der Normalschnitt unseres Tangentialcylinders hat daher die Eigenschaft, dass sein Bogen algebraische Function der einen Coordinate des Endpunktes ist. Dann muss er die Evolute einer algebraischen Curve sein.

Weil nun der Kugelkreis für jeden unendlich fernen Punkt die für $\mathfrak{K}$ vorausgesetzte Eigenschaft besitzt, so haben wir den Satz von *Henneberg* *): *Der Normalschnitt jedes einer algebraischen Minimalfläche umgeschriebenen Cylinders ist die Evolute einer algebraischen Curve.*

26. Eine ebene geodätische Linie einer Fläche ist Normalschnitt des längs ihr umgeschriebenen Cylinders; demnach ist jede auf einer algebraischen Minimalfläche befindliche ebene geodätische Linie Evolute einer algebraischen Curve **).

Es sei σ die Ebene einer geodätischen Linie auf (M) und MM' ein Element derselben; so werden nun die Streifen in π, π_1, zwischen denen PP', P_1P_1' liegen, zu σ parallel; die gleiche Neigung φ dieser Elemente gegen σ bewirkt, dass sie einander gleich sind und ebenso ihre Projectionen QQ', Q_1Q_1'; da diese überdies parallel sind, so ist $Q'Q_1' \# QQ_1$. Nehmen wir dazu, dass P und P_1 entgegengesetzt gleiche Entfernungen von σ haben, so ergiebt sich, dass zwei entgegengesetzt gleiche Translationen von der Grösse $\frac{1}{2}QQ_1$ und der Richtung QQ_1 die beiden Curven Γ, Γ_1 in symmetrische Lage in Bezug auf σ bringen; denn auch hier müssen die Endpunkte der Sehnen, deren Mitten die ebene geodätische Linie erzeugen, die beiden Curven durchlaufen. Demnach ist σ Symmetrie-Ebene für (M). Also:

Wenn die Fläche der Mitten der Sehnen zwischen zwei Curven, deren

---

*) Annali di Matematica Ser. II Bd. 9 S. 54; *Darboux,* Nr. 253.

**) *Henneberg,* Dissertation S. 47; *Darboux,* Nr. 251.

Tangenten sämmtlich den unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ treffen, welcher den Kugelkreis doppelt berührt, eine geodätische Linie in einer Ebene durch die Berührungssehne enthält, oder mit andern Worten: ***wenn die Fläche der Mitten der Sehnen zwischen zwei Curven, deren Tangenten eine constante Neigung gegen eine Ebene σ haben, eine geodätische Linie in dieser Ebene hat, so ist diese Ebene eine Symmetrie-Ebene der Fläche.***

Wird $\mathfrak{K}$ der Kugelkreis selbst, dann hat man:

Die Ebene jeder auf einer Minimalfläche gelegenen ebenen geodätischen Linie ist eine Symmetrie-Ebene der Fläche*).

27. Auf der Fläche (M) befinde sich nun eine Krümmungslinie K in der Ebene σ; der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ berühre nach wie vor den Kugelkreis in den Schnitten mit σ.

Die Tangentialebenen an (M) in den Punkten von K haben dann nach dem bekannten Satze eine constante Neigung α gegen σ. MM' sei ein Element von K; $P, P_1, \ldots Q, Q_1, \ldots, x, x_1, z, z_1$ mögen die bisherigen Bedeutungen haben; ξ ist die x-Coordinate von M selbst; $\zeta = 0$, $z_1 = -z$. Die Spuren, in σ, der beiden Parallelebenen π, π_1 durch die Tangenten PP', P_1P_1' zur Berührungsebene μ von M seien v, v_1, zwischen denen MM' in der Mitte liegt. Wir projiciren P, P' auf v nach R, R' und P_1, P_1' auf v_1 nach R_1, R_1', so dass auch QR und $Q'R'$ auf v, Q_1R_1 und $Q_1'R_1'$ auf v_1 senkrecht stehen.

Da $QP = -Q_1P_1$, so ist auch $QR = -Q_1R_1$; daher ist M Mitte von QQ_1 und RR_1, ebenso M' von $R'R_1'$; also $MM' = RR'$, da, wie oben, $QQ' = Q_1Q_1'$.

PP' und QQ' mögen v in V treffen; so zeigt die Ecke (VP, VQ, v), dass $\sin\psi = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\alpha}$, wenn ψ den Winkel (QQ', v) bedeutet; also ist dieser Winkel constant. Wie bisher, haben wir:

$$dz = QQ'\operatorname{cotg}\varphi = RR'\operatorname{cotg}\varphi\cos\psi = d\beta\operatorname{cotg}\varphi\cos\psi,$$

wo β den Bogen der Krümmungslinie K bedeutet, dessen Element MM' ist. Demnach stehen z und β in algebraischer Beziehung. Ist nun die Fläche (M) algebraisch, so befindet sich $z = -z_1$ mit x und x_1 und mit $\xi = \frac{1}{2}(x+x_1)$ in algebraischer Beziehung, also auch β mit ξ; K ist demnach Evolute einer algebraischen Curve. Folglich:

Wenn die Tangenten zweier algebraischen Curven Γ, Γ_1 alle eine und

*) *Darboux,* Nr. 251.

dieselbe Neigung φ gegen eine feste Ebene haben und die Fläche der Sehnenmitten eine Krümmungslinie in einer zu dieser Ebene parallelen Ebene enthält, so ist diese Linie die Evolute einer algebraischen Curve.

Speciell:

Jede ebene Krümmungslinie, die auf einer algebraischen Minimalfläche liegt, ist Evolute einer algebraischen Curve *). —

Mögen diese einfachen Beispiele einer rein geometrischen Behandlung der Minimalflächen zunächst genügen.

*) *Lie*, Math. Annalen Bd. 15 S. 472; *Darboux*, Nr. 251.

Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Die aus den sämmtlichen ganzen oder den ungeraden Zahlen gebildeten unendlichen Reihen, welche *Euler* in dem 15ten Capitel des ersten Bandes der Introductio in analysin betrachtet, sind zum Vorbilde einer ausgedehnteren Gattung von unendlichen Reihen geworden. In der Mittheilung: Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, welche *Dirichlet* Bd. XVIII dieses Journals, S. 259 publicirt hat, hebt er hervor, dass die Reihen, mit Hülfe deren er bewiesen, dass jede arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, unendlich viele Primzahlen enthält, den erwähnten Reihen ähnlich gebildet sind; er fügt dann hinzu, dass die Betrachtung der Reihen dieser Art eine höchst fruchtbare Methode der unbestimmten Analysis begründe, die auf sehr verschiedene Fragen angewendet werden könne. Die Folgezeit hat gezeigt, welche grossartigen Erfolge die Arithmetik dieser Methode *Dirichlets* verdankt. *Euler* hat die auf alle ganzen Zahlen auszudehnende Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^\sigma},$$

bei der σ eine reelle über der Einheit liegende Grösse bedeuten möge, in der Weise erweitert, dass in der Abhandlung: Nova methodus, quantitates integrales determinandi, Nov. Comm. Ac. Petrop. t. XIX, p. 66, die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nu}{n^\sigma}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nu}{n^\sigma}$$

für positive ganzzahlige Werthe des Exponenten σ erörtert werden. Indem ich mich im Jahre 1856 mit den letztern Reihen, welche, wofern $\cos u$ nicht gleich der Einheit ist, für jeden die Null übertreffenden Werth von σ con-

vergiren, beschäftigte, und indem ich die betreffenden Summen als stetige Functionen der Variabeln u und σ auffasste, kam ich zu der Untersuchung der allgemeineren Reihe

$$(A.) \qquad \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{e^{2\pi nv\sqrt{-1}}}{(k+(n+x)\sqrt{-1})^{\sigma}},$$

für $N=\infty$, wo v und x reelle, k und σ positive Grössen bedeuten. Diese Arbeit ist in Bd. LIV, S. 313 dieses Journals veröffentlicht. Wie man sieht, tritt hier an die Stelle der sämmtlichen natürlichen Zahlen eine nach beiden Seiten unbegrenzt fortschreitende arithmetische Reihe, deren erstes Glied die complexe Grösse $k+x\sqrt{-1}$ mit positivem reellen und beliebigem imaginären Theil, und deren Differenz die imaginäre Einheit $i=\sqrt{-1}$ ist.

Bei Anwendung desjenigen logarithmus naturalis der vorkommenden complexen Grössen, dessen imaginärer Theil zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, werden die eingeführten Potenzen durch die Gleichung

$$(k+(n+x)\sqrt{-1})^{\sigma} = e^{\sigma\log(k+(n+x)\sqrt{-1})}$$

definirt. Vermittelst der Verwandlung in ein bestimmtes Integral und der Benutzung der Eigenschaften der *Fourier*schen Reihen lässt sich die Reihe (*A.*) transformiren. Unter der Voraussetzung, dass $0<v<1$, und dass, für $v=0$, $\sigma>1$ sei, ergiebt sich nach (10.) der angeführten Abhandlung eine Umformung in die Reihe

$$(B.) \qquad \frac{(2\pi)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma)} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{e^{-2\pi(v+m)(k+x\sqrt{-1})}}{(v+m)^{1-\sigma}},$$

welche für $\sigma=1$ zu einer geometrischen Reihe wird, und deshalb gleich dem Ausdruck

$$(C.) \qquad 2\pi \frac{e^{-2\pi v(k+x\sqrt{-1})}}{1-e^{-2\pi(k+x\sqrt{-1})}}$$

ist. Geht man von dem positiv angenommenen Werthe von k zu einem verschwindenden über, so findet sich, dass für einen Werth von x, der nicht gleich einer ganzen Zahl ist, und für einen unter der Einheit liegenden positiven Werth von σ, bei strengem Festhalten der vorgeschriebenen Ordnung der Summation, die Gleichheit zwischen (*A.*) und (*B.*) bestehen bleibt, wie in (24.) der angeführten Abhandlung angegeben ist.

Bei den besonderen Werthen $x=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{2}$ liefert diese Gleichung

diejenige Relation, welche Herr ***Schlömilch*** im Jahre 1849 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. III, S. 130 bekannt gemacht hat.

In dem Novemberheft des Monatsberichts der Berliner Akademie vom Jahre 1859 erschien die Abhandlung ***Riemanns*** über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Zur Untersuchung dieses Gegenstandes, welchem, wie ***Riemann*** bemerkt, ***Gauss*** und ***Dirichlet*** längere Zeit ihr Interesse geschenkt haben, schlug ***Riemanns*** Genie einen an neuen Aufschlüssen und neuen Räthseln reichen Weg ein. ***Riemann*** geht von der schon erwähnten, von ***Euler*** herrührenden Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}$$

aus, weist darauf hin, dass dieselbe für solche complexen Werthe von s, deren reeller Theil über der Einheit liegt, convergire, und betrachtet $\zeta(s)$ als eine Function der complexen Variable s, für welche durch Benutzung eines bestimmten Integrals eine für jeden complexen Werth von s gültig bleibende Darstellung abgeleitet wird. Diese Darstellung lehrt, dass die Function $\zeta(s)$ für jeden complexen Werth von s einwerthig, für jeden endlichen Werth von s, ausser 1, selbst endlich ist, und liefert unter der Voraussetzung, dass der reelle Theil von s negativ sei, eine Umformung, die ***Riemann*** so ausdrückt

$$2\sin\pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \Sigma n^{s-1}\left((-i)^{s-1}+i^{s-1}\right).$$

Diese Gleichung geht, sobald statt $\Pi(s-1)$ die Bezeichnung $\Gamma(s)$ eingeführt, und der letzte Factor der rechten Seite in den Factor $2\sin\pi s$ der linken dividirt wird, in die folgende Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ über

$$2\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\zeta(s) = (2\pi)^s\zeta(1-s).$$

Bei dem Studium von ***Riemanns*** Arbeit konnte mir der Zusammenhang nicht entgehen, welcher zwischen der so eben angeführten Relation und dem Ergebniss meiner vorhin citirten Abhandlung besteht, wonach sich die obige Reihe (*A.*) in die Reihe (*B.*) verwandelt. Ich dehnte die Definition von (*A.*) auf complexe Werthe der Variable σ aus, bewerkstelligte den Uebergang von der einen Gestalt in die andere vermittelst der von ***Riemann*** gebrauchten Methode, und wandte dies Verfahren auch auf die gleichfalls oben erwähnten Reihen an, durch welche ***Dirichlet*** in der Arbeit über die arithmetische Progression sein Ziel erreicht hat. Doch habe ich es unterlassen, von den betreffenden Untersuchungen etwas zu veröffentlichen.

Dem Vorgange *Riemanns* folgten, ohne das in meiner Abhandlung von 1856 ausgesprochene Transformationsprincip zu kennen, Herr *Hurwitz* in der Abhandlung: Einige Eigenschaften der *Dirichlet*schen Functionen $F(s) = \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 27, S. 86), und Herr *Lerch* in dem Aufsatze: Sur la fonction

$$\mathfrak{R}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{(w+k)^s}$$

(Acta mathematica, Bd. 11, S. 19). Die in der letzteren Arbeit erörterte Function stimmt für reelle Werthe der Veränderlichen s mit derjenigen überein, welche ich in meiner Arbeit von 1856 untersucht habe, und die von Herrn *Lerch* abgeleitete Transformationsgleichung wird unter den entsprechenden Voraussetzungen zu der mehrfach berührten Relation zwischen den obigen Reihen (*A.*) und (*B.*). Auf diese Uebereinstimmung nach der Veröffentlichung seiner Arbeit aufmerksam gemacht, hat mir Herr *Lerch* brieflich mitgetheilt, dass er zu der Untersuchung der Reihe durch eine Gleichung veranlasst worden, die Herr *Kronecker* bei Gelegenheit seiner in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom April 1883 und Juli 1885 publicirten Arbeiten benutzt hat. Diese Gleichung enthält die oben in (*C.*) angegebene Werthbestimmung der von mir erforschten Reihe für den Werth Eins des Exponenten σ.

Gegenwärtig möchte ich mir erlauben, auf die Verwandlung der Reihe (*A.*) in die Reihe (*B.*) zurückzukommen, da die Erörterung des Umfangs der auftretenden Variabeln und namentlich die Erwägung der Grenzfälle ein eigenthümliches Interesse darbietet. Auch lässt sich ein Zusammenhang dieser Umformung mit einer gewissen allgemeinen Transformation der einfach-unendlichen Thetareihen nachweisen. Ferner beabsichtige ich die Anwendung des Transformationsverfahrens auf die sämmtlichen von *Dirichlet* in der Arbeit über die arithmetische Progression gebrauchten Reihen zu entwickeln. Die betreffenden Resultate umfassen zugleich diejenigen, welche in der angeführten Arbeit des Herrn *Hurwitz* enthalten sind, insofern die zu der Bestimmung der Klassenzahlen der binären quadratischen Formen dienenden Reihen einen Theil der angeführten Reihen ausmachen. Doch führt erst die Gesammtheit der entsprechenden Transformationen zu der Einsicht in eine charakteristische Beziehung zwischen den *Dirichlet*schen

Reihen und der allgemeinen Theorie der Theilung des Kreises in beliebig viele Theile, eine Beziehung, die sich in mehrfacher Hinsicht verwerthen lässt. Auf diesem Wege hat sich auch ein Princip ergeben, um die sämmtlichen Zahlen in Klassen einzutheilen, welches auf eine Eintheilung der sämmtlichen Primzahlen in Klassen zurückweist. Unter den Primzahlen besteht die erste Klasse allein aus der Zwei; die zweite Klasse umfasst diejenigen ungeraden Primzahlen, für welche die Theilung des Kreises in die betreffende Anzahl von Theilen allein mit Anwendung von Lineal und Zirkel ausgeführt werden kann.

1.

Von den beiden Reihen, die im Vorstehenden mit (*A.*) und (*B.*) bezeichnet sind, erstreckt sich die erstere auf alle negativen und positiven, die zweite auf alle positiven Zahlen. Um die zwischen denselben bestehende Gleichheit nach *Riemann*s Weise zu begründen, ist es zweckmässig, von der letzteren Reihe auszugehen. Dabei möge statt der complexen Grösse $k+x\sqrt{-1}$, deren reeller Theil als nicht negativ angenommen wird, t gesetzt werden; v bedeute, wie vorhin, eine reelle, positive, unter der Einheit liegende Grösse; der Exponent $1-\sigma$ sei gleich der Grösse s, welche als complex mit positivem reellem Theil vorausgesetzt wird. Dann hat man für das allgemeine Glied der Reihe

$$(1.) \qquad \sum_{m=0}^{m=M-1} \frac{e^{-2\pi mt}}{(v+m)^s},$$

wo M eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, mit Hülfe der Gleichung

$$(2.) \qquad \frac{1}{(v+m)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-(v+m)z} z^{s-1} dz$$

die Darstellung

$$(3.) \qquad \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{m=M-1} \int_0^\infty e^{-2\pi mt-(v+m)z} z^{s-1} dz,$$

welche sogleich in die folgende übergeht

$$(3^a.) \qquad \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{1-e^{(-2\pi t-z)M}}{1-e^{-2\pi t-z}} \cdot e^{-vz} z^{s-1} dz.$$

Man sieht leicht, dass der von der Zahl M abhängende Bestandtheil

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{(-2\pi t-z)M}}{1-e^{-2\pi t-z}} \cdot e^{-vz} z^{s-1} dz,$$

sobald M über jedes Mass hinaus wächst, wofern der reelle Theil von t positiv ist, bei den für die Grössen v und s angegebenen Voraussetzungen sich der Null nähert. Dasselbe geschieht auch dann, wenn der reelle Theil von t verschwindet und $\frac{t}{i}$ keiner ganzen Zahl gleich ist, ferner v und s die früheren Annahmen erfüllen. Wenn aber $\frac{t}{i}$ gleich einer ganzen Zahl, mithin $e^{-2\pi t} = 1$ ist, so muss der reelle Theil von s algebraisch grösser als die positive Einheit sein. Hiermit sind die Bedingungen angegeben, unter denen die Reihe (1.) für einen ins Unendliche wachsenden Werth der Zahl M convergirt und gleichzeitig durch das Integral

$$(4.) \qquad \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-vz} z^{s-1} dz}{1-e^{-2\pi t-z}}$$

ausgedrückt wird.

Nach dem von *Riemann* in der angeführten Abhandlung gegebenen Vorbilde werde jetzt das Integral

$$\int \frac{e^{-vz}(-z)^{s-1} dz}{1-e^{-2\pi t-z}}$$

so genommen, dass man von $+\infty$ auf demjenigen Ufer der Axe der reellen Werthe, auf welchem die imaginären Werthe positiv sind, um den Punkt $z = 0$ herum fortschreitet, und auf dem anderen Ufer der Axe der reellen Werthe bis $+\infty$ zurückgeht. Dann erhält das betreffende Integral den Werth

$$(e^{-\pi is} - e^{\pi is}) \int_0^\infty \frac{e^{-vz} z^{s-1} dz}{1-e^{-2\pi t-z}},$$

wodurch für das Integral (4.) die folgende Umformung entsteht, bei der die Integration in der erwähnten Weise auszuführen ist,

$$(5.) \qquad \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-vz} z^{s-1} dz}{1-e^{-2\pi t-z}} = \frac{i}{2 \sin \pi s \, \Gamma(s)} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{e^{-vz}(-z)^{s-1} dz}{1-e^{-2\pi t-z}}.$$

Sobald die Reihe (1.) mit dem Factor $\frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma(1-s)} e^{-2\pi vt}$ multiplicirt wird, verwandelt sich das Product für eine ins Unendliche wachsende Zahl M in die im Eingange durch $(B.)$ bezeichnete Reihe, welche sich jetzt so darstellt

$$(6.) \qquad \frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma(1-s)} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{e^{-2\pi(v+m)t}}{(v+m)^s}.$$

In Folge der bekannten Relation

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

ergiebt sich daher für (6.) aus (5.) die Gleichung

$$(7.)\quad \frac{(2\pi)^{1-s}e^{-2\pi vt}}{\Gamma(1-s)\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-vz}z^{s-1}dz}{1-e^{-2\pi t-z}} = i(2\pi)^{-s}e^{-2\pi vt}\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{e^{-vz}(-z)^{s-1}dz}{1-e^{-2\pi t-z}},$$

deren rechte Seite einen für alle complexen Werthe von s gültigen Ausdruck der betreffenden Function von s enthält. Die unter dem Integralzeichen befindliche Function

$$\frac{e^{-vz}(-z)^{s-1}}{1-e^{-2\pi t-z}}$$

ist nur für $z=0$ und, wofern n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, für die Werthe $z=-2\pi t-2\pi ni$ unstetig. Unter den letztern kommt die Null dann und nur dann vor, wenn t selbst gleich einer in die imaginäre Einheit multiplicirten ganzen Zahl ist. Diese Voraussetzung, welche schon früher hervorgehoben wurde, schliesse ich von jetzt ab von der Betrachtung aus. Da der reelle Theil von $t=h+il$ als positiv oder im Grenzfalle als verschwindend angenommen ist, so erfolgt die oben beschriebene von $+\infty$ nach $+\infty$ zurückkehrende Integration so, dass $z=0$ der einzige Unstetigkeitspunkt ist, um welchen der Integrationsweg herumläuft. Ich werde jetzt die rechte Seite von (7.) unter der Annahme untersuchen, dass der reelle Theil der complexen Grösse s algebraisch kleiner als die positive Einheit sei.

Es mögen zwei reelle positive Grössen a und b gewählt werden, und man integrire die angegebene Function über den Umfang eines Rechtecks, nämlich

$$\begin{aligned}
&\text{für}\quad z=-a+iy \quad\text{von}\quad y=-b \quad\text{bis}\quad b,\\
&\qquad z=\ \ a+iy \quad\text{von}\quad y=\ \ b \quad\text{bis}\quad -b,\\
&\qquad z=\ \ x+ib \quad\text{von}\quad x=-a \quad\text{bis}\quad a,\\
&\qquad z=\ \ x-ib \quad\text{von}\quad x=\ \ a \quad\text{bis}\quad -a.
\end{aligned}$$

Damit eine Anzahl der Unstetigkeitspunkte $z=-2\pi(h+il)-2\pi ni$ in das Innere des Rechtecks falle, jedoch keiner in die Begrenzung, wird vorausgesetzt, dass $\frac{a}{2\pi}>h$, und weder $\frac{b}{2\pi}+l$ noch $-\frac{b}{2\pi}+l$ gleich einer ganzen Zahl sei. Von den bezeichneten vier über die Begrenzung auszudehnenden Integralen liefern das erste und zweite die Summe

$$(8.)\quad \int_{-b}^{b}\frac{e^{(1-v)(-a+iy)}(a-iy)^{s-1}}{e^{-a+iy}-e^{-2\pi t}}idy-\int_{-b}^{b}\frac{e^{-v(a+iy)}(-a-iy)^{s-1}}{1-e^{-2\pi t-(a+iy)}}idy,$$

das dritte und vierte die Summe

$$(9.)\quad \int_{-a}^{a}\frac{e^{-v(x+ib)}(-x-ib)^{s-1}}{1-e^{-2\pi t-(x+ib)}}dx-\int_{-a}^{a}\frac{e^{-v(x-ib)}(-x+ib)^{s-1}}{1-e^{-2\pi t-(x-ib)}}dx.$$

Durch Theilung des Integrationsintervalls und Einführung von Variabeln, welche den ursprünglichen beziehungsweise entgegengesetzt gleich sind, wird aber (8.) gleich

$$(10.)\quad \begin{cases} \int_0^b \Big(\dfrac{e^{(1-v)(-a+iy)}(a-iy)^{s-1}}{e^{-a+iy}-e^{-2\pi t}} + \dfrac{e^{(1-v)(-a-iy)}(a+iy)^{s-1}}{e^{-a-iy}-e^{-2\pi t}} \\ \qquad - \dfrac{e^{-v(a+iy)}(-a-iy)^{s-1}}{1-e^{-2\pi t-(a+iy)}} - \dfrac{e^{-v(a-iy)}(-a+iy)^{s-1}}{1-e^{-2\pi t-(a-iy)}} \Big) dy, \end{cases}$$

und (9.) gleich

$$(11.)\quad \begin{cases} \int_0^a \Big(\dfrac{e^{-v(x+ib)}(-x-ib)^{s-1}}{1-e^{-2\pi t-(x+ib)}} + \dfrac{e^{(1-v)(-x+ib)}(x-ib)^{s-1}}{e^{-x+ib}-e^{-2\pi t}} \\ \qquad - \dfrac{e^{-v(x-ib)}(-x+ib)^{s-1}}{1-e^{-2\pi t-(x-ib)}} - \dfrac{e^{(1-v)(-x-ib)}(x+ib)^{s-1}}{e^{-x-ib}-e^{-2\pi t}} \Big) dx. \end{cases}$$

Die Potenzen mit dem Exponenten $s-1=s'-1+is''$ sind hier folgendermassen definirt

$$(a\pm iy)^{s'-1+is''} = e^{\left(\frac{1}{2}\log(a^2+y^2)\pm i\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)(s'-1+is'')},$$

$$(-a\pm iy)^{s'-1+is''} = e^{\left(\frac{1}{2}\log(a^2+y^2)\pm i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)\right)(s'-1+is'')},$$

$$(x\pm ib)^{s'-1+is''} = e^{\left(\frac{1}{2}\log(x^2+b^2)\pm i\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)(s'-1+is'')},$$

$$(-x\pm ib)^{s'-1+is''} = e^{\left(\frac{1}{2}\log(x^2+b^2)\pm i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)\right)(s'-1+is'')},$$

wobei nach der getroffenen Annahme $s'-1$ negativ ist, ferner der Werth der Function arcus tangentis für ein positives Argument zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen soll, und bei den Zeichen $\pm$ die oberen zu einander gehören, und ebenso die unteren. Indem in (10.) und (11.) für jeden der vier Summanden der zu integrirenden Function respective der absolute Betrag gesetzt wird, erhält man die Werthe

$$(12.)\quad \begin{cases} \int_0^b \dfrac{e^{-(1-v)a+\frac{s'-1}{2}\log(a^2+y^2)+s''\operatorname{arctg}\frac{y}{a}}}{(e^{-2a}-2e^{-a-2\pi h}\cos(y-2\pi l)+e^{-4\pi h})^{\frac{1}{2}}}\, dy \\ +\int_0^b \dfrac{e^{-(1-v)a+\frac{s'-1}{2}\log(a^2+y^2)-s''\operatorname{arctg}\frac{y}{a}}}{(e^{-2a}-2e^{-a-2\pi h}\cos(y+2\pi l)+e^{-4\pi h})^{\frac{1}{2}}}\, dy \\ +\int_0^b \dfrac{e^{-va+\frac{s'-1}{2}\log(a^2+y^2)-s''\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)}}{(1-2e^{-a-2\pi h}\cos(y-2\pi l)+e^{-2a-4\pi h})^{\frac{1}{2}}}\, dy \\ +\int_0^b \dfrac{e^{-va+\frac{s'-1}{2}\log(a^2+y^2)+s''\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)}}{(1-2e^{-a-2\pi h}\cos(y+2\pi l)+e^{-2a-4\pi h})^{\frac{1}{2}}}\, dy, \end{cases}$$

$$(13.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a \frac{e^{-vx+\frac{s'-1}{2}\log(x^2+b^2)-s''\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)}}{(1-2e^{-x-2\pi h}\cos(b+2\pi l)-e^{-2x-4\pi h})^{\frac{1}{2}}}\,dx \\ +\displaystyle\int_0^a \frac{e^{-(1-v)x+\frac{s'-1}{2}\log(x^2+b^2)+s''\operatorname{arctg}\frac{b}{x}}}{(e^{-2x}-2e^{-x-2\pi h}\cos(b-2\pi l)+e^{-4\pi h})^{\frac{1}{2}}}\,dx \\ +\displaystyle\int_0^a \frac{e^{-vx+\frac{s'-1}{2}\log(x^2+b^2)+s''\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)}}{(1-2e^{-x-2\pi h}\cos(b-2\pi l)+e^{-2x-4\pi h})^{\frac{1}{2}}}\,dx \\ +\displaystyle\int_0^a \frac{e^{-(1-v)x+\frac{s'-1}{2}\log(x^2+b^2)-s''\operatorname{arctg}\frac{b}{x}}}{(e^{-2x}-2e^{-x-2\pi h}\cos(b+2\pi l)+e^{-4\pi h})^{\frac{1}{2}}}\,dx, \end{cases}$$

von denen (12.) den absoluten Betrag von (10.), und (13.) den absoluten Betrag von (11.) übertrifft. Der Werth (12.) ist kleiner als das Product des Intervalls b in eine Grösse, die kleiner ist als jeder im Laufe der Integration auftretende Werth der Function, mithin, wenn mit P und Q zwei feste Grössen bezeichnet werden, kleiner als

$$(14.)\quad (Pe^{-(1-v)a+\frac{s'-1}{2}\log a^2}+Qe^{-va+\frac{s'-1}{2}\log a^2})b.$$

Ferner ist der Werth (13.) kleiner als das Product des grössten Werthes des Factors $e^{\frac{s'-1}{2}\log(x^2+b^2)}$, oder $b^{s'-1}$, in das von 0 bis a über die nach Weglassung jenes Factors zurückbleibende Function ausgedehnte Integral, welches unter einer festen Grösse R liegt, folglich kleiner als

$$(15.)\quad Rb^{s'-1}.$$

Da hier in Folge der gemachten Voraussetzung die Grösse $s'-1$ negativ ist, so nähern sich die absoluten Beträge von (8.) und (9.) der Null, sobald man a und b mit der für b angegebenen Beschränkung über jedes Mass hinaus wachsen lässt, und dabei die Beziehung zwischen a und b so einrichtet, dass der Ausdruck (14.) gegen die Null convergirt. Also verschwindet unter den entsprechenden Voraussetzungen der Werth der Integration, welche sich auf den Umfang des oben definirten Rechtecks bezieht, und deshalb entsteht das Resultat Null, sobald man zu der rechten Seite von (7.) die Summe der Integrale addirt, welche in demselben Sinne um jeden einzelnen im Inneren des Rechtecks befindlichen Unstetigkeitspunkt genommen werden. Es sind dies die Unstetigkeitspunkte $z=-2\pi t-2\pi ni$, für welche

$$(16.)\quad -b<-2\pi l-2\pi n<+b$$

ist, mithin n alle ganzen Zahlen von der grössten negativen Zahl $-N_1$ bis zu der grössten positiven N durchläuft, die mit den Bedingungen (16.) vereinbar sind. Das um einen beliebigen Punkt $z = -2\pi t - 2\pi n i$ in der angegebenen Weise herumlaufende Integral erhält den Werth

$$-2\pi(2\pi)^{-s} e^{-2\pi v t} . e^{2\pi v(t+ni)} (2\pi t + 2\pi n i)^{s-1}.$$

Demnach wird die rechte Seite von (7.) gleich der Summe

$$(17.) \qquad \sum_{n=-N_1}^{n=N} \frac{e^{2\pi n v i}}{(t+ni)^{1-s}},$$

wobei die Zahlen N_1 und N für einen über jedes Mass wachsenden Werth der Grösse b zu nehmen sind. Offenbar wachsen dieselben alsdann gleichfalls über jedes Mass, während ihre Differenz sich nicht ändert. Da aber die einzelnen Glieder der Reihe für hinreichend grosse numerische Werthe von n von beliebig kleinem Betrage sind, so darf N_1 durch N ersetzt werden, wodurch (17.) in die Reihe

$$(18.) \qquad \sum_{n=-N}^{n=+N} \frac{e^{2\pi n v i}}{(t+ni)^{1-s}}; \quad N = \infty$$

übergeht, welche mit der im Eingange durch (*A.*) bezeichneten Reihe übereinstimmt. Hiernach ist bewiesen, dass die Function der complexen Variable s, welche, wofern der reelle Theil von s positiv ist, durch (6.) ausgedrückt wird, für die Werthe von s, deren reeller Theil algebraisch unter der positiven Einheit liegt, die Darstellung durch (18.) gestattet. Für diejenigen Werthe von s, deren reeller Theil ein positiver echter Bruch ist, gelten somit beide Darstellungen, und daraus folgt die Gleichung zwischen den obigen Reihen (*A.*) und (*B.*), oder die Gleichung

$$(19.) \qquad \frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma(1-s)} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{e^{-2\pi(v+m)t}}{(v+m)^s} = \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{e^{2\pi n v i}}{(t+ni)^{1-s}}; \quad N = \infty.$$

2.

In der vorstehenden Relation fällt das Bildungsgesetz des allgemeinen Gliedes links und des allgemeinen Gliedes rechts zusammen, wie auch in der citirten Abhandlung von 1856 bemerkt ist, sobald bei der complexen Grösse $t = h + li$ der reelle Theil gleich Null wird. Die reelle Grösse l, welche dann keiner ganzen Zahl gleich sein darf, möge jetzt wieder durch das Zeichen t bezeichnet werden, so dass (19.) die folgende Gestalt annimmt

$$(1.) \qquad \frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma(1-s)} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{e^{-2\pi(v+m)ti}}{(v+m)^s} = \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{e^{2\pi n v i}}{((t+n)i)^{1-s}}; \quad N = \infty.$$

Setzt man hier gleichzeitig $1-v$ statt v, ferner $-t$ statt t, und auf der rechten Seite $-n$ statt n, so folgt die Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma(1-s)}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{e^{2\pi(1-v+m)ti}}{(1-v+m)^s}=\sum_{n=-N}^{n=N}\frac{e^{2\pi nvi}}{(-(t+n)i)^{1-s}};\quad N=\infty.$$

Durch Addition von (1.) und (2.) aber ergiebt sich die Gleichung

$$(3.)\qquad \frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma(1-s)}\sum_{m=-M}^{m=M}\frac{e^{-2\pi(v+m)ti}}{((v+m)^2)^{\frac{s}{2}}}=2\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=-N}^{n=N}\frac{e^{2\pi nvi}}{((t+n)^2)^{\frac{1-s}{2}}};\quad M=\infty,\quad N=\infty.$$

Ich werde jetzt einen Beweis derselben mittheilen, welcher auf einer allgemeinen Transformation der einfach-unendlichen Thetareihen beruht. Durch Anwendung der Gleichung

$$(4.)\qquad \frac{1}{(\pi(v+m)^2)^{\frac{s}{2}}}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\pi(v+m)^2\beta}\beta^{\frac{s}{2}-1}d\beta,$$

welche ***Riemann*** bei der zweiten Umformung von $\zeta(s)$ benutzt hat, kommt

$$(5.)\qquad \sum_{m=-M}^{m=M}\frac{e^{-2\pi(v+m)ti}}{(\pi(v+m)^2)^{\frac{s}{2}}}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{m=-M}^{m=M}\int_0^\infty e^{-\pi(v+m)^2\beta-2\pi(v+m)ti}\beta^{\frac{s}{2}-1}d\beta.$$

Durch Vertauschung der Summation und Integration erhält man unter dem Integralzeichen für $M=\infty$ eine einfach-unendliche Thetareihe, für welche die folgende Transformationsgleichung gilt,

$$(6.)\qquad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty}e^{-\pi m^2\beta-2\pi mi(v\beta+ti)}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}e^{-\frac{\pi}{\beta}(t-v\beta i+n)^2},$$

(S. die Abhandlungen von Herrn ***Weierstrass***, Theorie der ***Abel***schen Functionen, dieses Journal Bd. LII S. 374, und von Herrn ***Kronecker***, Ueber den vierten ***Gauss***schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, Monatsbericht der Berliner Akademie vom 29. Juli 1880, S. 691). Aus (6.) folgt unmittelbar die Relation

$$(7.)\qquad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty}e^{-\pi(v+m)^2\beta-2\pi(v+m)ti}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}e^{-\frac{\pi}{\beta}(t+n)^2+2\pi nvi}.$$

Durch diese wird die rechte Seite von (5.) in den folgenden Ausdruck verwandelt

$$(8.)\qquad \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}e^{-\frac{\pi}{\beta}(t+n)^2+2\pi nvi}\beta^{\frac{s}{2}-1}d\beta.$$

Führt man eine neue Integrationsvariable $\gamma = \frac{1}{\beta}$ ein, so wird (8.) gleich

$$(9.) \quad \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\pi(t+n)^2\gamma + 2\pi n v i} \gamma^{\frac{-s-1}{2}} d\gamma,$$

und dieses Integral geht durch nochmaligen Gebrauch von (4.) in die Reihe über

$$(10.) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{e^{2\pi n v i}}{(\pi(t+n)^2)^{\frac{1-s}{2}}}.$$

Hiernach entsteht die Gleichung

$$(11.) \quad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{e^{-2\pi(v+m)ti}}{(\pi(v+m)^2)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{e^{2\pi n v i}}{(\pi(t+n)^2)^{\frac{1-s}{2}}},$$

welche mit der zu beweisenden Gleichung (3.) zusammenfällt; denn in Folge der Gleichungen

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{-s+1}\pi^{\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi s}{2}},$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

hat man, wie es sein muss,

$$(12.) \quad \frac{2\sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\pi^{\frac{1-s}{2}}}.$$

3.

Indem ich mich dazu wende, die Transformationsgleichung (19.) des art. 1 für die in der Einleitung erwähnten *Dirichlet*schen Reihen zu benutzen, beginne ich mit denjenigen, welche *Dirichlet* in der bezüglichen Abhandlung zuerst erörtert hat, und die sich auf eine ungerade Primzahl p beziehen. Es sei, wie dort, c eine primitive Wurzel des Moduls p; für eine beliebige durch p nicht theilbare Zahl r bezeichne γ_r den zugehörigen Index,

so dass

$$c^{\gamma_r} \equiv r \pmod{p}$$

ist; ω sei eine Wurzel der Gleichung

$$\omega^{p-1} - 1 = 0,$$

und es werde für alle positiven ganzen durch p nicht theilbaren Zahlen r und eine complexe Grösse s mit positivem reellen Theil die Summe gebildet

$$(1.) \qquad \sum_r \omega^{\gamma_r} \frac{1}{r^s} = L(\omega, s);$$

unter den Werthen von ω möge $\omega = 1$ ausgeschlossen sein. Um den angegebenen Zweck zu erreichen, betrachte ich die Ausdrücke, welche *Gauss* bei der zweiten Behandlung der Kreistheilungsgleichung in Disqu. ar. art. 360, I mit t bezeichnet hat, und die von *Jacobi* in dem Aufsatze: Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlenlehre (Monatsbericht der Berliner Akademie vom Jahre 1851, und dieses Journal Bd. XXX, S. 166) durch $F(\alpha)$ angedeutet sind. Ihre Gestalt ist nach den obigen Festsetzungen die folgende

$$(2.) \qquad e^{\frac{2r\pi i}{p}} + \omega (e^{\frac{2r\pi i}{p}})^c + \omega^2 (e^{\frac{2r\pi i}{p}})^{c^2} + \cdots + \omega^{p-2} (e^{\frac{2r\pi i}{p}})^{c^{p-2}} = (\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p}}),$$

oder auch

$$(3.) \qquad \omega^{\gamma_1} e^{\frac{2r\pi i}{p}} + \omega^{\gamma_2} e^{2 \cdot \frac{2r\pi i}{p}} + \cdots + \omega^{\gamma_{p-1}} e^{(p-1)\frac{2r\pi i}{p}} = (\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p}}),$$

woraus sich die Gleichung

$$(4.) \qquad (\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p}}) = \omega^{-\gamma_r} (\omega, e^{\frac{2\pi i}{p}})$$

ergiebt (S. *Bachmann*, die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehung zur Zahlentheorie, S. 85). Dadurch, dass in (4.) statt i die Einheit $-i$, und entsprechend ω^{-1} statt ω gesetzt wird, kommt

$$(5.) \qquad (\omega^{-1}, e^{-\frac{2r\pi i}{p}}) = \omega^{\gamma_r} (\omega^{-1}, e^{-\frac{2\pi i}{p}}).$$

Wenn daher die beiden Seiten von (1.) mit dem Factor $(\omega^{-1}, e^{-\frac{2\pi i}{p}})$ multiplicirt werden, so entsteht die Gleichung

$$(6.) \qquad (\omega^{-1}, e^{-\frac{2\pi i}{p}}) L(\omega, s) = \sum_r \frac{\omega^{-\gamma_1} e^{-\frac{2r\pi i}{p}} + \omega^{-\gamma_2} e^{-2 \cdot \frac{2r\pi i}{p}} + \cdots + \omega^{-\gamma_{p-1}} e^{-(p-1)\frac{2r\pi i}{p}}}{r^s}.$$

Die Reihen, welche hier in die Factoren $\omega^{-\gamma_1}$, $\omega^{-\gamma_2}$, ... multiplicirt erscheinen, lassen sich bis auf einen Factor durch Addition aus der linken

Seite von (1.) in art. 2 zusammensetzen, sobald v successive gleich den Brüchen $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots \frac{p-1}{p}$, und t gleich einer der Zahlen 1, 2, ... $(p-1)$ genommen wird. Weil aber in dieser Gleichung die ganzzahligen Werthe von t ausgeschlossen sind, so ist es zweckmässig, in der Gleichung (19.) des art. 1 bei der Annahme $t = h+il$ vorauszusetzen, dass h positiv, t gleich einer der Zahlen 1, 2, 3, ... $p-1$ sei, und v den angegebenen Complex von Brüchen durchlaufe; der reelle Theil von s muss von hier ab ein positiver echter Bruch sein. Alsdann findet sich, dass

$$(7.) \qquad \sum_{v=\frac{1}{p}}^{v=\frac{p-1}{p}} \sum_{l=1}^{l=p-1} \omega^{-\gamma_l} \sum_{m=0}^{m=M} \frac{e^{-2\pi(v+m)(h+il)}}{(v+m)^s}; \quad M = \infty,$$

für einen gegen die Null convergirenden Werth von h in das Product von p^s und der rechten Seite von (6.) übergeht. In Folge der Gleichung (19.) wird aber (7.) gleich der Summe

$$(8.) \qquad \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{v=\frac{1}{p}}^{v=\frac{p-1}{p}} \sum_{l=1}^{l=p-1} \omega^{-\gamma_l} \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{e^{2\pi n v i}}{(h+(l+n)i)^{1-s}}; \quad N = \infty.$$

Man kann nun bemerken, dass die Summe

$$(9.) \qquad \sum_{l=1}^{l=p-1} \omega^{-\gamma_l} \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{1}{(h+(l+n)i)^{1-s}}; \quad N = \infty,$$

deren allgemeines Glied dem Werthe $v = 0$ entspricht, einen verschwindenden Werth hat; denn wenn man derselben die Gestalt giebt,

$$(10.) \qquad \begin{cases} \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{\omega^{-\gamma_1}}{(h+(1+n)i)^{1-s}} \\ + \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{\omega^{-\gamma_2}}{(h+(2+n)i)^{1-s}} \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{\omega^{-\gamma_{p-1}}}{(h+(p-1+n)i)^{1-s}}, \end{cases}$$

so leuchtet ein, dass alle Glieder, für welche der im Nenner befindliche Factor von i zwischen den Grenzen $-N+p-1$ und $N+1$ liegt, den Factor

$$\sum_{l=1}^{l=p-1} \omega^{-\gamma_l}$$

erhalten, der gleich Null ist, während die übrigen Glieder, da der reelle Theil von s ein positiver echter Bruch ist, für eine ins Unendliche wachsende

Zahl N einen Beitrag liefern, dessen reeller und imaginärer Theil beliebig klein sind. Es ist daher gestattet, in (8.) die erste Summation von $v = 0$ bis $v = \frac{p-1}{p}$ auszudehnen. In Folge dessen wird die Summe

$$\sum_{v=0}^{v=\frac{p-1}{p}} e^{2\pi n v i}$$

bekanntlich gleich Null oder der Zahl p, je nachdem die ganze Zahl n durch p nicht theilbar oder theilbar ist. Deshalb bleiben in (8.) nur die Glieder erhalten, bei denen n gleich einem ganzen Vielfachen fp der Primzahl p ist, und (8.) wird gleich der Reihe

$$(11.) \qquad \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{l=1}^{l=p-1} \omega^{-\gamma_l} \sum_{f=-F}^{f=F} \frac{p}{(h+(l+fp)i)^{1-s}}; \quad F = \infty.$$

Der Ausdruck $\mathfrak{r} = l+fp$ durchläuft die sämmtlichen Zahlen, die durch p nicht theilbar sind, und es ist

$$\omega^{-\gamma_{l+fp}} = \omega^{-\gamma_l}.$$

Lässt man jetzt die positive Grösse h ohne Ende gegen die Null abnehmen, so convergirt mithin (11.) gegen den Grenzwerth

$$(12.) \qquad \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} p \sum_{\mathfrak{r}=-R}^{\mathfrak{r}=R} \frac{\omega^{-\gamma_\mathfrak{r}}}{(\mathfrak{r}i)^{1-s}}; \quad R = \infty,$$

und man erhält nach dem, was vorhin bei der Bildung von (7.) ausgeführt worden ist, für die linke Seite von (6.) die Gleichung

$$(13.) \qquad (\omega^{-1}, e^{-\frac{2\pi i}{p}}) L(\omega, s) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} p^{1-s} \sum_{\mathfrak{r}=-R}^{\mathfrak{r}=R} \frac{\omega^{-\gamma_\mathfrak{r}}}{(\mathfrak{r}i)^{1-s}}; \quad R = \infty.$$

Auf der rechten sind die positiven Werthe $\mathfrak{r} = r$ und die negativen $\mathfrak{r} = -r$ zu trennen. Für die letztern hat man aus bekannten Gründen

$$\gamma_{(-r)} = \gamma_r + \frac{p-1}{2},$$

und es wird die nach $\mathfrak{r}$ auszudehnende Summe gleich dem Aggregat

$$e^{-\frac{\pi}{2}i(1-s)} \sum_r \frac{\omega^{-\gamma_r}}{r^{1-s}} + e^{\frac{\pi}{2}i(1-s)} \omega^{-\frac{p-1}{2}} \sum_r \frac{\omega^{-\gamma_r}}{r^{1-s}}.$$

Nach der in (1.) gegebenen Definition ist

$$(14.) \qquad \sum \frac{\omega^{-\gamma_r}}{r^{1-s}} = L(\omega^{-1}, 1-s).$$

Da ferner ω die Gestalt hat

$$(15.) \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{p-1}\tau},$$

wo die ganze Zahl τ nach dem Obigen nicht durch $p-1$ aufgehen darf, so wird

$$(16.) \quad \omega^{-\frac{p-1}{2}} = e^{-\pi i\tau} = (-1)^\tau,$$

und es ergiebt sich aus (13.) die aufzusuchende Transformationsgleichung der Function $L(\omega, s)$

$$(17.) \quad (\omega^{-1}, e^{-\frac{2\pi i}{p}})L(\omega, s) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} p^{1-s}(e^{-\frac{\pi}{2}i(1-s)} + (-1)^\tau e^{\frac{\pi}{2}i(1-s)})L(\omega^{-1}, 1-s).$$

Weil die Norm des Ausdrucks $(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p}})$ gleich der Zahl p ist, so geht (17.) durch die Multiplication mit diesem Ausdruck in die Gleichung über

$$(18.) \quad L(\omega, s) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} p^{-s}(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p}})(e^{-\frac{\pi}{2}i(1-s)} + (-1)^\tau e^{-\frac{\pi}{2}i(1-s)})L(\omega^{-1}, 1-s).$$

4.

Bei den *Dirichlet*schen Reihen, denen eine zusammengesetzte Zahl k zu Grunde liegt, unterscheidet sich der Fall, dass k ungerade und dass k gerade ist. Für ein ungerades k seien $p, p', \ldots$ die darin enthaltenen verschiedenen ungeraden Primzahlen, und $k = p^\varrho p'^{\varrho'} \ldots$. Zu der Primzahlpotenz p^ϱ gehöre die primitive Wurzel c, zu $p'^{\varrho'}$ die primitive Wurzel c', u. s. f., und es sei für eine Zahl r, die durch keine der Primzahlen $p, p', \ldots$ aufgeht,

$$c^{\gamma_r} \equiv r \,(\text{mod. } p^\varrho), \quad c'^{\gamma'_r} \equiv r \,(\text{mod. } p'^{\varrho'}), \quad \ldots$$

Indem ferner die Wurzeln $\omega, \omega', \ldots$ der Gleichungen

$$\omega^{(p-1)p^{\varrho-1}} - 1 = 0, \quad \omega'^{(p'-1)p'^{\varrho'-1}} - 1 = 0, \quad \ldots$$

benutzt werden, haben die der Zahl k entsprechenden Reihen die Definition

$$(1.) \quad \sum_r \omega^{\gamma_r} \omega'^{\gamma'_r} \ldots \frac{1}{r^s} = L(\omega, \omega', \ldots, s);$$

die Summation bezieht sich auf alle positiven durch keine der Primzahlen $p, p', \ldots$, theilbaren Zahlen r, und s ist, wie früher, eine complexe Grösse mit positivem reellen Theil. Für $\omega, \omega', \ldots$ mache ich die Voraussetzung, dass in den Ausdrücken

$$(2.) \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{(p-1)p^{\varrho-1}}\tau}, \quad \omega' = e^{\frac{2\pi i}{(p'-1)p'^{\varrho'-1}}\tau'}, \quad \ldots$$

die ganze Zahl τ nicht durch p, τ' nicht durch p' aufgehen soll, u. s. f. Zu der Umformung der Function $L(\omega, \omega', \ldots s)$ dienen die Ausdrücke, mit

deren Hülfe diejenigen Kreistheilungsgleichungen aufgelöst werden, bei denen man von einer ungeraden Primzahl als Theilungszahl successive zu den Potenzen derselben aufsteigt. Zu der Theilungszahl p^ϱ, wo $\varrho \geqq 2$, gehört dann der Ausdruck

$$(3.)\quad e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}} + \omega (e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})^c + \omega^2 (e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})^{c^2} + \cdots + \omega^{(p-1)p^{\varrho-1}-1} (e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})^{c^{(p-1)p^{\varrho-1}-1}} = (\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}}),$$

welcher sich auch so darstellen lässt

$$(4.)\quad \omega^{\gamma_1} e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}} + \omega^{\gamma_2} e^{2\cdot\frac{2r\pi i}{p^\varrho}} + \cdots + \omega^{\gamma_{p^\varrho-1}} e^{(p^\varrho-1)\frac{2r\pi i}{p^\varrho}} = (\omega,\ e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}});$$

die letzte Summation bezieht sich auf alle Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots p^\varrho$, welche durch p nicht theilbar sind. Ich werde jetzt die leicht zu beweisenden Eigenschaften dieser Ausdrücke angeben, von denen im Folgenden Gebrauch gemacht werden wird. Der Werth von $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})$ für eine beliebige durch p nicht theilbare Zahl r wird auf den für $r = 1$ geltenden Werth durch die Gleichung

$$(5.)\quad (\omega,\ e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}}) = \omega^{-\gamma_r} (\omega,\ e^{\frac{2\pi i}{p^\varrho}})$$

zurückgeführt. Die Norm dieses Ausdrucks hat die allgemeine Bestimmung

$$(6.)\quad (\omega,\ e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})(\omega^{-1},\ e^{-\frac{2r\pi i}{p^\varrho}}) = p^\varrho.$$

Der Ausdruck $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})$ verschwindet, sobald man entweder statt r eine durch p aufgehende Zahl setzt, oder statt ω eine solche Wurzel $e^{\frac{2\pi i}{(p-1)p^{\varrho-1}}\tau}$ substituirt, bei der statt τ eine durch p theilbare Zahl getreten ist.

Unter den geraden Werthen der Zahl k fasse ich nach dem Vorgange *Dirichlet*s nur diejenigen ins Auge, welche durch 8 theilbar sind; es besteht dann die Zerlegung in Potenzen differenter Primzahlen

$$k = 2^\lambda p^\varrho p'^{\varrho'} \ldots; \qquad \lambda \geqq 3.$$

Wenn jetzt r eine durch keine in k enthaltene Primzahl theilbare Zahl bedeutet, so kommen zu den für die Moduln p^ϱ, $p'^{\varrho'}$, ... angegebenen Congruenzen noch die beiden

$$(-1)^{\alpha_r} \equiv r \pmod 4,$$

$$(-1)^{\alpha_r} 5^{\beta_r} \equiv r \pmod{2^\lambda}$$

hinzu, wo α_r die Werthe 0, 1, dagegen β_r die Werthe 0, 1, 2, ... $2^{\lambda-2}-1$

durchläuft. Mit Zuziehung der Gleichungen

$$\theta^2-1=0, \quad \psi^{2^{\lambda-2}}-1=0$$

werden dann die zu der Zahl k gehörenden *Dirichlet*schen Reihen so definirt:

$$(7.) \qquad \sum_r \frac{\theta^{\alpha_r}\psi^{\beta_r}\omega^{\gamma_r}\omega'^{\gamma'_r}\dots}{r^s} = L(\theta,\ \psi;\ \omega,\ \omega',\ \dots\ s),$$

wo r alle positiven Zahlen bedeutet, die relativ prim zu k sind. Für θ wird jeder der beiden Werthe $+1$ und -1 zugelassen; bei der Wurzel

$$(8.) \qquad \psi = e^{\frac{2\pi i}{2^{\lambda-2}}\mu}$$

nehme ich an, dass μ eine ungerade Zahl sei. Dem obigen Ausdruck (3.) entspricht hier der folgende

$$(9.) \quad \begin{cases} e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}}+\psi(e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})^5+\ \psi^2(e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})^{5^2}+\dots+\ \psi^{2^{\lambda-2}-1}(e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})^{5^{2^{\lambda-2}-1}} \\ +\theta(e^{-\frac{2r\pi i}{2^\lambda}}+\psi(e^{-\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})^5+\psi^2(e^{-\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})^{5^2}+\dots+\psi^{2^{\lambda-2}-1}(e^{-\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})^{5^{2^{\lambda-2}-1}} \\ = (\theta,\ \psi;\ e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}}), \end{cases}$$

welcher sich auf die Kreistheilung für die Theilungszahl 2^λ bezieht. Die für diese Ausdrücke nothwendige Annahme, dass $\lambda \geqq 3$ sei, knüpft sich an die Thatsache, dass die Wurzeln der zu $\lambda=1$ oder $\lambda=2$ gehörenden Kreistheilungsgleichungen $z^2=1$ und $z^4=1$ beziehungsweise gleich den Einheiten auf dem Gebiete der reellen oder complexen Grössen sind. Der Ausdruck (9.) verwandelt sich leicht in diesen

$$(10. \qquad \theta^{\alpha_1}\psi^{\beta_1}e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}}+\theta^{\alpha_3}\psi^{\beta_3}(e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})^3+\dots+\theta^{\alpha_{2^\lambda}-1}\psi^{\beta_{2^\lambda}-1}(e^{2r\pi i})^{2^\lambda-1} = (\theta,\ \psi;\ e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}}).$$

Für denselben gilt die Gleichung

$$(11.) \qquad (\theta,\ \psi;\ e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}}) = \theta^{-\alpha_r}\psi^{-\beta_r}(\theta,\ \psi;\ e^{\frac{2\pi i}{2^\lambda}}),$$

und die Bestimmung der Norm

$$(12.) \qquad (\theta,\ \psi;\ e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})(\theta,\ \psi^{-1};\ e^{-\frac{2r\pi i}{2^\lambda}}) = 2^\lambda.$$

Auch verschwindet $(\theta, \psi; e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})$, wofern entweder statt r eine gerade Zahl, oder statt ψ eine solche Wurzel $e^{\frac{2\pi i}{2^{\lambda-2}}\mu}$ eingesetzt wird, bei welcher an der Stelle von μ eine gerade Zahl steht.

Da nach den jetzt getroffenen Vorbereitungen bei der vorzunehmenden Umformung die verschiedenen in k enthaltenen Primzahlpotenzen gleichmässig behandelt werden, so genügt es, die Transformation der in (7.) definirten Function auseinanderzusetzen. Wenn man in (5.) und (11.) statt i die Grösse $-i$ einführt, und diese, so wie die entsprechenden zu den Primzahlen $p', \ldots$ gehörenden Gleichungen multiplicirt, so folgt die Relation

$$(13.)\quad \begin{cases} (\theta,\ \psi^{-1};\ e^{-\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})(\omega^{-1},\ e^{-\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})(\omega'^{-1},\ e^{-\frac{2r\pi i}{p'^{\varrho'}}})\ldots \\ = \theta^{\alpha_r}\psi^{\beta_r}\omega^{\gamma_r}\omega'^{\gamma'_r}\ldots(\theta,\ \psi^{-1};\ e^{-\frac{2\pi i}{2^\lambda}})(\omega^{-1},\ e^{-\frac{2\pi i}{p^\varrho}})(\omega'^{-1},\ e^{-\frac{2\pi i}{p'^{\varrho'}}})\ldots. \end{cases}$$

Durch die Multiplication mit dem auf der rechten Seite befindlichen Product von eingeklammerten Ausdrücken entsteht daher aus (7.) die Gleichung

$$(14.)\quad \begin{cases} (\theta,\ \psi^{-1},\ e^{-\frac{2\pi i}{2^\lambda}})(\omega^{-1},\ e^{-\frac{2\pi i}{p^\varrho}})\ldots L(\theta,\ \psi;\ \omega,\ \omega',\ \ldots,\ s) \\ = \sum_r \frac{(\theta,\ \psi^{-1};\ e^{-\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})(\omega^{-1},\ e^{-\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})\ldots}{r^s}. \end{cases}$$

Vermittelst der Darstellungen (4.) und (10.) wird die rechte Seite gleich der mehrfachen Summe

$$(15.)\quad \sum_r \sum_{q,g,g',\ldots} \frac{\theta^{-\alpha_q}\psi^{-\beta_q}\omega^{-\gamma_g}\omega'^{-\gamma'_{g'}}\ldots e^{-\frac{2r\pi i}{k}\left(\frac{q}{2^\lambda}+\frac{g}{p^\varrho}+\frac{g'}{p'^{\varrho'}}+\cdots\right)k}}{r^s};$$

hier durchläuft q die ungeraden Zahlen von 1 bis 2^λ, g die durch p nicht theilbaren Zahlen von 1 bis p^ϱ, u. s. f. Setzt man nun

$$(16.)\quad \left(\frac{q}{2^\lambda}+\frac{g}{p^\varrho}+\frac{g'}{p'^{\varrho'}}+\cdots\right)k = l,$$

bezeichnet mit r_k den Inbegriff der relativen Primzahlen zu k, die positiv und kleiner als k sind, mit h eine positive Grösse, so leuchtet ein, dass die Summe

$$(17.)\quad \frac{1}{k^s}\sum_{m=0}^{m=M}\sum_{r_k}\sum_{l}\theta^{-\alpha_q}\psi^{-\beta_q}\omega^{-\gamma_g}\omega'^{-\gamma'_{g'}}\ldots \frac{e^{-2\pi\left(\frac{r_k}{k}+m\right)(h+il)}}{\left(\frac{r_k}{k}+m\right)^s};\quad M=\infty$$

für ein gegen die Null abnehmendes h gegen (15.) convergirt. Durch die Substitution $t = h+il$, $v = \frac{r_k}{k}$ geht jetzt die Gleichung (19.) des art. 1 in die folgende über:

$$(18.)\quad \frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma(1-s)}\sum_{m=0}^{m=M}\frac{e^{-2\pi\left(\frac{r_k}{k}+m\right)(h+il)}}{\left(\frac{r_k}{k}+m\right)^s}=\sum_{n=-N}^{n=N}\frac{e^{2\pi n\frac{r_k}{k}i}}{(h+(l+n)i)^{1-s}};\quad M=\infty,\quad N=\infty.$$

Hier gilt die Annahme, dass der reelle Theil von s ein positiver echter Bruch sei, welche von nun ab festgehalten wird. Demnach wird (17.) gleich der Summe

$$(19.)\quad \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}k^s}\sum_{n=-N}^{n=N}\sum_{r_k}\sum_{l}\theta^{-\alpha_q\psi-\beta_q\omega-\gamma_g\omega'-\gamma'_{g'}\ldots}\frac{e^{2\pi n\frac{r_k}{k}i}}{(h+(l+n)i)^{1-s}};\quad N=\infty.$$

Wenn man hier statt r_k eine Zahl u substituirt, welche mit k einen gemeinsamen Theiler hat, so erhält die nach n und l in der angegebenen Weise auszudehnende Summe die Eigenschaft, zu verschwinden. Da die Zahlen l nach der in (16.) gegebenen Definition zu k relativ prim und unter einander incongruent sind, da ferner der Werth von (15.) nicht geändert wird, sobald für l eine mit l nach dem Modul k congruente Zahl gesetzt wird, so ist es gestattet, statt der zu untersuchenden Summe die Summe

$$(20.)\quad \sum_{n=-N}^{n=N}\sum_{l}\varepsilon_l\frac{e^{2\pi n\frac{u}{k}i}}{(h+(l+n)i)^{1-s}};\quad N=\infty$$

zu betrachten, wo l die Reihe der Zahlen von 0 bis $k-1$ durchläuft, und, sobald l mit k ohne Theiler ist,

$$\varepsilon_l=\theta^{-\alpha_q\psi-\beta_q\omega-\gamma_g\omega'-\gamma'_{g'}\ldots},$$

wenn aber l mit k einen gemeinsamen Theiler hat,

$$\varepsilon_l=0$$

genommen wird. Ordnet man jetzt die in (20.) vereinigten Reihen, welche den k auf einander folgenden Werthen von l entsprechen, nach den auftretenden Nennern, so gehört, abgesehen von den Nennern, welche mit den extremen Werthen von n correspondiren und unter den obwaltenden Voraussetzungen zu dem Gesammtwerthe beliebig kleine Beiträge liefern, zu jedem Nenner ein Aggregat von Factoren, das sich leicht bestimmen lässt. Es sei in einem Nenner für die Zahl $l+n$ der Werth δ vorgeschrieben. Dann gehören zu den Werthen $l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ k-1$ beziehungsweise die Werthe $n=\delta,\ \delta-1,\ \ldots\ \delta-k+1$, und man findet in (20.) das Aggregat

$$(21.)\quad \frac{\varepsilon_1 e^{2\pi\frac{u}{k}\delta i}+\varepsilon_2 e^{2\pi\frac{u}{k}(\delta-1)i}+\cdots+\varepsilon_k e^{\frac{2\pi u}{k}(\delta-k+1)i}}{(h+\delta i)^{1-s}}.$$

Der Zähler desselben ist gleich dem Product der Grösse $e^{\frac{2\pi u}{k}\delta i}$ in das Product

$$(22.) \quad (\theta,\ \psi^{-1},\ e^{-\frac{2u\pi i}{2^\lambda}})(\omega^{-1},\ e^{-\frac{2u\pi i}{p^\varrho}})(\omega'^{-1},\ e^{-\frac{2u\pi i}{p'^{\varrho'}}})\ldots.$$

Weil aber angenommen ist, dass die Zahl u mit k einen gemeinsamen Theiler habe, so muss u entweder mit 2^λ, oder mit p^ϱ, oder mit $p'^{\varrho'}$, u. s. f. einen gemeinsamen Theiler besitzen. Nach einem vorhin angeführten Satze verschwindet jeder Factor von (22.), für den diese Voraussetzung zutrifft. Es muss also (22.) unbedingt gleich Null sein, und damit ist die Behauptung erwiesen, dass die Summe (20.) den Werth Null hat.

Aus dieser Thatsache folgt, dass der Werth der Summe (19.) derselbe bleibt, wenn man r_k die vollständige Reihe der Zahlen von 0 bis $k-1$ durchlaufen lässt. Indem man dies thut, ergiebt sich, dass die Summe $\sum_{r_k} e^{2\pi n\frac{r_k}{k}i}$ für alle Werthe von n verschwindet, die nicht durch k aufgehen, dagegen für die sämmtlichen Vielfachen fk gleich k wird. Demnach erhält (19.) die Bestimmung

$$(23.) \quad \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\,k^{1-s}\sum_{f=-F}^{f=F}\sum_{l}\frac{\theta^{-\alpha_q}\psi^{-\beta_q}\omega^{-\gamma_g}\omega'^{-\gamma'_{g'}}\ldots}{(h+(l+fk)i)^{1-s}};\quad F=\infty.$$

Setzt man, wie oben, $\mathfrak{r}=l+fk$, so gelten für alle durch (16.) bestimmten Indices die Gleichungen

$$\alpha_q=\alpha_\mathfrak{r},\quad \beta_q=\beta_\mathfrak{r},\quad \gamma_g=\gamma_\mathfrak{r},\quad \gamma'_{g'}=\gamma'_\mathfrak{r},\quad \ldots,$$

und $\mathfrak{r}$ wird successive gleich allen relativen Primzahlen zu k von $\mathfrak{r}=-R$ bis $\mathfrak{r}=R$, für ein wachsendes R. Indem die positive Grösse h der Null genähert wird, convergirt (23.) gegen den Grenzwerth

$$(24.) \quad \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\,k^{1-s}\sum_{\mathfrak{r}=-R}^{\mathfrak{r}=R}\frac{\theta^{-\alpha_\mathfrak{r}}\psi^{-\beta_\mathfrak{r}}\omega^{-\gamma_\mathfrak{r}}\omega'^{-\gamma'_\mathfrak{r}}\ldots}{(\mathfrak{r}i)^{1-s}};\quad R=\infty.$$

Es ergiebt sich daher für die linke Seite von (14.) die Darstellung

$$(25.) \quad \begin{cases} (\theta,\ \psi^{-1};\ e^{-\frac{2\pi i}{2^\lambda}})(\omega^{-1},\ e^{-\frac{2\pi i}{p^\varrho}})\ldots L(\theta,\ \psi;\ \omega,\ \omega',\ \ldots,\ s) \\ = \dfrac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\,k^{1-s}\displaystyle\sum_{\mathfrak{r}=-R}^{\mathfrak{r}=R}\frac{\theta^{-\alpha_\mathfrak{r}}\psi^{-\beta_\mathfrak{r}}\omega^{-\gamma_\mathfrak{r}}\omega'^{-\gamma'_\mathfrak{r}}\ldots}{(\mathfrak{r}i)^{1-s}};\quad R=\infty. \end{cases}$$

Indem wieder die positiven Werthe $\mathfrak{r}=r$ von den negativen $\mathfrak{r}=-r$ gesondert werden, geht wegen der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\gamma_{(-r)} &= \gamma_r + \frac{p-1}{2} p^{\varrho-1}, \\
\gamma'_{(-r)} &= \gamma'_r + \frac{p'-1}{2} p'^{\varrho'-1}, \\
&\vdots \\
\alpha_{(-r)} &= \alpha_r + 1, \\
\beta_{(-r)} &= \beta_r
\end{aligned}$$

die nach r zu nehmende Summe in das folgende Aggregat über

$$e^{-\frac{\pi}{2}i(1-s)} \sum_r \frac{\theta^{-\alpha_r}\psi^{-\beta_r}\omega^{-\gamma_r}\omega'^{-\gamma'_r}\ldots}{r^{1-s}}$$
$$+ e^{\frac{\pi}{2}i(1-s)}\theta\omega^{-\frac{p-1}{2}p^{\varrho-1}}\omega'^{-\frac{p'-1}{2}p'^{\varrho'-1}}\ldots \sum_r \frac{\theta^{-\alpha_r}\psi^{-\beta_r}\omega^{-\gamma_r}\omega'^{-\gamma'_r}\ldots}{r^{1-s}}.$$

In Folge der Gleichungen (2.) wird

$$(26.) \qquad \omega^{-\frac{p-1}{2}p^{\varrho-1}}\omega'^{-\frac{p'-1}{2}p'^{\varrho'-1}}\ldots = (-1)^{\tau+\tau'+\cdots};$$

die nach r auszuführende Summe ist vermöge der in (7.) enthaltenen Definition gleich der Function $L(\theta, \psi^{-1}; \omega^{-1}, \omega'^{-1}, \ldots, 1-s)$, und die Gleichung (25.) liefert die abzuleitende Transformation

$$(27.) \quad \begin{cases} (\theta, \psi^{-1}; e^{-\frac{2\pi i}{2^\lambda}})(\omega^{-1}, e^{-\frac{2\pi i}{p^\varrho}})\ldots L(\theta, \psi; \omega, \omega', \ldots, s) \\ = \dfrac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} k^{1-s}(e^{-\frac{\pi}{2}i(1-s)} + \theta(-1)^{\tau+\tau'+\cdots}e^{\frac{\pi}{2}i(1-s)})L(\theta, \psi^{-1}; \omega^{-1}, \omega'^{-1}, \ldots, 1-s). \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (6.) und (12.) kann diese auch in die folgende Gestalt gebracht werden

$$(28.) \quad \begin{cases} L(\theta, \psi; \omega, \omega', \ldots, s) \\ = \dfrac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} k^{-s}(\theta, \psi; e^{\frac{2\pi i}{2^\lambda}})(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p^\varrho}})\ldots(e^{-\frac{\pi}{2}i(1-s)} + \theta(-1)^{\tau+\tau'+\cdots}e^{\frac{\pi}{2}i(1-s)}) \\ \times L(\theta, \psi^{-1}; \omega^{-1}, \omega'^{-1}, \ldots, 1-s). \end{cases}$$

5.

Durch die letzte Gleichung des vorigen Artikels werden die Werthe derselben Function

$$L(\theta, \psi; \omega, \omega', \ldots, s) \quad \text{und} \quad L(\theta, \psi^{-1}; \omega^{-1}, \omega'^{-1}, \ldots, 1-s)$$

mit einander verknüpft, bei welchen den Einheitswurzeln $\theta, \psi, \omega, \omega', \ldots$ der Reihe nach die beziehungsweise conjugirten Grössen $\theta, \psi^{-1}, \omega^{-1}, \omega'^{-1}, \ldots$

entsprechen; zugleich correspondirt dem Exponenten s, dessen reeller Theil zwischen 0 und 1 liegt, der Exponent $1-s$, dessen reeller Theil die gleiche Beschaffenheit hat. In Folge dessen wird der Werth $L(\theta, \psi^{-1}; \omega^{-1}, \omega'^{-1}, \ldots, 1-s)$ mit dem Werthe $L(\theta, \psi; \omega, \omega', \ldots, s)$ conjugirt, sobald dem Exponenten s der Werth $\frac{1}{2}$ beigelegt wird. Da $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$ ist, so ergiebt sich bei dieser Annahme aus (28.) des vorigen Artikels die Gleichung

$$(1.)\quad \begin{cases} L(\theta, \psi; \omega, \omega', \ldots, \frac{1}{2}) \\ = \left(\frac{1+\theta(-1)^{\tau+\tau'+\cdots}}{2} + \frac{-1+\theta(-1)^{\tau+\tau'+\cdots}}{2} i\right) \frac{(\theta, \psi; e^{\frac{2\pi i}{2^\lambda}})(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p^\varrho}})\ldots}{k^{\frac{1}{2}}} \\ \times L(\theta, \psi; \omega, \omega', \ldots, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Offenbar wird der Ausdruck $\frac{1+\theta(-1)^{\tau+\tau'+\cdots}}{2} + \frac{-1+\theta(-1)^{\tau+\tau'+\cdots}}{2} i$ gleich $+1$ oder $-i$, je nachdem $\theta(-1)^{\tau+\tau'+\cdots}$ gleich $+1$ oder -1 ist.

Ist k gleich einer einzigen ungeraden Primzahl p, so kommt vermöge (18.) des art. 3

$$(2.)\quad \begin{cases} L(\omega, \frac{1}{2}) = \left(\frac{1+(-1)^\tau}{2} + \frac{-1+(-1)^\tau}{2} i\right) \frac{(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p}})}{p^{\frac{1}{2}}} L(\omega^{-1}, \frac{1}{2}), \\ \omega = e^{\frac{2\pi i}{p-1}\tau}; \quad \tau \text{ nicht theilbar durch } p-1. \end{cases}$$

Für k gleich der Potenz einer ungeraden Primzahl p^ϱ findet sich

$$(3.)\quad \begin{cases} L(\omega, \frac{1}{2}) = \left(\frac{1+(-1)^\tau}{2} + \frac{-1+(-1)^\tau}{2} i\right) \frac{(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p^\varrho}})}{p^{\frac{\varrho}{2}}} L(\omega^{-1}, \frac{1}{2}), \\ \omega = e^{\frac{2\pi i}{(p-1)p^{\varrho-1}}\tau}; \quad \tau \text{ nicht theilbar durch } p. \end{cases}$$

Wenn $k = 2^\lambda$, $\lambda \geqq 3$ ist, so erhält man

$$(4.)\quad \begin{cases} L(\theta, \psi; \frac{1}{2}) = \left(\frac{1+\theta}{2} + \frac{-1+\theta}{2} i\right) \frac{(\theta, \psi; e^{\frac{2\pi i}{2^\lambda}})}{2^{\frac{\lambda}{2}}} L(\theta, \psi^{-1}; \frac{1}{2}), \\ \theta^2 = 1, \quad \psi = e^{\frac{2\pi i}{2^{\lambda-2}}\mu}; \quad \mu \text{ ungerade}. \end{cases}$$

In Betreff der Ausdrücke

$$(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p}}), \quad (\omega, e^{\frac{2\pi i}{p^\varrho}}), \quad (\theta, \psi; e^{\frac{2\pi i}{2^\lambda}})$$

ist daran zu erinnern, dass wegen der Gleichung (4.) des art. 3, ferner der Gleichungen (5.) und (11.) des art. 4, wenn für die in (2.) und (3.)

mit τ bezeichnete Zahl deren grösster gemeinsamer Theiler mit $p-1$ durch d bezeichnet wird, und r wieder eine durch p nicht theilbare, oder beziehungsweise ungerade Zahl bedeutet, die Potenz $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p}})^{\frac{p-1}{d}}$ gleich einer rationalen ganzen Function des zugehörigen ω mit ganzzahligen Coefficienten, die Potenz $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})^{\left(\frac{p-1}{d}\right)p^{\varrho-1}}$ gleich einer rationalen ganzen Function des betreffenden ω mit ganzzahligen Coefficienten, und die Potenz $(\theta, \psi; e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})^{2^{\lambda-1}}$ gleich einer ebensolchen Function des bezüglichen ψ ist. Da nun ferner die Norm von $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p}})$ gleich p, die Norm von $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})$ gleich p^ϱ, die Norm von $(\theta, \psi; e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})$ gleich 2^λ ist, so hängt die Bestimmung der drei Ausdrücke selbst, wie in Disqu. ar. art. 360, IV bemerkt ist, von der Aufgabe ab, einen gegebenen Winkel beziehungsweise in $\frac{p-1}{d}$, oder in $\left(\frac{p-1}{d}\right)p^{\varrho-1}$, oder in $2^{\lambda-1}$ gleiche Theile zu theilen. Es sind also die zu den verschiedenen Werthen von r gehörenden Werthe des Ausdrucks $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p}})$ oder $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p^\varrho}})$ oder $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{2^\lambda}})$ gleich den verschiedenen Wurzeln derselben reinen Gleichung von dem angegebenen Grade. Doch verursacht es eine eigenthümliche Schwierigkeit, wo es sich um die ungeraden Primzahlen oder deren Potenzen handelt, genau diejenige Wurzel zu unterscheiden, welche einem vorgeschriebenen Werthe von r, etwa $r=1$, zugehört. Für den Fall, dass die Kreistheilungszahl eine ungerade Primzahl p ist, die Zahl τ gleich $\frac{p-1}{2}$ genommen wird, mithin $\omega=-1$ ist, hat *Gauss* diese Schwierigkeit in Disqu. ar. art. 356 hervorgehoben, und zugleich deren Lösung angegeben, während diese erst in der Abhandlung: Summatio quarumdam serierum singularium vollständig entwickelt ist. Derselbe Gegenstand ist später zum Ausgangspunkt verschiedener hervorragender Arbeiten geworden. Auf die bezeichnete Frage bei der Voraussetzung, dass die Kreistheilungszahl eine Primzahl p von der Form $6u+1$ ist, und $\tau=\frac{p-1}{3}$, oder $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gesetzt wird, bezieht sich die Abhandlung des Herrn *Kummer:* De residuis cubicis disquisitiones nonnullae analyticae, Bd. XXXII dieses Journals, S. 341. In seiner Allgemeinheit ist das in Rede stehende Problem, soviel ich weiss, bisher noch unerledigt.

Es besteht nun ein bemerkenswerther Zusammenhang zwischen diesem Problem und den so eben durch die Annahme $s = \frac{1}{2}$ abgeleiteten Gleichungen. Setzt man in (2.) die Zahl τ gleich $\frac{p-1}{2}$, oder $\omega = -1$, so fallen die Functionswerthe $L(\omega, \frac{1}{2})$ und $L(\omega^{-1}, \frac{1}{2})$ zusammen, und es ergiebt sich die folgende Erwägung. Entweder die Function $L(-1, s)$ ist so beschaffen, dass sie für $s = \frac{1}{2}$ verschwindet; dann würde die betreffende Gleichung (2.) inhaltlos sein. Oder die Function $L(-1, s)$ verschwindet für $s = \frac{1}{2}$ nicht. Wäre das letztere der Fall, so würde der von Null verschiedene Factor $L(-1, \frac{1}{2})$ auf den beiden Seiten der Gleichung fortgelassen werden dürfen, und man erhielte die Gleichung

$$1 = \Big(\frac{1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2} + \frac{-1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2} i\Big) \frac{(-1, e^{\frac{2\pi i}{p}})}{p^{\frac{1}{2}}},$$

durch welche der Werth des Ausdrucks $(-1, e^{\frac{2r\pi i}{p}})$ für $r = 1$ unzweifelhaft bestimmt wird; es wäre also für das oben erwähnte von *Gauss* herrührende und zuerst bewiesene Resultat eine neue Begründung gefunden.

Die übrigen Werthe, die für ω in den obigen Relationen (2.) und (3.) zur Anwendung kommen können, sind complexe Grössen, deren imaginärer Theil nicht gleich Null ist, so dass $L(\omega, \frac{1}{2})$ und $L(\omega^{-1}, \frac{1}{2})$ complex und conjugirt, aber nicht einander gleich werden. Hier ist wieder die doppelte Möglichkeit zu erörtern, dass $L(\omega, \frac{1}{2})$ gleich Null oder von Null verschieden sei. Im ersteren Falle würde $L(\omega^{-1}, \frac{1}{2})$ als die conjugirte Grösse ebenfalls gleich Null sein, und die betreffende Relation (2.) oder (3.) keinen Inhalt haben. In dem entgegengesetzten Falle würde auch $L(\omega^{-1}, \frac{1}{2})$ nicht gleich Null sein, und man dürfte aus (2.) oder (3.) respective die Gleichung

$$\Big(\frac{1+(-1)^{\tau}}{2} + \frac{-1+(-1)^{\frac{\tau}{2}}}{2} i\Big) \frac{(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p}})}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{L(\omega, \frac{1}{2})}{L(\omega^{-1}, \frac{1}{2})}$$

oder

$$\Big(\frac{1+(-1)^{\tau}}{2} + \frac{-1+(-1)^{\frac{\tau}{2}}}{2} i\Big) \frac{(\omega, e^{\frac{2\pi i}{p^{\varrho}}})}{p^{\frac{\varrho}{2}}} = \frac{L(\omega, \frac{1}{2})}{L(\omega^{-1}, \frac{1}{2})}$$

ableiten. Da die auf der rechten Seite befindlichen unendlichen Reihen ausser der gewählten Einheitswurzel ω keine anderen Bestandtheile als die positiven Quadratwurzeln aus positiven ganzen Zahlen enthalten, so würde auf diese Weise der Werth des Ausdrucks $(\omega, e^{\frac{2r\pi i}{p^{\varrho}}})$ für $r = 1$ ohne

Zweideutigkeit dargestellt sein, und die auftretenden *Dirichlet*schen Reihen würden ein analytisches Mittel bilden, um die oben erwähnten reinen Gleichungen wirklich aufzulösen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, um die Theilung des betreffenden Winkels in die angegebene Anzahl gleicher Theile durch directe Rechnung auszuführen.

Wie leicht zu sehen, können in Bezug auf die Relation (4.) ähnliche Betrachtungen angestellt werden, welche indessen nicht die gleiche Bedeutung haben, da die hier zu lösende Aufgabe, die Theilung eines gegebenen Winkels in 2^λ Theile, auf die successive Ausziehung von Quadratwurzeln reducirt werden kann.

Aus den mitgetheilten Beobachtungen leuchtet ein, dass es sehr wünschenswerth ist, festzustellen, ob die in (2.), (3.), (4.) erscheinenden Functionen $L(\omega, \frac{1}{2})$, $L(\theta, \psi; \frac{1}{2})$ verschwinden oder von Null verschieden sind. Ich behalte mir vor, auf diese Frage später einzugehen.

6.

Die im Vorhergehenden erörterte Auflösung der Kreistheilungsgleichung für eine beliebige Theilungszahl k setzt voraus, dass die Kreistheilungsgleichungen, welche zu gewissen mit k zusammenhängenden Theilungszahlen gehören, schon gelöst seien. Man kann daher das betreffende Verfahren als eine successive Reduction auffassen, und sich von den nach einander auftretenden Theilungszahlen Rechenschaft geben. Es möge mit $\chi(k) = k^{(1)}$ diejenige Zahl bezeichnet werden, welche gleich dem Product der verschiedenen in k enthaltenen Primzahlen ist. Wenn ferner die Anzahl der relativen Primzahlen zu $k^{(1)}$ aus der Reihe 1, 2, ... $k^{(1)}$, wie gewöhnlich, mit $\varphi(k^{(1)}) = k^{(2)}$ notirt wird, so ist klar, dass bei der Theilung des Kreises in k Theile angenommen ist, dass die Theilung in $\varphi(k^{(1)}) \frac{k}{k^{(1)}}$ Theile schon vollendet sei. Ebenso ist bei der Theilung des Kreises in $k^{(1)}$ Theile vorausgesetzt, dass die Theilung in $\varphi(k^{(1)})$ Theile schon vorliege. Für die Theilung des Kreises in $\varphi(k^{(1)}) = k^{(2)}$ Theile lässt sich nun dieselbe Betrachtung wiederholen und dieser Process fortsetzen, bis er sein Ende erreicht. In der That werden auf die beliebig gegebene Zahl k die beiden Charakteristiken $\chi(x)$ und $\varphi(y)$ in regelmässig abwechselnder Folge angewendet, wodurch man eine vollständig bestimmte Reihe von Zahlen erhält:

$$(1.)\quad \begin{cases} \textit{Theilungszahl} = k, \\ \chi(k) = k^{(1)}, \\ \varphi(k^{(1)}) = k^{(2)}, \\ \chi(k^{(2)}) = k^{(3)}, \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Weil für jede Zahl x

$$\chi(x) \leqq x,$$

dagegen für jede Zahl y mit Ausnahme der Einheit

$$\varphi(y) < y$$

ist, so bilden die Zahlen k, $k^{(2)}$, $k^{(4)}$, ... eine Reihe, bei der jedes Individuum nothwendig kleiner als das vorhergehende ist, und die deshalb ein Ende erreichen muss. Weil ferner $k^{(1)} \leqq k$, $k^{(3)} \leqq k^{(2)}$, ... ist, so nimmt auch die Reihe der Zahlen $k^{(1)}$, $k^{(3)}$, ... beständig ab. Für die Producte differenter Primzahlen $k^{(1)}$, $k^{(3)}$, ... als Argument ist der Werth der *Euler*schen Charakteristik φ eine gerade Zahl, den einzigen Fall ausgenommen, dass das Argument gleich der Zahl Zwei selbst ist. Mithin lässt sich das angegebene Verfahren so lange weiter führen, als in der Reihe der Zahlen $k^{(1)}$, $k^{(3)}$, ... nicht der Werth Zwei erscheint. Weil jedoch das Verfahren nicht ohne Ende fortgehen kann, so muss in der Reihe schliesslich die Zahl Zwei erscheinen, indem für einen ungeraden Zeiger $2\nu-1$ die Gleichung

$$(2.)\quad k^{(2\nu-1)} = 2$$

auftritt. Aus derselben folgt dann

$$(3.)\quad \varphi(k^{(2\nu-1)}) = k^{(2\nu)} = 1;$$

und damit ist das Verfahren geschlossen. Hiermit ist nachgewiesen, dass zu jeder beliebigen Zahl k eine Zahl ν gehört, durch welche die Anzahl der Schritte des mit k vorgenommenen Verfahrens bestimmt wird. *Der Werth dieser Zahl ν bietet einen Eintheilungsgrund für die sämmtlichen Zahlen in Klassen, indem alle Zahlen, für welche ν denselben vorgeschriebenen Werth hat, in die νte Klasse zusammengefasst werden.*

Wenn man das System von Definitionsgleichungen (1.) in umgekehrter Ordnung durchläuft, und mit den letzten Gleichungen (2.) und (3.) beginnt, so findet sich

$$(4.)\quad \begin{cases} \varphi(k^{(2\nu-1)}) = k^{(2\nu)} = 1, \\ \chi(k^{(2\nu-2)}) = k^{(2\nu-1)} = 2, \\ \varphi(k^{(2\nu-3)}) = k^{(2\nu-2)}, \\ \chi(k^{(2\nu-4)}) = k^{(2\nu-3)}, \\ \vdots \end{cases}$$

Aus der Gleichung $\chi(k^{(2\nu-2)}) = 2$ folgt, dass die sämmtlichen in $k^{(2\nu-2)}$ enthaltenen Primfactoren mit der Primzahl Zwei übereinstimmen müssen, oder dass $k^{(2\nu-2)}$ nothwendig gleich einer Potenz von Zwei ist,

$$(5.)\quad k^{(2\nu-2)} = 2^{\alpha}.$$

Ferner ist $k^{(2\nu-3)}$ gleich einem Product differenter Primzahlen, unter denen nach dem Obigen auch die Zwei vorkommt, oder

$$(6.)\quad k^{(2\nu-3)} = 2pp'\ldots.$$

In Folge dessen nimmt die Gleichung $\varphi(k^{(2\nu-3)}) = k^{(2\nu-2)}$ die folgende Gestalt an

$$(7.)\quad (p-1)(p'-1)\cdots = 2^{\alpha}.$$

Weil aber 2^{α} keine anderen Factoren haben kann als Potenzen der Zwei, so zieht (7.) die Reihe von Gleichungen nach sich

$$(8.)\quad p-1 = 2^{\alpha},\quad p'-1 = 2^{\alpha'},\quad \ldots$$

Deshalb sind die Primzahlen $p, p', \ldots$ durch die Eigenschaft charakterisirt, dass respective der Werth der Verbindung $p-1, p'-1, \ldots$ gleich einer positiven Potenz von Zwei sein muss, und fallen mit den Primzahlen zusammen, für welche als Theilungszahlen die Kreistheilung mit alleiniger Hülfe des Lineals und Zirkels bewerkstelligt werden kann.

Indem man die Primzahlen, die zur νten Klasse gehören, als Primzahlen der νten Klasse bezeichnet, lässt sich jetzt die Frage nach den sämmtlichen Zahlen der νten Klasse und den sämmtlichen Primzahlen der νten Klasse für die erste und zweite Klasse vollständig beantworten. ***Die erste Klasse von Primzahlen enthält nur die Primzahl Zwei, die erste Klasse von Zahlen nur die positiven Potenzen von Zwei. Die Primzahlen der zweiten Klasse sind diejenigen Primzahlen p_2, welche um die Einheit vermindert gleich einer Zahl der ersten Klasse, d. h. einer positiven Potenz von Zwei sind. Die Zahlen der zweiten Klasse sind die Producte aus Potenzen, deren Basen gleich Zwei oder gleich Primzahlen der ersten Klasse sind, und zwar dürfen in dem Product die Primzahlen der ersten Klasse nicht fehlen.*** Man kann nun in

dem System (4.) schrittweise weiter gehen, die entsprechenden Ueberlegungen wiederholen, und sich durch Anwendung des Systems (1.) leicht überzeugen, dass, wenn eine Zahl k von der νten Klasse mit einer Zahl k' von der ν'ten Klasse multiplicirt wird, und $\nu \geqq \nu'$ ist, das Product kk' nothwendig zur νten Klasse gehört. Auf diese Weise gelangt man zu dem folgenden Ergebniss, durch welches die Primzahlen wie die Zahlen einer gegebenen νten Klasse in recurrirender Weise vollständig charakterisirt werden. ***Eine Primzahl p_ν der νten Klasse ist eine solche, bei der der Werth $p_\nu - 1$ gleich einer Zahl der $(\nu-1)$ten Klasse ist. Eine Zahl m_ν der νten Klasse ist gleich einem Product von Potenzen von Primzahlen, die allen Klassen von der ersten bis zur νten angehören, bei welchem Product die Primzahlen der νten Klasse nicht fehlen dürfen.***

Für die 24 ungeraden Primzahlen des ersten Hundert ergiebt sich die folgende Eintheilung: zur zweiten Klasse gehören 3, 5, 17, zur dritten Klasse 7, 11, 13, 19, 31, 37, 41, 61, 73, 97, zur vierten Klasse 23, 29, 43, 53, 67, 71, 79, 83, 89, zur fünften Klasse 47, 59. Nachdem die allgemeinen Kriterien festgestellt sind, lassen sich auf sehr einfache Art die Reihen bestimmen, welche entstehen, indem man mit einer complexen Grösse s, deren reeller Theil grösser als Eins ist, für alle Zahlen der gegebenen νten Klasse die Summe bildet

$$(9.) \qquad \Sigma \frac{1}{m_\nu^s}.$$

Nach dem Obigen hat man für $\nu = 1$ die Gleichung

$$\Sigma \frac{1}{m_1^s} = \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{1}{2^{as}},$$

mithin

$$(10.) \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} = 1 + \Sigma \frac{1}{m_1^s}.$$

Es sei ferner das über die sämmtlichen Primzahlen der νten Klasse ausgedehnte Product

$$(11.) \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{p_\nu^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_\nu'^s}} \cdots = P_\nu(s).$$

Dann ergiebt sich für die zu den auf einander folgenden Klassen gehörenden Summen aus dem, was entwickelt worden, die Bestimmung

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-\frac{1}{2^s}} P_2(s) & = 1+\Sigma\dfrac{1}{m_1^s}+\Sigma\dfrac{1}{m_2^s}, \\ \dfrac{1}{1-\frac{1}{2^s}} P_2(s)P_3(s) & = 1+\Sigma\dfrac{1}{m_1^s}+\Sigma\dfrac{1}{m_2^s}+\Sigma\dfrac{1}{m_3^s}, \\ \qquad\vdots & \\ \dfrac{1}{1-\frac{1}{2^s}} P_2(s)P_3(s)\ldots P_\nu(s) & = 1+\Sigma\dfrac{1}{m_1^s}+\Sigma\dfrac{1}{m_2^s}+\Sigma\dfrac{1}{m_3^s}+\cdots+\Sigma\dfrac{1}{m_\nu^s}. \end{cases}$$

Durch die so eben vorgenommene Eintheilung der Primzahlen in Klassen wird auch die längst aufgeworfene, aber meines Wissens bisher nicht beantwortete Frage in ein neues Licht gerückt, ob die Anzahl der Primzahlen von der Gestalt $2^\alpha+1$ endlich oder unendlich sei. Es zeigt sich, dass dieselbe zu einer Kette von Fragen gehört, welche dahin lauten, ob die Anzahl der Primzahlen p_ν der νten Klasse für die Werthe $\nu = 2, 3, \ldots$ endlich oder unendlich sei, ferner ob die Anzahl der Klassen von Primzahlen endlich oder unendlich sei. Gegenwärtig kann man nur soviel mit Sicherheit erkennen, dass es unmöglich ist, dass sowohl jede Klasse nur eine endliche Anzahl von Primzahlen enthalte, und dass gleichzeitig die Anzahl der Klassen endlich sei. Denn wenn dies der Fall wäre, so müsste die Anzahl aller Primzahlen eine beschränkte sein, was schon *Euklid* als unmöglich erwiesen hat.

Bonn, den 25. März 1889.

Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale.

(Von *L. Kronecker.*)

Nach *Dirichlet* nähert sich unter gewissen über die Function $F(z)$ zu machenden Voraussetzungen die Summe:

$$\sum_{k=-n}^{k=+n} \int_{\varrho}^{\varrho+1} F(z)\cos 2k(z-v)\pi\, dz \quad \text{oder} \quad \sum_{k=-n}^{k=+n} \int_{\varrho}^{\varrho+1} F(z)e^{2k(v-z)\pi i}\, dz$$

mit wachsendem n einem der beiden Werthe:

$$\tfrac{1}{2}\lim_{\delta=0}(F(v+\delta)+F(v-\delta)), \quad \tfrac{1}{2}\lim_{\delta=0}(F(\varrho+\delta)+F(\varrho+1-\delta)) \qquad (\delta \geqq 0),$$

je nachdem v innerhalb des Intervalles $(\varrho, \varrho+1)$ oder in einem der beiden Endpunkte desselben liegt. Nimmt man $\varrho = 0$ und $F(v) = e^{2vw\pi i}$, wo w eine beliebige (complexe) Grösse bedeutet, so kommt:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} e^{2kv\pi i} \int_0^1 e^{2z(w-k)\pi i}\, dz = e^{2vw\pi i} \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}(1+e^{2w\pi i}),$$

je nachdem v innerhalb des Intervalles $(0, 1)$ oder an einer der Grenzen liegt. Nach Ausführung der Integration ergiebt sich hieraus im letzteren Falle die Partialbruchzerlegung von $\cot w\pi$, im ersteren die Formel:

$$(A.) \qquad \frac{2\pi i e^{2vw\pi i}}{e^{2w\pi i}-1} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{e^{2kv\pi i}}{w-k} \qquad (0 < v < 1),$$

welche also nichts Anderes als die *Fourier*sche Reihenentwickelung von $e^{2vw\pi i}$ oder von $\cos 2vw\pi$ und $\sin 2vw\pi$ enthält *).

Diese Bedeutung der Formel $(A.)$, aus welcher sich ihre Ableitung unmittelbar ergiebt, habe ich im art. I meines Aufsatzes: „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ **), wo ich von derselben Gebrauch zu machen

---

*) Die Gleichung $(A.)$ gilt, wenn man auf beiden Seiten mit $e^{2w\pi i}-1$ multiplicirt, auch noch für ganzzahlige Werthe von w.

**) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften von 1883 Stück XX.

hatte, hervorgehoben aber verabsäumt hinzuzufügen, dass sie sich bereits in einer Abhandlung *) des Herrn *Lipschitz* findet, wo sie als Resultat der Specialisirung allgemeinerer Gleichungen erscheint. Dass dieselbe Formel aus Gleichungen zu erschliessen ist, welche in der *Poisson*schen Abhandlung: „Sur le calcul numérique des Intégrales définies" vorkommen, und dass sie endlich auch aus der Darstellung der $w$ten Potenz einer Variabeln durch das *Cauchy*sche Integral hervorgeht, habe ich im art. X meines Aufsatzes **) „Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützlichen Formel" dargelegt.

Herr *Lipschitz* hat in der citirten Abhandlung die allgemeinere Reihe:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} (w-k)^{-\sigma} e^{2kv\pi i} \qquad (0<v<1),$$

welche für den speciellen Fall $\sigma = 1$ in die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (*A.*) übergeht, durch ein Integral dargestellt. Eine andere Integraldarstellung erhält man (für nicht reelle Werthe von w), wenn man den Factor $(w-k)^{-\sigma}$ durch das *Cauchy*sche Integral ausdrückt und alsdann die Gleichung (*A.*) zur Summirung unter dem Integralzeichen benutzt. Denn wenn $f(z)$ irgend eine Function der complexen Variabeln $z = x+yi$ bedeutet, welche nebst ihrer Ableitung in einem die x-Axe einschliessenden Streifen eindeutig und endlich ist und sich bei wachsenden Werthen von x der Null nähert, so ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} f(k) e^{2kv\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \int \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{e^{2kv\pi i}}{z-k} f(z)\,dz,$$

vorausgesetzt, dass die Reihe auf der linken Seite convergirt, und dass die Integration auf der rechten Seite über die Umgrenzung jenes Streifens erstreckt wird. Bei Anwendung der Formel (*A.*) wird also:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} f(k) e^{2kv\pi i} = \int \frac{e^{2vz\pi i}}{e^{2z\pi i}-1} f(z)\,dz,$$

oder:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} f(k) e^{2kv\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{(2v-1)z\pi i} \pi \operatorname{cosec} z\pi f(z)\,dz.$$

Diese letztere Gleichung folgt aber auch unmittelbar daraus, dass die Unendlichkeitsstellen der Function unter dem Integralzeichen auf der

---

*) „Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe." Bd. 54, S. 320, Formel (12.).

**) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften von 1885 Stück XXXVIII.

rechten Seite einzig und allein durch die ganzzahligen Werthe von z repräsentirt werden, und in derselben Weise ergiebt sich überhaupt eine Darstellung von Reihen durch Integrale mittels der Gleichung:

$$(B.) \qquad \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f(k) = \frac{1}{2\pi i}\int \pi \cot z\pi f(z)\,dz,$$

welche, wenn $f(x+yi)$ in dem von den geraden Linien $y=-\eta$ und $y=+\eta$ umgrenzten Streifen die obigen Voraussetzungen erfüllt, und daher das Resultat der Integration von $\xi-\eta i$ bis $\xi+\eta i$ für unendlich grosse (nicht ganzzahlige) Werthe von ξ verschwindet, auf die Form:

$$(B'.) \qquad F(0)+2\sum_{k=1}^{k=\infty} F(k) = i\,\mathrm{sgn}.\eta \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+\eta i)\cot(x+\eta i)\pi\,dx$$

gebracht werden kann, in welcher zur Vereinfachung $f(z)+f(-z)=2F(z)$ gesetzt ist.

Wird in dem Ausdruck:

$$(C.) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\pi\cot z\pi}{z-z_0} f(z)\,dz,$$

in welchem für $f(z)$ die obigen Voraussetzungen festgehalten werden, die Integration über die Umgrenzung eines die ganze x-Axe und auch den Punkt z_0 enthaltenden Gebiets erstreckt, so ist sein Werth gleich:

$$\pi\cot z_0\pi f(z_0) - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{f(k)}{z_0-k}.$$

Falls nun $\cot z\pi f(z)$ für unendlich grosse Werthe von z — etwa einzelne Punkte ausgenommen — verschwindet, kann die Integration in $(C.)$ über einen Kreis mit unendlich grossem Radius erstreckt werden, und da alsdann der Werth des Integrals sich der Null nähert, so resultirt die Gleichung:

$$(D.) \qquad \pi\cot z\pi f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{f(k)}{z-k},$$

welche nichts Anderes als die Zerlegung von $\pi\cot z\pi f(z)$ in Partialbrüche darstellt. Sie enthält aber zugleich jene zuerst von Herrn *Lipschitz* aufgestellte Gleichung $(A.)$ als speciellen Fall, da sie in diese übergeht, wenn:

$$f(z) = \frac{e^{(2v-1)z\pi i}}{2\cos z\pi}$$

gesetzt wird. Hierbei erfüllt $f(z)$ die obigen Voraussetzungen, sobald v zwischen Null und Eins liegt.

Sur quelques théorèmes de *Dirichlet*.

(Par M. *F. Tano* à Rome.)

I.

Dans son Mémoire intitulé „Einige neue Sätze über unbestimmte Gleichungen“ *), *Dirichlet* démontre quelques théorèmes sur la possibilité, en nombres entiers, de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = -1.$$

Cependant *Dirichlet* ne va pas au delà du cas où l'entier A est composé seulement de trois facteurs premiers. Dans la présente Note je me propose de considérer le cas de A composé d'un nombre quelconque de facteurs premiers. Avant *Dirichlet* cette équation avait été étudiée par de célèbres mathématiciens. *Lagrange,* comme l'observe *Dirichlet* lui-même, avait conjecturé dans son premier Mémoire sur les équations indéterminées **), que l'équation dont il s'agit est possible en nombres entiers lorsque A ne contient que des facteurs premiers impairs de la forme $4m+1$. Cette condition est nécessaire parce que sans cela A ne pourrait être diviseur de x^2+1, comme l'exige l'équation; seulement elle n'est pas suffisante, parce que, par exemple, elle est remplie par $A = 5.41$ sans que pour cela l'équation admette de solution.

Pour cause de brièveté, je me servirai dans ces recherches d'un symbole analogue à celui de *Legendre*, symbole dont *Dirichlet* fait usage dans le susdit Mémoire. Soit c un nombre premier de la forme $4m+1$ et a un nombre non-divisible par c, pour lequel $\left(\frac{a}{c}\right) = +1$, c'est-à-dire

$$a^{\frac{c-1}{2}} \equiv 1 \pmod{c},$$

alors on aura

*) Abhandlungen der Berliner Akademie. 1834.

**) Mélanges de Turin, Tome IV, seconde partie, p. 88.

$$a^{\frac{c-1}{4}} \equiv +1 \quad \text{ou} \quad -1 \pmod{c}.$$

Ce reste $+1$ ou -1 est représenté par *Dirichlet* à l'aide du symbole

$$\left(\frac{a}{c}\right)_4.$$

II.

Dénotons par $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ différents nombres premiers $\equiv 1 \pmod 4$ et soit $x = T,\ y = U$ la solution *minima* de l'équation Pellienne

$$x^2 - Ay^2 = +1$$

où $A = a_1.a_2.a_3 \ldots a_n$; nous aurons

$$(p.) \qquad (T+1)(T-1) = AU^2.$$

Mettons

$$U = h.k.l;$$

une décomposition quelconque de $(p.)$ pourra être représentée par

$$T+1 = h.Q.k^2,$$
$$T-1 = h.R.l^2,$$

où l'on a fait

$$Q = a_{\alpha_1}.a_{\alpha_2}.a_{\alpha_3} \ldots a_{\alpha_\omega}, \quad R = a_{\beta_1}.a_{\beta_2}.a_{\beta_3} \ldots a_{\beta_\gamma}, \quad \omega+\gamma = n,$$

et il en résulte

$$Qk^2 - Rl^2 = \frac{2}{h}.$$

Si γ ou ω était zéro, la décomposition en question fournirait

$$k^2 - Al^2 = \frac{2}{h}, \quad l^2 - Ak^2 = -\frac{2}{h},$$

et il est évident que h ne peut être que 1 ou bien 2. Or comme la décomposition de T^2-1 en deux facteurs $T+1$ et $T-1$ qui ne diffèrent que de deux unités, ne peut se faire que d'une *seule* manière, une seule relation d'une des formes suivantes doit être vérifiée *).

$$(1.) \quad Qk^2 - Rl^2 = +1,$$
$$(2.) \quad Qk^2 - Rl^2 = +2,$$
$$(3.) \quad k^2 - Al^2 = +1,$$
$$(4.) \quad k^2 - Al^2 = +2,$$
$$(5.) \quad l^2 - Ak^2 = -1,$$
$$(6.) \quad l^2 - Ak^2 = -2.$$

*) ***Legendre,*** Théorie des Nombres, 3ième éd., Tome I, p. 66.

Mais quelque hypothèse qu'on puisse faire sur la forme paire ou impaire de l et k, les équations (2.), (4.), (6.) n'ont jamais leurs premiers membres de la forme $+2$ et -2; l'équation (3.) doit être exclue par la raison que $x = T$, $y = U$ est la solution *minima* de l'équation donnée

$$x^2 - Ay^2 = +1;$$

donc, il ne reste que (5.) et (1.), et pour celle-ci on devrait avoir

$$\left(\frac{Q}{a_{\beta_1}}\right) = \left(\frac{a_{\alpha_1}}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{a_{\alpha_2}}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{a_{\alpha_3}}{a_{\beta_1}}\right)\cdots\left(\frac{a_{\alpha_\omega}}{a_{\beta_1}}\right) = +1,$$

$$\left(\frac{R}{a_{\alpha_1}}\right) = \left(\frac{a_{\beta_1}}{a_{\alpha_1}}\right)\left(\frac{a_{\beta_2}}{a_{\alpha_1}}\right)\left(\frac{a_{\beta_3}}{a_{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\frac{a_{\beta_\gamma}}{a_{\alpha_1}}\right) = +1.$$

Supposons à présent *n impair*, et en même temps aucun ou seulement un des restes

$$(\lambda.) \quad \begin{cases} \left(\frac{a_1}{a_2}\right), & \left(\frac{a_1}{a_3}\right), & \left(\frac{a_1}{a_4}\right), & \ldots & \left(\frac{a_1}{a_n}\right), \\ & \left(\frac{a_2}{a_3}\right), & \left(\frac{a_2}{a_4}\right), & \ldots & \left(\frac{a_2}{a_n}\right), \\ & & \left(\frac{a_3}{a_4}\right), & \ldots & \left(\frac{a_3}{a_n}\right), \\ & & & \ldots & \\ & & & & \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right), \end{cases}$$

égal à $+1$, alors les deux expressions

$$\left(\frac{R}{a_{\alpha_1}}\right), \quad \left(\frac{Q}{a_{\beta_1}}\right)$$

ne sont jamais égales à $+1$; il ne reste donc que (5.), c'est-à-dire

$$l^2 - Ak^2 = -1,$$

relation qui devra être satisfaite; nous aurons donc le

Théorème: *Soient* $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ *différents nombres premiers* $\equiv 1 \pmod 4$ *et aucun ou seulement un des restes* $(\lambda.)$ *égal à* $+1$; *l'équation*

$$x^2 - a_1.a_2.a_3 \ldots a_n y^2 = -1$$

est toujours résoluble quand n est impair.

Supposant $n = 3$, on obtient un des théorèmes de *Dirichlet* (Mémoire susdit, p. 659).

Considérons à présent le cas où plusieurs des restes $(\lambda.)$ sont positifs; en décomposant A comme précédemment en deux facteurs Q et R, et en

faisant usage du symbole de *Jacobi,* supposons qu'on ait

$$\left(\frac{R}{Q}\right) = +1,$$

alors une équation de la forme

$$Rt^2 - Qu^2 = \pm 1$$

pourrait être satisfaite.

Considérons premièrement l'équation

$$Rt^2 - Qu^2 = +1;$$

comme Q et R sont composés de facteurs premiers de la forme $4m+1$, u devra être pair, c'est-à-dire $u = 2^{\mu}.h_1.h_2.h_3 \ldots h_r$, où h_1, h_2, $\ldots$ h_r sont des facteurs premiers impairs, et en faisant usage du symbole de *Legendre* on aura:

$$\left(\frac{R}{h_1}\right) = \left(\frac{a_{\beta_1}.a_{\beta_2}.a_{\beta_3}\ldots a_{\beta_\gamma}}{h_1}\right) = \left(\frac{a_{\beta_1}}{h_1}\right)\left(\frac{a_{\beta_2}}{h_1}\right)\left(\frac{a_{\beta_3}}{h_1}\right)\cdots\left(\frac{a_{\beta_\gamma}}{h_1}\right) = +1,$$

$$\left(\frac{R}{h_2}\right) = \left(\frac{a_{\beta_1}.a_{\beta_2}.a_{\beta_3}\ldots a_{\beta_\gamma}}{h_2}\right) = \left(\frac{a_{\beta_1}}{h_2}\right)\left(\frac{a_{\beta_2}}{h_2}\right)\left(\frac{a_{\beta_3}}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{a_{\beta_\gamma}}{h_2}\right) = +1,$$

. . . . . .

$$\left(\frac{R}{h_r}\right) = \left(\frac{a_{\beta_1}.a_{\beta_2}.a_{\beta_3}\ldots a_{\beta_\gamma}}{h_r}\right) = \left(\frac{a_{\beta_1}}{h_r}\right)\left(\frac{a_{\beta_2}}{h_r}\right)\left(\frac{a_{\beta_3}}{h_r}\right)\cdots\left(\frac{a_{\beta_\gamma}}{h_r}\right) = +1,$$

et en vertu de la loi de réciprocité on obtient

$$\left(\frac{h_1}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{h_1}{a_{\beta_2}}\right)\left(\frac{h_1}{a_{\beta_3}}\right)\cdots\left(\frac{h_1}{a_{\beta_\gamma}}\right) = +1,$$

$$\left(\frac{h_2}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{h_2}{a_{\beta_2}}\right)\left(\frac{h_2}{a_{\beta_3}}\right)\cdots\left(\frac{h_2}{a_{\beta_\gamma}}\right) = +1,$$

. . . . . .

$$\left(\frac{h_r}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{h_r}{a_{\beta_2}}\right)\left(\frac{h_r}{a_{\beta_3}}\right)\cdots\left(\frac{h_r}{a_{\beta_\gamma}}\right) = +1,$$

et en multipliant on en tire:

$$(7.) \quad \left(\frac{h_1.h_2.h_3\ldots h_r}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{h_1.h_2.h_3\ldots h_r}{a_{\beta_2}}\right)\cdots\left(\frac{h_1.h_2.h_3\ldots h_r}{a_{\beta_\gamma}}\right) = +1.$$

Or si l'on observe que si R contient un nombre pair de facteurs premiers $\equiv 5 \pmod 8$, on aura

$$\left(\frac{2}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{2}{a_{\beta_2}}\right)\left(\frac{2}{a_{\beta_3}}\right)\cdots\left(\frac{2}{a_{\beta_\gamma}}\right) = +1,$$

et après

$$\left(\frac{2^{\mu}}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{2^{\mu}}{a_{\beta_2}}\right)\left(\frac{2^{\mu}}{a_{\beta_3}}\right)\cdots\left(\frac{2^{\mu}}{a_{\beta_\gamma}}\right) = +1.$$

Si au contraire il en contient un nombre ***impair,*** on a nécessairement $u \equiv 2 \pmod 4$, et par conséquent $\mu = 1$, et dans ce cas il vient:

$$\left(\frac{2}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{2}{a_{\beta_2}}\right)\left(\frac{2}{a_{\beta_3}}\right)\cdots\left(\frac{2}{a_{\beta_\gamma}}\right) = -1.$$

Dans tous les cas on pourra écrire

$$(8.)\quad \left(\frac{2^\mu}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{2^\mu}{a_{\beta_2}}\right)\left(\frac{2^\mu}{a_{\beta_3}}\right)\cdots\left(\frac{2^\mu}{a_{\beta_\gamma}}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a_{\beta_1}+a_{\beta_2}+\cdots+a_{\beta_\gamma}-\gamma)};$$

et en multipliant membre à membre (7.) et (8.), on aura

$$(9.)\quad \left(\frac{u}{a_{\beta_1}}\right)\left(\frac{u}{a_{\beta_2}}\right)\left(\frac{u}{a_{\beta_3}}\right)\cdots\left(\frac{u}{a_{\beta_\gamma}}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a_{\beta_1}+a_{\beta_2}+\cdots+a_{\beta_\gamma}-\gamma)}.$$

D'un autre côté il résulte de l'équation proposée

$$Qu^2 = -1+Rt^2,$$

et en élevant successivement le premier et le second membre aux puissances $\frac{1}{4}(a_{\beta_1}-1)$, $\frac{1}{4}(a_{\beta_2}-1)$, ... $\frac{1}{4}(a_{\beta_\gamma}-1)$, on obtiendra facilement

$$\left(\frac{Q}{a_{\beta_1}}\right)_4\left(\frac{u}{a_{\beta_1}}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a_{\beta_1}-1)},$$

$$\left(\frac{Q}{a_{\beta_2}}\right)_4\left(\frac{u}{a_{\beta_2}}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a_{\beta_2}-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{Q}{a_{\beta_\gamma}}\right)_4\left(\frac{u}{a_{\beta_\gamma}}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a_{\beta_\gamma}-1)},$$

et en multipliant membre à membre et tenant compte de (9.) nous aurons

$$(10.)\quad \left(\frac{Q}{a_{\beta_1}}\right)_4\left(\frac{Q}{a_{\beta_2}}\right)_4\left(\frac{Q}{a_{\beta_3}}\right)_4\cdots\left(\frac{Q}{a_{\beta_\gamma}}\right)_4 = +1.$$

D'une manière analogue la considération de l'autre équation

$$Rt^2-Qu^2 = -1$$

démontrerait que

$$(11.)\quad \left(\frac{R}{a_{\alpha_1}}\right)_4\left(\frac{R}{a_{\alpha_2}}\right)_4\left(\frac{R}{a_{\alpha_3}}\right)_4\cdots\left(\frac{R}{a_{a_\omega}}\right)_4 = +1,$$

et nous pourrons conclure que si les deux équations

$$Rt^2-Qu^2 = +1, \quad Rt^2-Qu^2 = -1$$

sont possibles, les conditions (10.) et (11.) devront nécessairement être satisfaites; nous aurons donc le

Théorème: ***Si plusieurs des restes*** $(\lambda.)$ ***sont positifs et*** $\left(\frac{R}{Q}\right) = +1$ ***où***

Q.R = A, si nous avons en outre

$$\begin{cases} \left(\frac{Q}{a_{\beta_1}}\right)_4 \left(\frac{Q}{a_{\beta_2}}\right)_4 \left(\frac{Q}{a_{\beta_3}}\right)_4 \cdots \left(\frac{Q}{a_{\beta_\gamma}}\right)_4 = -1, \\ \left(\frac{R}{a_{\alpha_1}}\right)_4 \left(\frac{R}{a_{\alpha_2}}\right)_4 \left(\frac{R}{a_{\alpha_3}}\right)_4 \cdots \left(\frac{R}{a_{\alpha_\omega}}\right)_4 = -1, \end{cases}$$

alors l'équation

$$x^2 - a_1.a_2.a_3 \ldots a_n y^2 = -1$$

est résoluble. En donnant à ***n*** les valeurs 2 et 3, on obtiendra des théorèmes dus à ***Dirichlet*** (Mémoire susdit, p. 658, 661, 662).

III.

Considérons maintenant le cas où dans l'équation

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

le nombre ***D*** contient, outre des facteurs premiers $\equiv 1 (\text{mod. } 4)$, aussi le facteur 2. Pour ce cas ***Dirichlet*** (Mémoire susdit, p. 652 et 655) énonce les deux théorèmes suivants:

1. ***Si A est un nombre premier*** $\equiv 5 (\text{mod. } 8)$, ***alors l'équation***

$$x^2 - 2Ay^2 = -1$$

est toujours résoluble.

2. ***Si A est un nombre premier*** $\equiv 9 (\text{mod. } 16)$, ***et en même temps***

$$2^{\frac{1}{4}(A-1)} \equiv -1 \ (\text{mod. } A),$$

l'équation

$$x^2 - 2Ay^2 = -1$$

est toujours résoluble.

En désignant par a_1, a_2, a_3, . . . a_n, différents nombres premiers $\equiv 5 \ (\text{mod. } 8)$, on a le

Théorème: ***L'équation***

$$x^2 - 2a_1.a_2.a_3 \ldots a_n y^2 = -1,$$

où n est impair, est toujours résoluble lorsque les restes $(\lambda.)$ ***sont tous positifs; et elle le sera également si n est pair, pourvu que les restes*** $(\lambda.)$ ***soient tous ou positifs ou négatifs.***

En posant $A = a_1.a_2.a_3 \ldots a_n$ et en indiquant par $x = T$, $y = U$ la solution *minima* de l'équation

$$x^2 - 2Ay^2 = +1,$$

nous obtiendrons

$$(T+1)(T-1) = 2AU^2,$$

et comme T est impair, U sera pair, c'est-à-dire $U = 2^m.f.g$, m étant un entier positif et f et g des nombres *impairs*, et nous pourrons écrire

$$(T+1)(T-1) = 2^{2m+1}.A.f^2.g^2,$$

et en mettant, comme précédemment, $A = Q.R$, nous aurons

$$(F.) \quad (T+1)(T-1) = 2^{2m+1}.Q.R.f^2.g^2.$$

La décomposition de $(F.)$ ne peut se faire que des manières suivantes

$$(T+1) = 2^{2m}f^2,\ 2^{2m}Qf^2,\ 2^{2m}Af^2,\ 2f^2,\ 2Qf^2,\ 2Af^2,$$
$$(T-1) = 2Ag^2,\ 2Rg^2,\ 2g^2,\ 2^{2m}Ag^2,\ 2^{2m}Rg^2,\ 2^{2m}g^2$$

parce que les deux nombres $T+1$ et $T-1$ n'ont que le seul facteur commun 2, donc il n'y a qu'une seule des six relations suivantes

$$(1.) \quad 2^{2m-1}f^2 - Ag^2 = +1, \qquad (4.) \quad f^2 - 2^{2m-1}Ag^2 = +1,$$
$$(2.) \quad 2^{2m-1}Qf^2 - Rg^2 = +1, \qquad (5.) \quad 2^{2m-1}Rg^2 - Qf^2 = -1,$$
$$(3.) \quad g^2 - 2^{2m-1}Af^2 = -1, \qquad (6.) \quad 2^{2m-1}g^2 - Af^2 = -1,$$

qui devra être satisfaite. Avant tout je démontre que dans ces relations, il faut avoir absolument $m = 1$; car autrement aucune d'elles ne pourrait être satisfaite. En effet, supposons $m > 1$, alors f et g étant impairs, leurs carrés sont $\equiv 1 (\text{mod. } 8)$, donc les premiers membres de (1.) et (2.) sont $\equiv -1 (\text{mod. } 8)$ ou $\equiv 3 (\text{mod. } 8)$; dans (3.) le premier membre est $\equiv 1 (\text{mod. } 8)$, et la relation (4.) ne peut être satisfaite, puisque, si elle l'était, il faudrait avoir

$$f^2 - 2A(2^{m-1}.g)^2 = +1,$$

ce qui est impossible parce que $x = T,\ y = U$ est la solution *minima* de l'équation proposée

$$x^2 - 2Ay^2 = +1;$$

il ne reste donc que (5.) et (6.); (6.) exigerait

$$\left(\frac{-2^{2m-1}}{a_r}\right) = \left(\frac{2^{2m-1}}{a_r}\right) = \left(\frac{2}{a_r}\right) = +1,$$

relation impossible, parce que $a_r \equiv 5 (\text{mod. } 8)$, et (5.) exigerait

$$\left(\frac{2^{2m-1}R}{a_{a_1}}\right) = \left(\frac{2^{2m-1}}{a_{a_1}}\right)\left(\frac{R}{a_{a_1}}\right) = +1,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{R}{a_{a_1}}\right) = -1,$$

ce qui est impossible, puisque si n est impair, le produit

$$\left(\frac{a_{\beta_1}}{a_{\alpha_1}}\right)\left(\frac{a_{\beta_2}}{a_{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\frac{a_{\beta_\gamma}}{a_{\alpha_1}}\right)$$

a tous ses facteurs positifs par hypothèse; si au contraire n est pair, le premier membre de (5.) est, si ω est impair, $\equiv 3 \pmod 8$, et si ω est pair, on a

$$\left(\frac{R}{a_{\alpha_1}}\right)=\left(\frac{a_{\beta_1}}{a_{\alpha_1}}\right)\left(\frac{a_{\beta_2}}{a_{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\frac{a_{\beta_\gamma}}{a_{\alpha_1}}\right)=+1;$$

donc nécessairement $m=1$. Mais quand $m=1$, les relations précédentes deviennent

$$\begin{aligned}
&(1.) \quad 2f^2-Ag^2 = +1, && (4.) \quad f^2-2Ag^2 = +1,\\
&(2.) \quad 2Qf^2-Rg^2 = +1, && (5.) \quad 2Rg^2-Qf^2 = -1,\\
&(3.) \quad g^2-2Af^2 = -1, && (6.) \quad 2g^2-Af^2 = -1;
\end{aligned}$$

et d'entre celles-ci (4.) doit être exclue parce que $x=T$, $y=U$ est la solution *minima* de l'équation donnée

$$x^2-2Ay^2 = +1.$$

Quant aux cinq relations qui restent, on observe que, si n est impair, (1.) et (6.) ont les premiers membres $\equiv -3 \pmod 8$, et (2.) et (5.) exigeraient

$$\left(\frac{R}{a_{\alpha_1}}\right)=-1, \quad \left(\frac{Q}{a_{\beta_1}}\right)=-1,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse; par conséquent il ne reste que (3.). Si au contraire n est pair, (6.) a le premier membre $\equiv 1 \pmod 8$, (1.) exigerait

$$\left(\frac{2}{a_r}\right) = +1,$$

et (2.) et (5.), si ω est impair, ont les premiers membres $\equiv -3 \pmod 8$, et si ω est pair, on devrait avoir

$$\left(\frac{Q}{a_{\beta_1}}\right)=-1, \quad \left(\frac{R}{a_{\alpha_1}}\right)=-1,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse; dans tous les cas il ne reste que

$$g^2-2Af^2 = -1,$$

comme nous voulions démontrer.

Supposons enfin n impair et les restes (λ.) tous égaux à -1, et en outre les facteurs premiers de A tous de la forme $8m'+1$, dont un nombre impair de la forme $16m''+9$, alors, comme précédemment, on obtient la

série des relations:

$$(1.)\quad 2^{2m-1}f^2-Ag^2 = +1, \qquad (4.)\quad f^2-2^{2m-1}Ag^2 = +1,$$
$$(2.)\quad 2^{2m-1}Qf^2-Rg^2 = +1, \qquad (5.)\quad 2^{2m-1}Rg^2-Qf^2 = -1,$$
$$(3.)\quad g^2-2^{2m-1}Af^2 = -1, \qquad (6.)\quad 2^{2m-1}g^2-Af^2 = -1,$$

où m peut être l'unité ou bien un entier supérieur à l'unité. Supposons d'abord $m=1$, alors, en vertu des hypothèses faites ci-dessus, (2.) et (5.) donneraient

$$\left(\frac{2R}{a_{\alpha_1}}\right)=+1, \quad \left(\frac{2Q}{a_{\beta_1}}\right)=+1,$$

ce qui n'a pas lieu, parce que les facteurs premiers de A sont de la forme $8m'+1$, et pour cela

$$\left(\frac{2}{a_{\alpha_1}}\right)=\left(\frac{2}{a_{\beta_1}}\right)=+1;$$

il est évident que (4.) et (6.) ne sont pas possibles, et il ne reste que (3.) et la suivante

$$(G.)\qquad 2f^2-Ag^2 = +1.$$

Mais en observant que g est impair, mettons g sous la forme $g'.g''.g'''\ldots$ où g', g'', g''', ... sont des nombres premiers, on aura

$$\left(\frac{2}{g'}\right)=1, \quad \left(\frac{2}{g''}\right)=1, \quad \left(\frac{2}{g'''}\right)=1, \quad \ldots,$$

par conséquent g', g'', g''', ... devront avoir la forme $8m'\pm1$, donc $g^2\equiv 1 (\text{mod. } 16)$, et $(G.)$ deviendra

$$16m_1+2-(16m_2+9)(16m_3+1) = 1,$$

relation absurde.

Soit maintenant $m>1$; parmi les six relations précédentes (1.), (2.), (4.), (5.) sont évidemment impossibles, et il ne reste que (3.) et la suivante

$$(6.)\quad 2^{2m-1}g^2-Af^2 = -1,$$

et en posant $g=g'.g''.g'''\ldots$, où g', g'', g''', ... sont des nombres premiers, nous aurons

$$\left(\frac{A}{g'}\right)=+1, \quad \left(\frac{A}{g''}\right)=+1, \quad \left(\frac{A}{g'''}\right)=+1, \quad \ldots,$$

savoir

$$\left(\frac{a_1}{g'}\right)\left(\frac{a_2}{g'}\right)\cdots\left(\frac{a_n}{g'}\right)=+1, \quad \left(\frac{a_1}{g''}\right)\left(\frac{a_2}{g''}\right)\cdots\left(\frac{a_n}{g''}\right)=+1, \quad \ldots$$

et par la loi de réciprocité

$$\left(\frac{g'}{a_1}\right)\left(\frac{g'}{a_2}\right)\cdots\left(\frac{g'}{a_n}\right)=1, \qquad \left(\frac{g''}{a_1}\right)\left(\frac{g''}{a_2}\right)\cdots\left(\frac{g''}{a_n}\right)=+1, \quad \ldots$$

et en multipliant on obtient

$$(H.) \qquad \left(\frac{g}{a_1}\right)\left(\frac{g}{a_2}\right)\left(\frac{g}{a_3}\right)\cdots\left(\frac{g}{a_n}\right) = +1;$$

mais (6.) donne

$$2^{2m-1}g^2 = -1+Af^2,$$

et en élevant le premier et le second membre successivement aux puissances $\frac{1}{4}(a_1-1)$, $\frac{1}{4}(a_2-1)$, $\frac{1}{4}(a_3-1)$, $\ldots$ $\frac{1}{4}(a_n-1)$, nous aurons

$$\left(\frac{2}{a_1}\right)_4\left(\frac{g}{a_1}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{a_2}\right)_4\left(\frac{g}{a_2}\right) = 1, \quad \ldots, \quad \left(\frac{2}{a_n}\right)_4\left(\frac{g}{a_n}\right) = 1,$$

et en multipliant et tenant compte du résultat (*H.*) on obtient

$$\left(\frac{2}{a_1}\right)_4\left(\frac{2}{a_2}\right)_4\left(\frac{2}{a_3}\right)_4\cdots\left(\frac{2}{a_n}\right)_4 = +1$$

comme condition nécessaire lorsque (6.) est satisfaite; nous pourrons donc énoncer le

Théorème: ***Si A se compose d'un nombre impair de facteurs premiers de la forme*** $8m+1$ ***parmi lesquels il y en a un nombre impair de la forme*** $16m'+9$, ***si en outre les restes*** ($\lambda.$) ***sont tous égaux à*** -1 ***et qu'on ait en même temps***

$$\left(\frac{2}{a_1}\right)_4\left(\frac{2}{a_2}\right)_4\left(\frac{2}{a_3}\right)_4\cdots\left(\frac{2}{a_n}\right)_4 = -1,$$

alors l'équation

$$x^2-2a_1.a_2.a_3\ldots a_n y^2 = -1$$

est résoluble.

Ueber eine Determinantenbeziehung in der Theorie der Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Sind $y_1, y_2, \ldots y_n$ Functionen von x, so ist bekanntlich der Differentialquotient der Determinante

$$(1.) \qquad D = |y_\varkappa \; y'_\varkappa \; y''_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(n-1)}| \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n)$$

durch die Determinante

$$(2.) \qquad \frac{dD}{dx} = |y_\varkappa \; y'_\varkappa \; y''_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(n-2)} \; y_\varkappa^{(n)}| \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n)$$

ausgedrückt; sei nun

$$(3.) \qquad D_1 = |y_\varkappa \; y'_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(r-1)} \; y_\varkappa^{(r+1)} \; \ldots \; y_\varkappa^{(n)}| \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n),$$

worin die Verticalreihe der $r$ten Ableitungen fehlt, so kann dieselbe in die Form gesetzt werden

$$(4.) \qquad D_1 = \Sigma \pm |y_\varkappa^{(r+1)} \; y_\varkappa^{(r+2)} \; \ldots \; y_\varkappa^{(n)}| \cdot |y_{n-r+\mu} \; y'_{n-r+\mu} \; \cdots \; y_{n-r+\mu}^{(r-1)}| \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, 3, \ldots n-r \\ \mu = 1, 2, 3, \ldots r \end{pmatrix},$$

und es wird daher nach (2.)

$$(5.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dD_1}{dx} = \Sigma \pm |y_\varkappa^{(r+1)} \; y_\varkappa^{(r+2)} \; \ldots \; y_\varkappa^{(n-1)} \; y_\varkappa^{(n+1)}| \cdot |y_{n-r+\mu} \; y'_{n-r+\mu} \; \cdots \; y_{n-r+\mu}^{(r-1)}| \\ \qquad + \Sigma \pm |y_\varkappa^{(r+1)} \; y_\varkappa^{(r+2)} \; \ldots \; y_\varkappa^{(n)}| \cdot |y_{n-r+\mu} \; y'_{n-r+\mu} \; \cdots \; y_{n-r+\mu}^{(r-2)} \; y_{n-r+\mu}^{(r)}| \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, 3, \ldots n-r \\ \mu = 1, 2, 3, \ldots r \end{pmatrix},$$

oder wie unmittelbar zu sehen

$$(6.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dD_1}{dx} = |y_\varkappa \; y'_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(r-2)} \; y_\varkappa^{(r)} \; y_\varkappa^{(r+1)} \; \ldots \; y_\varkappa^{(n)}| \\ \qquad + |y_\varkappa \; y'_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(r-2)} \; y_\varkappa^{(r-1)} \; y_\varkappa^{(r+1)} \; \ldots \; y_\varkappa^{(n-1)} \; y_\varkappa^{(n+1)}| \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n);$$

der Differentialquotient von D_1 besteht somit aus der Summe zweier Determinanten, von denen jede aus D_1 hervorgeht, indem man die Ableitungen der Elemente vor der Lücke (der $r$ten Verticalreihe) und diejenigen der Elemente der letzten Verticalreihe um eine Einheit erhöht. Daraus folgt

aber sogleich, dass nach (2.)

$$(7.)\qquad \frac{d^2D}{dx^2} = |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(n-3)}\, y_\varkappa^{(n-1)}\, y_\varkappa^{(n)}| + |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(n-2)}\, y_\varkappa^{(n+1)}|,$$

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^3D}{dx^3} = |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(n-4)}\, y_\varkappa^{(n-2)}\, y_\varkappa^{(n-1)}\, y_\varkappa^{(n)}| \\ +2|y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(n-3)}\, y_\varkappa^{(n-1)}\, y_\varkappa^{(n+1)}| + |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(n-2)}\, y_\varkappa^{(n+2)}| \end{cases} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \dots n)$$

u. s. w. ist, und von dieser Darstellung der höheren Differentialquotienten einer Determinante (1.) wollen wir nunmehr einige Anwendungen auf die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen machen.

Sei die Differentialgleichung

$$(9.)\qquad y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \dots + p_{m-1} y' + p_m y$$

gegeben, und ein Fundamentalsystem von Integralen mit $y_1, y_2, \dots y_m$ bezeichnet, so sind, wenn

$$(10.)\qquad D = |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-1)}|,\quad D_r = (-1)^{r-1}|y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-r-1)}\, y_\varkappa^{(m-r+1)} \dots y_\varkappa^{(m)}| \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \dots m)$$

gesetzt wird, die Coefficienten der Differentialgleichung durch die Ausdrücke bestimmt

$$(11.)\qquad p_r = \frac{D_r}{D},$$

woraus bekanntlich die *Liouville*sche Relation

$$(12.)\qquad D = ce^{\int p_1 dx}$$

unmittelbar folgt. Zerlegt man nun D nach der letzten Horizontalreihe, so folgt:

$$(13.)\qquad \begin{cases} y_m^{(m-1)}|y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-2)}| - y_m^{(m-2)}|y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-3)}\, y_\varkappa^{(m-1)}| \\ \quad + y_m^{(m-3)}|y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-4)}\, y_\varkappa^{(m-2)}\, y_\varkappa^{(m-1)}| - \dots \\ \quad \dots + (-1)^{m-1} y_m |y'_\varkappa\, y''_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-1)}| = ce^{\int p_1 dx}, \end{cases} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \dots m-1)$$

und setzt man

$$(14.)\qquad D_1 = |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-2)}| \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \dots m-1),$$

so folgt aus dem oben bewiesenen Satze mit Benutzung der Differentialgleichung (9.)

$$(15.)\qquad \frac{dD_1}{dx} = |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-3)}\, y_\varkappa^{(m-1)}|,$$

$$(16.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2D_1}{dx^2} = |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-4)}\, y_\varkappa^{(m-2)}\, y_\varkappa^{(m-1)}| \\ +|y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-3)}\, p_1 y_\varkappa^{(m-1)} + p_2 y_\varkappa^{(m-2)} + \dots + p_{m-1} y'_\varkappa + p_m y_\varkappa| \end{cases} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \dots m-1)$$

oder

$$(17.)\qquad \frac{d^2D_1}{dx^2} = |y_\varkappa\, y'_\varkappa \dots y_\varkappa^{(m-4)}\, y_\varkappa^{(m-2)}\, y_\varkappa^{(m-1)}| + p_1 \frac{dD_1}{dx} + p_2 D_1;$$

hieraus wiederum durch Differentiation

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^3D_1}{dx^3} = |y_\varkappa\ y'_\varkappa\ \dots\ y_\varkappa^{(m-5)}\ y_\varkappa^{(m-3)}\ y_\varkappa^{(m-2)}\ y_\varkappa^{(m-1)}| \\ \qquad\qquad +2p_1\dfrac{d^2D_1}{dx^2}+(p'_1+p_2-p_1^2)\dfrac{dD_1}{dx}+(p'_2-p_1p_2-p_3)D_1, \end{cases}$$

u. s. w., so dass also allgemein für jede in der Relation (13.) vorkommende Determinante die Beziehung statthat

$$(19.)\quad |y_\varkappa\ y'_\varkappa\ \dots\ y_\varkappa^{(\varrho-1)}\ y_\varkappa^{(\varrho+1)}\ y_\varkappa^{(m-1)}| = \frac{d^{m-\varrho-1}D_1}{dx^{m-\varrho-1}}+P_{1\varrho}\frac{d^{m-\varrho-2}D_1}{dx^{m-\varrho-2}}+\dots+P_{m-\varrho-1\,\varrho}D_1,$$

$\varkappa = (1, 2, 3, \dots m-1)$

worin $P_{1\varrho}$, $P_{2\varrho}$, $\dots$ $P_{m-\varrho-1\,\varrho}$ ganze Functionen von p_1, p_2, $\dots$ $p_{m-\varrho-1}$ und deren Ableitungen sind, die kein von diesen Grössen freies Glied besitzen. Setzt man die Werthe dieser Determinanten in (13.) ein, so erhält man eine Beziehung von der Form

$$(20.)\quad \begin{cases} y_m\left(\dfrac{d^{m-1}D_1}{dx^{m-1}}+P_{10}\dfrac{d^{m-2}D_1}{dx^{m-2}}+\dots+P_{m-10}D_1\right) \\ -y'_m\left(\dfrac{d^{m-2}D_1}{dx^{m-2}}+P_{11}\dfrac{d^{m-3}D_1}{dx^{m-3}}+\dots+P_{m-21}D_1\right)+\dots \\ \dots\pm y_m^{(m-2)}\dfrac{dD_1}{dx}\mp y_m^{(m-1)}D_1 = Ce^{\int p_1dx}, \end{cases}$$

von der ich einige Anwendungen machen will *).

Sei die lineare homogene Differentialgleichung $m$ter Ordnung eine binomische

$$(21.)\quad y^{(m)} = p_m y,$$

so erhält man wegen $p_1 = p_2 = \dots = p_{m-1} = 0$ für ein Fundamentalsystem von Integralen aus (19.) für

$$(22.)\quad D_1 = |y_\varkappa\ y'_\varkappa\ \dots\ y_\varkappa^{(m-2)}| \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \dots m-1)$$

---

*) So wird für die Differentialgleichung

$$y''' = p_1y''+p_2y'+p_3y,$$

wenn

$$D_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 \\ y_2 & y'_2 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$y''_3D_1-y'_3\frac{dD_1}{dx}+y_3\left(\frac{d^2D_1}{dx^2}-p_1\frac{dD_1}{dx}-p_2D_1\right) = Ce^{\int p_1dx}$$

sein, und somit, wie durch Differentiation dieser Gleichung und Elimination der Exponentialgrösse folgt, D_1 ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3D_1}{dx^3}-2p_1\frac{d^2D_1}{dx^2}+(p_1^2-p'_1-p_2)\frac{dD_1}{dx}+(p_1p_2-p'_2+p_3)D_1 = 0.$$

die Beziehung

$$(23.) \quad |y_\varkappa \; y'_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(\varrho-1)} \; y_\varkappa^{(\varrho+1)} \; \ldots \; y_\varkappa^{(m-1)}| = \frac{d^{m-\varrho-1} D_1}{dx^{m-\varrho-1}} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots m-1),$$

und die Gleichung (20.) geht in diesem Falle in

$$(24.) \quad y_m \frac{d^{m-1} D_1}{dx^{m-1}} - y'_m \frac{d^{m-2} D_1}{dx^{m-2}} + y''_m \frac{d^{m-3} D_1}{dx^{m-3}} - \cdots \pm y_m^{(m-2)} \frac{dD_1}{dx} \mp y_m^{(m-1)} D_1 = C$$

über. Differentiirt man nun diese Gleichung, so erhält man, wie unmittelbar zu sehen, mit Benutzung der Gleichung (21.)

$$(25.) \quad \frac{d^m D_1}{dx^m} = (-1)^m p_m D_1 \quad \text{oder} \quad p_m = (-1)^m \frac{d^m D_1}{dx^m} : D_1,$$

oder es ist D_1 ein Integral der Differentialgleichung

$$(26.) \quad y^{(m)} = (-1)^m p_m y;$$

wir erhalten somit den folgenden Satz:

Bezeichnen $y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ ein System von Fundamentalintegralen der linearen binomischen Gleichung

$$(27.) \quad y^{(2n)} = p_{2n} y,$$

so besteht zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stets die Beziehung

$$(28.) \quad |y_\varkappa \; y'_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(2n-2)}| = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_{2n} y_{2n} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots 2n-1),$$

worin $\alpha_1, \ldots \alpha_{2n}$ Constanten bedeuten; sind jedoch $y_1, y_2, \ldots y_{2n+1}$ die Integrale der binomischen Differentialgleichung

$$(29.) \quad y^{(2n+1)} = p_{2n+1} y,$$

so ergiebt sich

$$(30.) \quad |y_\varkappa \; y'_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(2n-1)}| = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \cdots + \alpha_{2n+1} \eta_{2n+1} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots 2n),$$

wenn $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{2n+1}$ ein System von Fundamentalintegralen der binomischen Differentialgleichung

$$(31.) \quad \eta^{(2n+1)} = -p_{2n+1} \eta$$

und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n+1}$ wiederum Constanten darstellen *).

---

*) Zu dem zweiten Theile dieses Satzes mag bemerkt werden, dass man durch die $2n+1$ möglichen Zusammenstellungen der Integrale $y_{a_1}, y_{a_2}, \ldots y_{a_{2n}}$ aus $y_1, y_2, \ldots y_{2n}, y_{2n+1}$ zu der Determinante

$$|y_{a_\varkappa} \; y'_{a_\varkappa} \; \ldots \; y_{a_\varkappa}^{(2n-1)}| = H_a \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots 2n)$$

$2n+1$ Integrale der Differentialgleichung (31.) erhält; aus der Determinante

$$|y_\nu \; y'_\nu \; \ldots \; y_\nu^{(2n)}| = C \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots 2n+1)$$

Sei z. B. die binomische Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(32.) \qquad y''' = -\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{3}}x^{-3}y,$$

deren Integrale

$$y_1 = x^{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}\log x, \quad y_2 = x^{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}, \quad y_3 = x^{1-2\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

leicht gefunden werden, so werden in der That

$$y_1y_2'-y_2y_1' = \eta_3 = x^{1+2\sqrt{\frac{1}{3}}}, \quad y_1y_3'-y_3y_1' = \eta_2 = -3\sqrt{\tfrac{1}{3}}x^{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}\log x - x^{1-\sqrt{\frac{1}{3}}},$$

$$y_2y_3'-y_3y_2' = \eta_1 = x^{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

drei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung

$$(33.) \qquad \eta''' = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{3}}x^{-3}\eta.$$

Die Gleichung (28.) liefert zugleich für alle linearen binomischen Differentialgleichungen paarer Ordnung eine algebraische Beziehung zwischen ihren Fundamentalintegralen, welche offenbar von der stets gültigen

$$|y_\varkappa \; y_\varkappa' \; y_\varkappa'' \; \dots \; y_\varkappa^{(2n-1)}| = c \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \dots 2n),$$

deren Differentiation ein der Null identisch gleiches Resultat liefert, verschieden ist.

Aber wir können nunmehr, nachdem der Inhalt des obigen Satzes durch eine Determinanteneigenschaft entwickelt worden, den Beweis desselben noch in anderer Weise führen und werden dadurch zu Betrachtungen anderer Art geleitet.

Bildet man eine lineare homogene Differentialgleichung $(2n-1)$ter Ordnung, welche als Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \dots y_{2n-1}$ besitzt, indem man die Coefficienten P_r durch den Ausdruck (11.) bestimmt,

$$(34.) \qquad y^{(2n-1)}+P_1y^{(2n-2)}+P_2y^{(2n-3)}+\dots+P_{2n-2}y'+P_{2n-1}y = 0,$$

und bestimmt Q als Function von x derart, dass

---

ergeben sich ferner nach Gleichung (24.), wenn $D_1 = H_{2n+1}$ gesetzt wird, und dann statt D_1 die obigen Determinanten substituirt werden,

$$\begin{aligned}
&y_{2n+1}H_{2n+1}^{(2n)} - y_{2n+1}'H_{2n+1}^{(2n-1)} + y_{2n+1}''H_{2n+1}^{(2n-2)} - \dots \pm y_{2n+1}^{(2n)}H_{2n+1} &&= C_{2n+1},\\
&y_{2n}\;\; H_{2n}^{(2n)} - y_{2n}'\;\; H_{2n}^{(2n-1)} + y_{2n}''\;\; H_{2n}^{(2n-2)} - \dots \pm y_{2n}^{(2n)}\;H_{2n} &&= C_{2n},\\
&\cdots\cdots\cdots

$$(35.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{y^{(2n-1)}+P_1y^{(2n-2)}+P_2y^{(2n-3)}+\cdots+P_{2n-2}y'+P_{2n-1}y\} \\ +Q\{y^{(2n-1)}+P_1y^{(2n-2)}+P_2y^{(2n-3)}+\cdots+P_{2n-2}y'+P_{2n-1}y\} = 0 \end{cases}$$

noch das fehlende Integral y_{2n} hat, also die Differentialgleichung $2n$ter Ordnung (35.) das Fundamentalsystem der Gleichung (27.) hat, so wird (35.) mit (27.) identisch sein müssen, und es werden sich somit die Beziehungen ergeben

$$(36.)\quad \begin{cases} P_1+Q=0, \quad P_1'+QP_1+P_2=0, \quad P_2'+QP_2+P_3=0, \quad \ldots \\ \qquad \ldots \quad P_{2n-2}'+QP_{2n-2}+P_{2n-1}=0, \quad P_{2n-1}'+QP_{2n-1}=-p_{2n}, \end{cases}$$

woraus durch Einsetzen des Werthes von Q aus der ersten Gleichung das System von Gleichungen folgt:

$$(37.)\quad \begin{cases} P_2=-P_1'+P_1P_1, \quad P_3=-P_2'+P_1P_2, \quad \ldots \\ \qquad \ldots \quad P_{2n-1}=-P_{2n-2}'+P_1P_{2n-2}, \quad P_{2n-1}'-P_1P_{2n-1}=-p_{2n}; \end{cases}$$

wir behaupten nun, dass

$$(38.)\qquad y = e^{-\int P_1 dx}$$

ein Integral der Differentialgleichung (27.) ist. Bildet man nämlich y', y'', $\ldots$ $y^{(2n)}$, so folgt, wie leicht aus (37.) zu ersehen,

$$(39.)\quad \begin{cases} y' = -P_1e^{-\int P_1dx}, \quad y'' = P_2e^{-\int P_1dx}, \quad y''' = -P_3e^{-\int P_1dx}, \quad \ldots \\ \ldots \quad y^{(2n-2)} = P_{2n-2}e^{-\int P_1dx}, \quad y^{(2n-1)} = -P_{2n-1}e^{-\int P_1dx}, \quad y^{(2n)} = p_{2n}e^{-\int P_1dx}, \end{cases}$$

und daher

$$y^{(2n)} = p_{2n}y;$$

da nun vermöge (34.)

$$(40.)\qquad |y_\varkappa\ y_\varkappa'\ \ldots\ y_\varkappa^{(2n-2)}| = ce^{-\int P_1dx} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots 2n-1)$$

ist, so ergiebt sich der oben durch (28.) dargestellte Satz unmittelbar. Aber aus dem eben gegebenen Beweise folgt eine wesentliche Ergänzung des obigen Satzes; setzt man nämlich die durch (38.) und (39.) gegebenen Werthe von y, y', y'', $\ldots$ $y^{(2n-1)}$ in (34.) ein, so folgt

$$e^{-\int P_1dx}\{-P_{2n-1}+P_1P_{2n-2}-P_2P_{2n-3}+\cdots+(-1)^{n-2}P_{n-1}P_n+(-1)^{n-1}P_nP_{n-1}+\cdots \\ \cdots-P_{2n-2}P_1+P_{2n-1}\}$$

identisch gleich Null, also ist (38.) oder die Determinante (40.) schon ein Integral von (34.) und somit

$$(41.)\qquad |y_\varkappa\ y_\varkappa'\ \ldots\ y_\varkappa^{(2n-2)}| = \alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_{2n-1}y_{2n-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots 2n-1),$$

und daher das α_{2n} des Satzes (28.) gleich Null; wir können also den ersten

Theil des obigen Satzes jetzt genauer so aussprechen:

Bezeichnen $y_1, y_2, \ldots y_{2n-1}$ $2n-1$ *Fundamentalintegrale der linearen binomischen Gleichung*

$$y^{(2n)} = p_{2n} y,$$

so besteht zwischen diesen Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stets die Beziehung

$$|y_\varkappa \; y'_\varkappa \; \ldots \; y_\varkappa^{(2n-2)}| = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_{2n-1} y_{2n-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots 2n-1),$$

in welcher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$ *Constanten bedeuten.*

Bildet man (34.) analog mit den Integralen $y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ die Differentialgleichung

$$(42.) \qquad y^{(2n)} + P_1 y^{(2n-1)} + P_2 y^{(2n-2)} + \cdots + P_{2n-1} y' + P_{2n} y = 0$$

und bestimmt Q als Function von x wieder so, dass

$$(43.) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{y^{(2n)} + P_1 y^{(2n-1)} + P_2 y^{(2n-2)} + \cdots + P_{2n-1} y' + P_{2n} y\} \\ + Q\{y^{(2n)} + P_1 y^{(2n-1)} + P_2 y^{(2n-2)} + \cdots + P_{2n-1} y' + P_{2n} y\} = 0 \end{cases}$$

das noch fehlende Integral $y^{(2n+1)}$ hat, so wird (43.) mit (29.) identisch sein müssen, und es werden sich wieder die Beziehungen ergeben

$$(44.) \qquad \begin{cases} P_1 + Q = 0, \quad P_1' + QP_1 + P_2 = 0, \quad \ldots \\ \qquad \ldots \quad P_{2n-1}' + QP_{2n-1} + P_{2n} = 0, \quad P_{2n}' + QP_{2n} = -p_{2n+1} \end{cases}$$

oder

$$(45.) \qquad \begin{cases} P_2 = -P_1' + P_1 P_1, \quad P_3 = -P_2' + P_1 P_2, \quad \ldots \\ \qquad \ldots \quad P_{2n} = -P_{2n-1}' + P_1 P_{2n-1}, \quad P_{2n}' - P_1 P_{2n} = -p_{2n+1}; \end{cases}$$

da nun wieder aus (38.) die Beziehungen folgen

$$(46.) \qquad \begin{cases} y' = -P_1 e^{-\int P_1 dx}, \quad y'' = P_2 e^{-\int P_1 dx}, \quad \ldots \quad y^{(2n-1)} = -P_{2n-1} e^{-\int P_1 dx}, \\ \qquad y^{(2n)} = P_{2n} e^{-\int P_1 dx}, \quad y^{(2n+1)} = -p_{2n+1} e^{-\int P_1 dx}, \end{cases}$$

so wird

$$(47.) \qquad y^{(2n+1)} = -p_{2n+1} y,$$

also der zweite durch (30.) ausgedrückte Satz bewiesen.

Es mag endlich noch bemerkt werden, dass für die binomische Gleichung

$$(48.) \qquad y^{(2n)} = py$$

unmittelbar für zwei Fundamentalintegrale y_1 und y_2 eine Reihe von algebraischen Beziehungen zwischen diesen und deren Ableitungen sich ergeben; da nämlich aus (48.)

$$y_1 y_2^{(2n)} - y_2 y_1^{(2n)} = 0$$

folgt, und

$$y_1 y_2^{(2n)} - y_2 y_1^{(2n)} = \frac{d}{dx}(y_1 y_2^{(2n-1)} - y_2 y_1^{(2n-1)}) - (y_1' y_2^{(2n-1)} - y_2' y_1^{(2n-1)}),$$

$$y_1' y_2^{(2n-1)} - y_2' y_1^{(2n-1)} = \frac{d}{dx}(y_1' y_2^{(2n-2)} - y_2 y_1^{(2n-2)}) - (y_1'' y_2^{(2n-2)} - y_2'' y_1^{(2n-2)}),$$

. . . . . .

$$y_1^{(n-2)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n-2)} y_1^{(n+2)} = \frac{d}{dx}(y_1^{(n-2)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n-2)} y_1^{(n+1)}) - (y_1^{(n-1)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n-1)} y_1^{(n+1)}),$$

$$y_1^{(n-1)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n-1)} y_1^{(n+1)} = \frac{d}{dx}(y_1^{(n-1)} y_2^{(n)} - y_2^{(n-1)} y_1^{(n)})$$

sich ergiebt, so liefert die Zusammensetzung dieser Gleichungen

$$\frac{d}{dx}(y_1 y_2^{(2n-1)} - y_2 y_1^{(2n-1)}) - \frac{d}{dx}(y_1' y_2^{(2n-2)} - y_2' y_1^{(2n-2)}) + \frac{d}{dx}(y_1'' y_2^{(2n-3)} - y_2'' y_1^{(2n-3)}) - \cdots$$

$$\cdots \pm \frac{d}{dx}(y_1^{(n-1)} y_2^{(n)} - y_2^{(n-1)} y_1^{(n)}) = 0$$

oder durch Integration

$$(49.) \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_1^{(2n-1)} \\ y_2 & y_2^{(2n-1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1' & y_1^{(2n-2)} \\ y_2 & y_2^{(2n-2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1'' & y_1^{(2n-3)} \\ y_2'' & y_2^{(2n-3)} \end{vmatrix} - \cdots \pm \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n)} \end{vmatrix} = a,$$

und ähnliche Relationen aus der Verbindung je zweier anderen particulären Integrale; mit Hülfe dieser Beziehungen kann durch Transformation der Determinante

$$|y_\varkappa \; y_\varkappa' \; y_\varkappa'' \; \ldots \; y_\varkappa^{(2n-1)}| = C$$

wiederum das oben gefundene Resultat hergeleitet werden *).

Wie man mit Hülfe der allgemeineren Gleichung (20.), gerade so wie es mit Hülfe von (24.) für binomische Gleichungen geschah, für lineare Differentialgleichungen überhaupt algebraische Beziehungen zwischen den particulären Integralen und deren Ableitungen herleitet, soll hier nicht weiter erörtert werden.

Zu den am Anfange dieser Note eingeführten Determinanten mag

---

*) Dass dieser Satz auch für andere als binomische Differentialgleichungen gelten kann, ist klar; so wird für jede lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten

$$y^{(m)} + A_1 y^{(m-1)} + A_2 y^{(m-2)} + \cdots + A_{m-1} y' + A_m y = 0,$$

für welche die Lösungen der Gleichung

$$\lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + A_2 \lambda^{m-2} + \cdots + A_{m-1} \lambda + A_m = 0$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m-1}, \lambda_m$ bezeichnet werden, die Determinante (14.) die Form haben

$$|e^{\lambda_\varkappa x} \; \lambda_\varkappa e^{\lambda_\varkappa x} \; \ldots \; \lambda_\varkappa^{m-2} e^{\lambda_\varkappa x}| = C.e^{-(A_1+\lambda_m)x} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots m-1),$$

und wenn somit z. B. $A_1 = 0$ und $\lambda_m = -\lambda_r$ ist, so wird die Determinante selbst wieder ein Integral sein.

noch bemerkt werden, dass, wenn man mit Festhaltung der Reihenfolge der Indices die Determinante

$$(50.) \quad |y_{\varkappa}^{(m_{\varkappa})} \; y_{\varkappa}^{(m_{\varkappa}+1)} \; y_{\varkappa}^{(m_{\varkappa}+2)} \; \ldots \; y_{\varkappa}^{(m_{\varkappa}+n-1)}| \quad \underset{\varkappa=(1,\,2,\,3,\,\ldots\,n)}{} \quad \text{mit} \quad (y_1^{(m_1)} y_2^{(m_2)} \ldots y_n^{(m_n)})$$

bezeichnet und festsetzt, dass in dem nachfolgenden Producte sich stets die mit Indices versehenen y symbolisch zu einem nach wachsenden Indices geordneten Producte $(y_1^{(m_1)} y_2^{(m_2)} \ldots y_n^{(m_n)})$ multipliciren, während die Producte von y ohne Index sich zu einem y ohne Index vereinigen, dessen Ableitung die Summe der Ableitungsindices der einzelnen y war, die allgemeine homogene lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$(51.) \quad y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1} y'+p_n y = 0$$

sich in die Form setzen lässt:

$$(52.) \quad (y_1 y'-y_1' y)(y_2 y'-y_2' y)(y_3 y'-y_3' y)\ldots(y_n y'-y_n' y) = 0.$$

Definirt man nun y_1 als eine r-fache Lösung der Differentialgleichung, wenn dieselbe die Lösungen

$$y_1, \quad x y_1, \quad x^2 y_1, \quad \ldots \quad x^{r-1} y_1$$

besitzt, so lässt sich aus der Zerlegungsform unmittelbar ablesen, dass dann y_1 eine $(r-1)$-fache Lösung der Differentialgleichung

$$(53.) \quad n y^{(n-1)}+(n-1)p_1 y^{(n-2)}+(n-2)p_2 y^{(n-3)}+\cdots+2p_{n-2} y'+p_{n-1} y = 0,$$

eine $(r-2)$-fache Lösung der Differentialgleichung

$$(54.) \quad n(n-1) y^{(n-2)}+(n-1)(n-2)p_1 y^{(n-3)}+\cdots+2p_{n-2} y = 0$$

etc. sein muss, und indem man die Operation der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers auf die symbolische Form (52.) überträgt, kann man genau wie bei algebraischen Gleichungen die in diesem Falle reductible Differentialgleichung (51.) auf eine lineare homogene Differentialgleichung mit nur verschiedenen Lösungen zurückführen, ihre Discriminante bilden etc.

Da es zum Zwecke der Herleitung von algebraischen Beziehungen zwischen particulären Integralen und deren Ableitungen für lineare homogene Differentialgleichungen nach den obigen Auseinandersetzungen häufig wesentlich sein wird, die Differentialgleichung entweder auf eine binomische zurückzuführen oder eine Anzahl von Gliedern aus ihr herauszuschaffen, so mag hier nur noch zur Analogie mit der *Tschirnhausen*schen Substitution in der Theorie der algebraischen Gleichungen bemerkt werden, dass, wenn

auf die Differentialgleichung

$$(55.) \quad y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+p_3y^{(n-3)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny = 0$$

die Substitution

$$(56.) \quad z = uy$$

angewandt wird, worin u der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügt

$$(57.) \quad u'+\frac{p_1}{n}u = 0,$$

dieselbe in

$$(58.) \quad z^{(n)}+P_2z^{(n-2)}+P_3z^{(n-3)}+\cdots+P_nz = 0$$

übergeht; wenn

$$z = \frac{1}{U}y$$

gesetzt wird, worin U ein Integral der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(59.) \quad U''-\frac{2}{n}p_1U'-\frac{2}{n(n-1)}p_2U = 0$$

ist, dieselbe in

$$(60.) \quad z^{(n)}+P_1z^{(n-1)}+P_3z^{(n-3)}+P_4z^{(n-4)}+\cdots+P_nz = 0$$

übergeht u. s. w. Will man dagegen aus (55.) das erste und zweite Glied zugleich herausschaffen, so sieht man leicht, dass in der Substitution

$$(61.) \quad z = uy+vy'$$

die eine Gleichung in ihrer Ordnung unabhängig von der Differentialgleichung (55.) lautet

$$(62.) \quad nu'+\frac{n(n-1)}{2}v''+p_1(u+nv')+(p_1'+p_1^2+p_2)v = 0,$$

während die zweite u und v bestimmende Differentialgleichung z. B. für $n = 3$ die Form hat

$$u(3u''-p_3v-p_2u-3p_2v'+p_1p_2v-p_2'v+v''')-v(u'''-3p_3v'-p_3'v-p_3u+p_1p_3v) = 0,$$

jedenfalls führt von da an die Bestimmung der Functionen u und v auf Differentialgleichungen höherer Ordnung als die der vorgelegten Differentialgleichung.

Berechnung der krummen Oberfläche und des körperlichen Inhalts eines Kugel-Ausschnitts zwischen zwei beliebigen, die Kugel und einander schneidenden Ebenen.

(Von Herrn *E. Czuber* in Brünn.)

Im 52. Bande dieses Journals hat *Crelle* eine Lösung des in der Ueberschrift bezeichneten Problems mitgetheilt mit der Bemerkung, dass der Gegenstand schon deshalb mathematisch interessant sei, „weil er ein Beispiel giebt, dass von einer ungemein einfachen Aufgabe die Auflösung und die Endergebnisse recht verwickelt sein können". Am Schlusse lässt er es dahin gestellt sein, „ob vielleicht noch auf einem kürzeren Wege zu den Endergebnissen zu gelangen sei".

Die Aufgabe lässt in der That eine einfache elementare Lösung zu.

Die Oberfläche des Ausschnitts kann nämlich als algebraische Summe von zwei sphärischen Kreissectoren und zwei gleichen sphärischen Dreiecken dargestellt werden, welche sich ergeben, wenn man aus den sphärischen Mittelpunkten der beiden den Ausschnitt begrenzenden Kreise nach den Ecken des Ausschnitts die sphärischen Radien zieht und die genannten Mittelpunkte durch einen Grosskreisbogen verbindet.

Der körperliche Inhalt ergiebt sich als algebraische Summe dreier Kegel mit dem Mittelpunkt der Kugel als gemeinschaftlicher Spitze; die krumme Oberfläche und die beiden Kreissegmente, welche die Begrenzung des Ausschnitts als Körper ausmachen, bilden die Grundflächen dieser Kegel.

Wir stellen die Formel für den Inhalt nochmals her, weil sie in der citirten Abhandlung *Crelles* durch ein Versehen entstellt ist, das sich pag. 189 l. c. eingeschlichen hat und bei der darauffolgenden Anwendung der Formel auf einige specielle Fälle nicht aufgedeckt werden konnte; sie lautet in etwas veränderter Anordnung der Glieder

$$K = \frac{h(c^2e-2ch^2-eh^2)\sqrt{r^2-c^2-h^2}}{3(e^2+h^2)}$$
$$+\frac{h(c+e)(h^2(c+e)^2-3r^2(e^2+h^2))}{3(e^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{h^2-ce}{\sqrt{e^2+h^2}\sqrt{r^2-c^2-h^2}}\right]$$
$$-\tfrac{1}{3}(r-h)^2(2r+h)\arccos\frac{c}{\sqrt{r^2-h^2}}+\tfrac{2}{3}r^3\left[\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{(hr-ce)(r+h)-c^2h}{(ch+e(r+h))\sqrt{r^2-c^2-h^2}}\right],$$

während dort im dritten Gliede $\arccos\frac{c}{\sqrt{r^2-c^2-h^2}}$ steht.

Zur Theorie der *Fuchs*schen Functionen.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger.*)

Die merkwürdigen und interessanten Functionen, welche zuerst Herr *Poincaré* zum Gegenstande einer selbständigen Theorie gemacht und als *Fuchssche Functionen (fonctions Fuchsiennes)* bezeichnet hat, scheinen berufen, in der Analysis eine so wichtige Rolle zu spielen, dass es wohl nicht überflüssig sein dürfte, die Definition dieser Functionen zu versuchen, indem man von Principien ausgeht, welche sowohl von jenen, die Herrn *Fuchs* auf die gedachten Functionen geführt, als auch von denen, welche Herr *Poincaré* seinen bewundernswerthen Arbeiten zu Grunde legte, wesentlich verschieden sind.

Durch eine von Herrn *Fuchs,* meinem verehrten Lehrer, im Winter-Semester 1885/86 an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesung *) zur Beschäftigung mit der Theorie der *Fuchs*schen Functionen angeregt, war es insbesondere die Lectüre der §§ 16, 17 von Herrn *Poincarés* Arbeit *„Sur les groupes des équations linéaires“* **), die mich veranlasste, für die Erzeugung der in Rede stehenden Functionen einen ähnlichen Weg einzuschlagen, wie ihn *Gauss* in der Abhandlung *„Determinatio attractionis* etc.“ ***) und in den nachgelassenen Fragmenten über das arithmetisch-geometrische Mittel †) für die elliptischen Functionen vorgezeichnet hat, nämlich die functionale Beziehung, als deren Umkehrung sich die *Fuchs*schen Functionen ergeben, durch einen Grenzübergang aus einer algebraischen Beziehung herzustellen ††).

*) Ueber die Darstellung der Functionen, welche durch Differentialgleichungen definirt werden.

**) Acta Mathematica Bd. IV S. 197—311.

***) Gesammelte Werke Bd. III S. 352—355.

†) ibid. S. 461 ff.

††) Nach einem Gesichtspunkte, welcher aber von demjenigen, der mich in der gegenwärtigen Arbeit geleitet hat, vollständig verschieden zu sein scheint, hat neuerdings auch Herr *Schapira* im 1. Heft des IV. Bandes N. F. der Verhandlungen des Naturhistorisch-Medicinischen Vereins zu Heidelberg eine Verallgemeinerung des Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels unternommen.

Im Folgenden habe ich dieses Princip zur Herstellung jener speciellen Klasse *Fuchs*scher Functionen angewandt, welche in der Terminologie von Herrn *Poincaré* der „deuxième famille“ und einem „type symétrique“ angehören; es wird aber die hier befolgte Methode auch auf die allgemeinsten dieser Functionen erweitert, ja auf Functionen mehrerer Variabeln übertragen, auch bei jenen Functionen mit Erfolg angewandt werden können, welche Herr *Fuchs* *) als Umkehrungsfunctionen der Integrale von Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen definirt hat.

Nachdem in Nr. I die als Ausgangspunkt dienende algebraische Function erklärt worden, wird in Nr. II gelehrt, wie aus dieser, durch eine Art von *Iteration* eine unendliche Folge algebraischer Functionen hergeleitet werden könne, deren Grenzwerth eine functionale Abhängigkeit liefert, von der in den Nummern III, IV gezeigt wird, dass ihre Umkehrung eine *Fuchs*sche Function der erwähnten Art sei. In Nr. V werden dann einige auf diese Function Bezug habende Sätze entwickelt und endlich in Nr. VI der Zusammenhang angedeutet, welcher unsere Methode mit der Transformationstheorie der *Fuchs*schen Functionen verknüpft.

Den Inhalt der Nr. V habe ich bereits in den Berichten der ungarischen Akademie der Wissenschaften veröffentlicht **).

I.

$A_1, A_2, \ldots A_n$, seien n beliebig gegebene reale Grössen, so dass $A_\varkappa < A_{\varkappa+1}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n-1)$; wir construiren über der Ebene einer complexen Variablen x die wie folgt beschaffene *Riemann*sche Fläche T.

Es bestehe T aus $n+1$ Blättern, welche wir der Reihe nach mit den Marken 0, 1, 2, $\ldots$ n versehen wollen, Verzweigungspunkte seien $x = A_1$, $A_2, \ldots A_n$, und zwar mögen sich im Punkte $A_\varkappa$ die Blätter 0, $\varkappa$, $\varkappa+1$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots n-1$, im Punkte A_n die Blätter 0, n, 1 verzweigen, so dass das Blatt 0 in jedem, irgend ein anderes Blatt jedoch nur in zwei benachbarten der Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ eine Verzweigung erfährt. Führen wir Verzweigungsschnitte längs der realen x-Axe zwischen den Punkten $A_{\varkappa-1}$, $A_\varkappa$

---

*) Vergl. Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. XXVII; dieses Journal Bd. 89 S. 151 ff.

**) Vergl. Mathematisch-naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn Bd. VI.

durch die Blätter 0, $\varkappa$, für $\varkappa = 2, 3, \ldots n$, vom Punkte A_n über den unendlich-fernen Punkt nach A_1 durch die Blätter 0, 1 und heften längs des Schnittes $(\varkappa-1, \varkappa)$, der die Punkte $A_{\varkappa-1}$, $A_\varkappa$ verbindet, die obere Hälfte des Blattes 0 an die untere des Blattes $\varkappa$, die untere von 0 an die obere von $\varkappa$; dann wird, wenn wir von irgend einem Punkte des Blattes 0 ausgehen, ein einfacher geschlossener Umgang um $A_\varkappa$ diesen letzteren Punkt dreimal umkreisen, und zwar werden wir nach der ersten Umkreisung in das Blatt $\varkappa$, nach der zweiten in das Blatt $\varkappa+1$, nach der dritten in das Ausgangsblatt 0 gelangt sein; $\varkappa$ durchläuft dabei die Werthe 1, 2, ... n, und es ist für $\varkappa = 1$, $\varkappa-1 = n$, für $\varkappa = n$, $\varkappa+1 = 1$ zu nehmen. Jeder der Punkte $A_\varkappa$ ist auf diese Weise ein doppelter Verzweigungspunkt, zu welchem der dreigliedrige Cyklus $(0, \varkappa, \varkappa+1)$ gehört (der zu A_n gehörige Cyklus ist $(0, n, 1)$); die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte ist also gleich $2n$. Indem wir die *Riemann*sche Formel *)

$$w-2N = 2(p-1)$$

anwenden, erkennen wir, da in unserem Falle $w = 2n$, $N = n+1$, dass $p = 0$, d. h. unsere Fläche T *einfach zusammenhängend* ist.

Zufolge der *Riemann*schen Existenztheoreme **) giebt es stets eine Function y von x, welche innerhalb T eindeutig, nur an einer beliebig vorgeschriebenen Stelle dieser Fläche von erster Ordnung unendlich, sonst aber allenthalben endlich und stetig ist. Diese Function y genügt ***) einer irreductiblen algebraischen Gleichung $(n+1)$-ten Grades mit in x linearen Coefficienten, zu deren vollständiger Bestimmung wir noch über drei willkürliche Constanten zu verfügen haben †). Sei $\bar{y}$ irgend eine solche Function und

$$(1.) \qquad \bar{\Phi}(\bar{y}, x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} (\bar{B}_\nu x + \bar{C}_\nu)\bar{y}^{n-\nu+1} = 0$$

*) *Riemann,* Gesammelte Werke (Leipzig 1876) S. 107.

**) ibid. S. 97—100; vergl. auch: *C. Neumann* „Vorlesungen über *Riemanns* Theorie der *Abel*schen Integrale" (zweite Auflage Leipzig 1884), S. 238 ff.; S. 388—471.

***) *Riemann,* Gesammelte Werke S. 101.

†) Ich hätte es wohl gewünscht, die algebraische Function y von x, welche die Grundlage der ganzen folgenden Untersuchung bildet, nicht nur unter Zuhülfenahme der *Riemann*schen Existenztheoreme, sondern *rein algebraisch* zu definiren. Eine solche algebraische Bestimmung der in Rede stehenden Function ist zwar auf S. 185 angedeutet, es dürfte jedoch Schwierigkeiten verursachen, von dieser Bestimmung ausgehend den Nachweis zu führen, dass jene Function sich wirklich auf die angegebene Art verzweigt, und dass dieselbe, von drei Constanten abgesehen, auch eindeutig bestimmt sei.

die $\bar{y}$ definirende Gleichung, dann ist x rational in $\bar{y}$ und folglich *) jede andere Function y eine lineare Function mit ***constanten*** Coefficienten von $\bar{y}$,

$$y = \frac{\alpha\bar{y}+\beta}{\gamma\bar{y}+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma \gtrless 0,$$

in welchem Ausdrucke auch die drei willkürlichen Constanten in Evidenz gesetzt sind. —

Die Discriminante der Gleichung (1.) in Bezug auf $\bar{y}$ ist:

$$\bar{\Delta}(x) = (\bar{B}_0 x+\bar{C}_0)^{n-1} \prod_{\varkappa=0,1,2,\dots n} \bar{\Phi}'(\bar{y}^{(\varkappa)}, x),$$

wo $\bar{y}^{(\varkappa)}$ die zum Blatte $\varkappa$ von T gehörige Wurzel von (1.), $\bar{\Phi}'$ die nach $\bar{y}$ genommene erste Ableitung von $\bar{\Phi}$ bedeutet; es ist also $\bar{\Delta}(x)$ eine ganze Function $2n$-ten Grades von x und andererseits eine ganze homogene Form $2n$-ten Grades der Coefficienten $\bar{w}_\varkappa = \bar{B}_\varkappa x+\bar{C}_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, 2, 3, \dots n+1)$ der Gleichung (1.). Sei $\bar{h}_\varkappa$ der gemeinsame Werth der Zweige $\bar{y}^{(0)}$, $\bar{y}^{(\varkappa)}$, $\bar{y}^{(\varkappa+1)}$ im Punkte $x = A_\varkappa$, dann ist:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{h}_\varkappa, A_\varkappa) &= 0, \\ \bar{\Phi}'(\bar{h}_\varkappa, A_\varkappa) &= 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n) \\ \bar{\Phi}''(\bar{h}_\varkappa, A_\varkappa) &= 0, \end{aligned}$$

wo $\bar{\Phi}''$ die zweite Ableitung von $\bar{\Phi}$ nach $\bar{y}$ bedeutet, und daher, in der von Herrn ***Kronecker*** eingeführten Schreibweise:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(x) &\equiv 0 \pmod{g(x)}, \\ \frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\bar{w}_\nu} &\equiv 0 \pmod{g(x)}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots n+1) \end{aligned}$$

wo

$$g(x) = \prod_{\varkappa=1,2,\dots n} (x-A_\varkappa);$$

da aber:

$$\frac{d\bar{\Delta}}{dx} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial\bar{w}_\nu}\bar{B}_\nu,$$

also

$$\frac{d\bar{\Delta}}{dx} \equiv 0 \pmod{g(x)},$$

so folgt:

$$(2.) \qquad \bar{\Delta}(x) = \bar{c}\,g(x)^2,$$

---

*) *Riemann,* Gesammelte Werke S. 112 ff.

wo $\bar{c}$ eine von x unabhängige Constante. — Wie leicht einzusehen, ist ferner

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial \bar{w}_{\mu_1} \partial \bar{w}_{\nu_1}}\right)_{x=A_\varkappa} : \left(\frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial \bar{w}_{\mu_2} \partial \bar{w}_{\nu_2}}\right)_{x=A_\varkappa} = \bar{h}_\varkappa^{\mu_2+\nu_2-\mu_1-\nu_1},$$

also:

$$(3.) \qquad \bar{h}_\varkappa = \left[\frac{\frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial \bar{w}_{\mu-1} \partial \bar{w}_\nu}}{\frac{\partial^2 \bar{\Delta}}{\partial \bar{w}_\mu \partial \bar{w}_\nu}}\right]_{x=A_\varkappa} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots n+1).$$

Aus dem invarianten Charakter der Discriminante folgt, dass diese, abgesehen von einem von x unabhängigen Factor, für jede y-Function dieselbe, und zwar gleich const. $g(x)^2$ sein muss, umgekehrt lässt sich aber auch leicht übersehen, dass durch Angabe der Discriminante allein die Function y bis auf drei willkürliche Constanten vollkommen bestimmt ist. — Betrachten wir nämlich die $\bar{B}_\nu$, $\bar{C}_\nu$ als Unbekannte, so ist $\bar{\Delta}(x)$ offenbar eine ganze Function $2n$-ten Grades von x, deren Coefficienten homogen in jenen $2n+4$ Unbekannten sind; vergleichen wir also zu beiden Seiten der Gleichung (2.) die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x, so erhalten wir $2n+1$ Gleichungen, aus welchen die $2n+4$ Grössen $\bar{B}_\nu$, $\bar{C}_\nu$ als Functionen der A_1, A_2, ... A_n und dreier unbestimmten Parameter bestimmt werden können. Dass diese Bestimmung bei willkürlich gegebenen Werthen der A_1, A_2, ... A_n auch stets und nur auf eine Weise möglich sei, braucht nicht erst besonders nachgewiesen zu werden, da ja die Existenz der Function y als eindeutiger Function in der Fläche T, die nur an einer Stelle von erster Ordnung unendlich ist, nach den *Riemann*schen Existenztheoremen als feststehend angesehen werden kann. Bezeichnen wir im Folgenden die conjugirte einer complexen Grösse a durch a', dann ist offenbar die Discriminante der Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} (\bar{B}'_\nu x + \bar{C}'_\nu) v^{n-\nu+1} = 0$$

gleich $\bar{c}' g(x)^2$ und mithin

$$v = \frac{\alpha \bar{y} + \beta}{\gamma \bar{y} + \delta},$$

wo α, β, γ, δ wohlbestimmte Zahlen, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Null verschieden ist, bedeuten. Wir können folglich vier Zahlen λ, μ, ν, ϱ stets so bestimmen, dass $\lambda\varrho - \mu\nu \gtrless 0$ und

$$y = \frac{\lambda\bar{y}+\mu}{\nu\bar{y}+\varrho}$$

einer Gleichung

$$(4.) \qquad \Phi(y, x) = \sum_{\nu=0}^{n+1}(B_\nu x + C_\nu) y^{n-\nu+1} = 0$$

Genüge leistet, wo die B_ν, C_ν *reale* Grössen sind, und es ist klar, dass alsdann auch jede lineare gebrochene oder ganze Function von y mit realen Coefficienten die gleiche Eigenschaft besitzt. Im Folgenden betrachten wir stets solche Functionen y, welche Gleichungen *mit realen Coefficienten* genügen, und behalten für dieselben alle früheren Bezeichnungen mit Hinweglassung des Ueberstriches bei; wir können alsdann noch über drei reale, willkürliche Constante verfügen. Aus der Realität der B_ν, C_ν und aus Gleichung (3.) folgt, dass auch die Werthe $h_\varkappa$, welche $y^{(0)}$, $y^{(\varkappa)}$, $y^{(\varkappa+1)}$ im Punkte $A_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$ annehmen, real sind, und da, wenn $h_\varkappa$ nicht unendlich gross ist in der Umgebung von $x = A_\varkappa$:

$$(5.) \qquad y = h_\varkappa + \alpha_1^{(\varkappa)}(x-A_\varkappa)^{\frac{1}{3}} + \alpha_2^{(\varkappa)}(x-A_\varkappa)^{\frac{2}{3}} + \cdots,$$

wo

$$\alpha_\mu^{(\varkappa)} = \frac{1}{\mu!}\left\{\frac{d^\mu y}{[d(x-A_\varkappa)^{\frac{1}{3}}]^\mu}\right\}_{x=A_\varkappa},$$

so folgt ferner, dass sämmtliche Coefficienten der Reihenentwickelung (5.) reale Grössen sind.

Setzen wir:

$$x - A_\varkappa = \varrho_\varkappa(\cos\varphi_\varkappa + i\sin\varphi_\varkappa),$$

$$\omega_\varkappa = \varrho_\varkappa^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi_\varkappa}{3} + i\sin\frac{\varphi_\varkappa}{3}\right),$$

$$\omega'_\varkappa = \varrho_\varkappa^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi_\varkappa+2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi_\varkappa+2\pi}{3}\right),$$

$$\omega''_\varkappa = \varrho_\varkappa^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi_\varkappa+4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi_\varkappa+4\pi}{3}\right),$$

ferner:

$$v_{\varkappa 1} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha_\mu^{(\varkappa)}\omega_\varkappa^\mu, \quad v_{\varkappa 2} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha_\mu^{(\varkappa)}\omega_\varkappa'^\mu, \quad v_{\varkappa 3} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha_\mu^{(\varkappa)}\omega_\varkappa''^\mu,$$

wo $\alpha_0^{(\varkappa)} = h_\varkappa$ zu nehmen ist, so sind $v_{\varkappa 1}$, $v_{\varkappa 2}$, $v_{\varkappa 3}$ nichts anderes als die in einer gewissen Reihenfolge genommenen $y^{(0)}$, $y^{(\varkappa)}$, $y^{(\varkappa+1)}$. Diese Reihenfolge festzustellen soll unsere nächste Aufgabe sein.

Bezeichnen wir mit $r_{\varkappa,\varkappa+1}$ eine reale Zahl, für welche

$$A_\varkappa < r_{\varkappa,\varkappa+1} < A_{\varkappa+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n-1),$$

mit $r_{n,1}$ eine reale Zahl, die entweder kleiner als A_1 oder grösser als A_n ist, dann ist, wenn $r_{\varkappa,\varkappa+1}$ innerhalb des Convergenzkreises der Reihe (5.) gelegen, $\varphi_\varkappa = 0$ für diesen Werth von x, folglich $v_{\varkappa 1}$ real, $v_{\varkappa 2}$, $v_{\varkappa 3}$ conjugirt complex, dagegen $\varphi_\varkappa = \pi$ für einen innerhalb dieses Convergenzkreises befindlichen Werth $r_{\varkappa-1,\varkappa}$, also $v_{\varkappa 2}$ real, $v_{\varkappa 3}$, $v_{\varkappa 1}$ conjugirt complex. Ist nun $x = b$ ein realer nicht singulärer Werth, für welchen der Zweig $y^{(\lambda)}$ den realen Werth β annimmt, so sind in der, in der Umgebung von $x = b$ gültigen Reihenentwickelung

$$y^{(\lambda)} = \beta + \beta_1(x-b) + \beta_2(x-b)^2 + \cdots$$

alle Coefficienten real, und folglich wird $y^{(\lambda)}$ für alle Punkte der realen x-Axe, welche von b nicht durch einen der Verzweigungspunkte getrennt sind, reale Werthe annehmen. Demnach ist

$$\begin{aligned} \text{für } x = r_{\varkappa,\varkappa+1} \quad & v_{\varkappa 1} \text{ real}, \quad v_{\varkappa 2}, \quad v_{\varkappa 3} \text{ conjugirt complex}, \\ & v_{\varkappa+1,2} \text{ real}, \quad v_{\varkappa+1,1}, \quad v_{\varkappa+1,3} \text{ conjugirt complex}, \end{aligned}$$

$(\varkappa = 1, 2, \ldots n;$ für $\varkappa = n$ ist $\varkappa+1 = 1$ zu setzen).

Da zum Verzweigungspunkte $A_\varkappa$ der Cyklus $(y^{(0)} y^{(\varkappa)} y^{(\varkappa+1)})$ oder kürzer $(0, \varkappa, \varkappa+1)$ gehört, so müssen zwei der Zweige $v_{\varkappa 1}$, $v_{\varkappa 2}$, $v_{\varkappa 3}$ unter den $v_{\varkappa+1,1}$, $v_{\varkappa+1,2}$, $v_{\varkappa+1,3}$ enthalten sein. Sei, um die Ideen zu fixiren, $\varkappa = 1$, dann sind, da für $x = r_{1,2}$ die Zweige v_{11}, v_{22} reale Werthe liefern, die folgenden Combinationen möglich:

1) $v_{11} = v_{22}$,

2) $v_{12} = v_{23}$, $\quad v_{13} = v_{21}$,

3) $v_{12} = v_{21}$, $\quad v_{13} = v_{23}$.

Im Falle 1) ist entweder $v_{11} = y^{(2)}$ oder $v_{11} = y^{(0)}$; wäre $v_{11} = y^{(2)}$, so hätten wir $v_{12} = y^{(0)}$, $v_{13} = y^{(1)}$, $v_{22} = v_{11} = y^{(2)}$, $v_{21} = y^{(0)}$, $v_{23} = y^{(3)}$, und da $y^{(0)}$ unter den Zweigen v_{n1}, v_{n2}, v_{n3} vorkommen muss, $v_{n1} = v_{12} = y^{(0)}$, $v_{n2} = y^{(n)}$, $v_{n3} = y^{(1)}$, da aber $y^{(0)}$ auch unter den sich in A_3 verzweigenden Wurzeln enthalten ist, folgt allgemein:

$$\begin{array}{l|l} v_{2\nu,1} = y^{(0)} & v_{2\nu+1,1} = y^{(2\nu+2)} \\ v_{2\nu,2} = y^{(2\nu)} & v_{2\nu+1,2} = y^{(0)} \\ v_{2\nu,3} = y^{(2\nu+1)} & v_{2\nu+1,3} = y^{(2\nu+1)} \end{array} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

es müsste demnach n eine gerade Zahl sein, was, da n ganz beliebig gewählt werden konnte, einen Widerspruch involvirt. Derselbe Widerspruch tritt

auch für die Annahme $v_{11} = y^{(0)}$ zu Tage, es ist also der Fall 1) überhaupt bei Seite zu lassen.

Im Falle 2) führt die Annahme $v_{12} = y^{(2)}$ zu $v_{13} = y^{(0)}$, $v_{11} = y^{(1)}$, $v_{23} = v_{12} = y^{(2)}$, $v_{22} = y^{(3)}$, $v_{21} = y^{(0)}$, was nicht sein kann, da der zu A_2 gehörige Cyklus nicht (032), sondern (023) lautet; die Annahme $v_{12} = y^{(0)}$ hingegen ergäbe $v_{13} = y^{(2)}$, $v_{11} = y^{(1)}$, d. h. für A_1 den Cyklus (021), während derselbe doch (012) ist.

Im Falle 3) ist die Annahme $v_{12} = y^{(0)}$, aus welcher $v_{13} = y^{(2)}$, $v_{11} = y^{(1)}$, also für A_1 wieder der Cyklus (021) folgen würde, unzulässig; es bleibt also schliesslich als einzig mögliche Combination

$$v_{11} = y^{(1)}, \quad v_{12} = y^{(2)}, \quad v_{13} = y^{(0)},$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} v_{\varkappa 1} &= y^{(\varkappa)}, \quad v_{\varkappa 2} = y^{(\varkappa+1)}, \quad v_{\varkappa 3} = y^{(0)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n-1) \\ v_{n1} &= y^{(n)}, \quad v_{n2} = y^{(1)}, \quad v_{n3} = y^{(0)}, \end{aligned}$$

welche von jedem Widerspruche frei ist und folglich die thatsächlich bestehenden Verhältnisse wiedergiebt.

Hieraus folgt, dass die algebraische Gleichung (4.) so beschaffen ist, dass für einen Punkt $x = A_\varkappa$ ihre sämmtlichen Wurzeln real sind und dass einem Punkte $x = r_{\lambda,\lambda+1}$ complexe Werthe von $y^{(0)}$ und $y^{(\lambda+1)}$, dagegen reale Werthe aller übrigen Zweige entsprechen ($\lambda = 1, 2, \ldots n$; für $\lambda = n$, ist $\lambda+1 = 1$ zu nehmen).

Um nun auch über das Vorzeichen des Coefficienten von i in den einzelnen Zweigen der Function y orientirt zu werden, beachten wir, dass, wenn $x = u+vi$ gesetzt wird, der Coefficient von i in $y^{(\varkappa)}$, als stetige Function von u, v, sein Vorzeichen nur beim Durchgang durch die Null zu ändern vermag. Nun ist aber

$$x = -\frac{\Sigma C_\nu y^{n-\nu+1}}{\Sigma B_\nu y^{n-\nu+1}},$$

und da die B_ν, C_ν reale Grössen sind, kann $y^{(\varkappa)}$ nur für reale Werthe von x real sein; irgend zwei x-Punkte, deren Coefficienten von i dasselbe Vorzeichen haben, können durch einen continuirlichen Zug verbunden werden, der die reale Axe nicht durchschneidet; folglich ändert der Coefficient von i in $y^{(\varkappa)}$ sein Vorzeichen nicht für alle x, deren Coefficient von i dasselbe Vorzeichen besitzt. Setzen wir, wenn $c = a+bi$ eine complexe Grösse ist:

$$a = \Re(c), \quad b = J(c),$$

und, nach dem Vorgange von Herrn ***Kronecker***, für eine reale, von Null verschiedene Grösse r

$$\operatorname{sgn} r = \frac{r}{\operatorname{mod} r} = \pm 1, \quad \operatorname{sgn} 0 = 0.$$

Nehmen wir für die Folge an, dass die zur Bestimmung von y noch disponiblen drei reellen Constanten so gewählt seien, dass für ein bestimmtes x, dessen $\operatorname{sgn} J(x) = 1$, auch das zugehörige $\operatorname{sgn} J(y^{(0)}) = 1$ sei, dann ist für jedes x der oberhalb der realen Axe gelegenen Halbebene (kurz, oberen Halbebene) $\operatorname{sgn} J(y^{(0)}) = 1$, und diese Forderung zwingt die drei reellen willkürlichen Constanten nur einer Ungleichung Genüge zu leisten. Gehen wir nun von einem Punkte der oberen Halbebene des Blattes 0, d. h. mit dem entsprechenden Werthe von $y^{(0)}$ in continuirlichem Zuge durch einen Punkt $r_{\varkappa-1,\varkappa}$ nach der unteren Halbebene, so geht $J(y^{(0)})$ stetig über in $J(y^{(\varkappa)})$, ohne die Null zu passiren; folglich ist für $\operatorname{sgn} J(x) = -1$, $\operatorname{sgn} J(y^{(\varkappa)}) = 1$, $\varkappa = 1, 2, \ldots n$. Gehen wir wieder in continuirlichem Zuge etwa durch einen Punkt $r_{\varkappa,\varkappa+1}$ in die obere x-Halbebene zurück, so ist für den Passirungspunkt $r_{\varkappa,\varkappa+1}$ der Werth von $y^{(\varkappa)}$ real, d. h. $J(y^{(\varkappa)}) = 0$, und $J(y^{(\varkappa)})$ setzt sich stetig fort in $J(y^{(\varkappa)})$. Sollte nun beim Durchgange durch $r_{\varkappa,\varkappa+1}$, $J(y^{(\varkappa)})$ sein Vorzeichen nicht ändern, so müsste die stetige Function $v^{(\varkappa)} = J(y^{(\varkappa)})$ von u und v in $r_{\varkappa,\varkappa+1}$ ein Maximum oder Minimum haben, d. h. es müsste für $u = r_{\varkappa,\varkappa+1}$, $v = 0$ sein:

$$\frac{\partial v^{(\varkappa)}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial v^{(\varkappa)}}{\partial v} = 0;$$

aber wenn $u^{(\varkappa)} = \Re(y^{(\varkappa)})$ gesetzt wird, ist:

$$\frac{\partial u^{(\varkappa)}}{\partial u} = \frac{\partial v^{(\varkappa)}}{\partial v}, \quad \frac{\partial v^{(\varkappa)}}{\partial u} = -\frac{\partial u^{(\varkappa)}}{\partial v},$$

es würde also für $x = r_{\varkappa,\varkappa+1}$ auch $\frac{dy^{(\varkappa)}}{dx} = \frac{\partial u^{(\varkappa)}}{\partial u} + i\frac{\partial v^{(\varkappa)}}{\partial u}$ verschwinden, was nicht möglich ist; also ändert $J(y^{(\varkappa)})$ sein Vorzeichen, d. h. für $\operatorname{sgn} J(x) = 1$ haben wir $\operatorname{sgn} J(y^{(\varkappa)}) = -1$, $\varkappa = 1, 2, \ldots n$. Ebenso schliessen wir, dass für $\operatorname{sgn} J(x) = -1$ sei $\operatorname{sgn} J(y^{(0)}) = -1$, während sich für einen Punkt $x = r_{\varkappa-1,\varkappa}$, $\operatorname{sgn} J(y^{(0)}) = 1$, $\operatorname{sgn} J(y^{(\varkappa)}) = -1$ ($\varkappa = 2, 3, \ldots n$) und für $x = r_{n,1}$, $\operatorname{sgn} J(y^{(0)}) = 1$, $\operatorname{sgn} J(y^{(1)}) = -1$ ergiebt.

Um von der Abbildung der ***Riemann***schen Fläche T auf die y-Ebene eine klare Vorstellung zu erlangen, beachten wir, dass die den einzelnen Blättern entsprechenden y-Gebiete durch die der realen x-Axe entsprechenden y-Curvenstücke begrenzt und von einander gesondert werden. Was die Gestalt der der realen x-Axe entsprechenden Curve, die wir kurz als

Realitätscurve bezeichnen wollen, anlangt, können wir Folgendes feststellen. Sei $y = u_1 + v_1 i$,

$$\Sigma B_\nu y^{n-\nu+i} = \psi(y) = \psi_1(u_1, v_1) + i\psi_2(u_1, v_1),$$
$$\Sigma C_\nu y^{n-\nu+i} = -\varphi(y) = -\varphi_1(u_1, v_1) - i\varphi_2(u_1, v_1),$$

also

$$x = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\psi_1 + i\psi_2},$$

dann ist die Gleichung der Realitätscurve:

$$(6.) \qquad F(u_1, v_1) = \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 = 0.$$

Für eine singuläre Stelle dieser Curve müssen nebst der Gleichung (6.) auch noch die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_1} = 0$$

befriedigt werden; aber mit Rücksicht auf die partiellen Differentialgleichungen, denen die φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 Genüge leisten, ergiebt sich

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\psi_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}\varphi_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial u_1}\varphi_1 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}\psi_1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\psi_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}\varphi_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial u_1}\varphi_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}\psi_2$$

und daher

$$\frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial y} = \frac{\psi_1 \frac{\partial F}{\partial v} - \psi_2 \frac{\partial F}{\partial u_1} - 2F(u_1, v_1)\frac{\partial \psi_2}{\partial u_1} + i\left\{\psi_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + \psi_2 \frac{\partial F}{\partial v_1} - 2F(u_1, v_1)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}\right\}}{\psi_1^2 + \psi_2^2};$$

singuläre Punkte der Realitätscurve können also nur solche Werthepaare u_1, v_1 sein, welche Verzweigungsstellen der *Riemann*schen Fläche T entsprechen. Umgekehrt sind die sämmtlichen den Punkten $x = A_1, A_2, \ldots A_n$ entsprechenden y-Werthe auf der Realitätscurve gelegen; folglich ist für eine Verzweigungsstelle von T, wo also

$$\Phi(y, x) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

die Gleichung (6.) befriedigt und daher für den entsprechenden Curvenpunkt:

$$\psi_1 \frac{\partial F}{\partial v_1} - \psi_2 \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0,$$
$$\psi_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + \psi_2 \frac{\partial F}{\partial v_1} = 0,$$

sofern also nicht einer der Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ im Unendlichen gelegen ist, nothwendigerweise

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)^2 = 0$$

und demnach

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0,$$

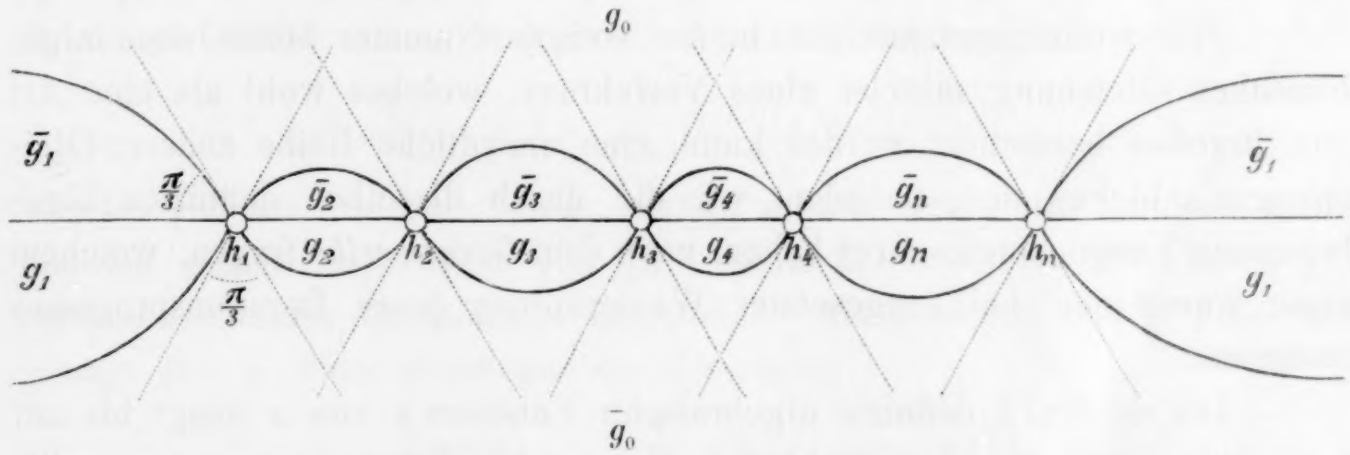
d. h. es entspricht jeder Verzweigungsstelle $(A_\varkappa, h_\varkappa)$ von T auch wirklich ein singulärer Punkt der Realitätscurve. Nun ist aber für $x = A_\varkappa$, $y = h_\varkappa$ auch noch

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

woraus ferner folgt, dass in dem entsprechenden Punkte der Realitätscurve auch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v_1^2} = 0,$$

d. h. die Curve besitzt daselbst einen dreifachen Punkt. Nun muss aber $F(u_1, v_1)$ den Factor v_1 enthalten; nach dessen Absonderung resultirt also entsprechend jeder Verzweigungsstelle von T ein Doppelpunkt mit zwei differenten Tangenten, welche sowohl mit einander als mit der realen y-Axe den Winkel $\frac{\pi}{3}$ einschliessen, da sich die entsprechenden x-Curvenstücke in den Punkten $A_\varkappa$ unter dem Winkel π schneiden und die sich in $A_\varkappa$ verzweigenden y-Zweige in der Umgebung von $x = A_\varkappa$ nach Potenzen von $(x - A_\varkappa)^{\frac{1}{3}}$ entwickelbar sind. Wir bezeichnen im Folgenden mit $g_\varkappa$ bezw. $\bar{g}_\varkappa$ jenes Gebiet der y-Ebene, welches dem oberhalb bezw. unterhalb der realen Axe gelegenen Theile des Blattes $\varkappa$ (für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots n$) entspricht. Die für den Fall $n = 5$ eintretenden Abbildungsverhältnisse finden sich dann in der beistehenden Figur versinnlicht.



In Bezug auf den *Affect* der Gleichung (4.) wäre noch zu bemerken, dass die Monodromiegruppe derselben jedenfalls die n dreigliedrigen cyklischen Substitutionen

$$s_1 = (0,\ 1,\ 2), \quad s_2 = (0,\ 2,\ 3), \quad \ldots \quad s_{n-1} = (0,\ n-1,\ n), \quad s_n = (0,\ n,\ 1),$$

wo

$$s_n = s_1^{-1} s_2^{-1} \ldots s_{n-1}^{-1} = (s_{n-1} . s_{n-2} \ldots s_1)^{-1}$$

ist, und sämmtliche Producte von Potenzen dieser Substitutionen enthält. Aus den $(n-1)$ Substitutionen $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ lässt sich aber jeder beliebige dreigliedrige Cyklus von $(n+1)$ Elementen componiren *); denn sind λ, μ, ν irgend drei verschiedene der Zahlen $0, 1, \ldots n$, so dass $\lambda > \mu$, $\lambda > \nu$, so hat man

$$(\lambda, \mu, \nu) = (0, \nu, \lambda)(0, \lambda, \mu)$$

und

$$(0, \lambda, \mu) = s_\mu^2 \; s_{\mu+1}^2 \ldots s_{\lambda-2}^2 s_{\lambda-1}^2,$$
$$(0, \nu, \lambda) = s_{\lambda-1} s_{\lambda-2} \ldots s_{\nu+1} s_\nu;$$

die Monodromiegruppe der Gleichung (4.) enthält daher jeden dreigliedrigen Cyklus und ist folglich nach einem bekannten Satze von *Cauchy* **) entweder die symmetrische oder die alternirende Gruppe. Die erstere kann es nicht sein, da eine einfache Transposition (λ, μ) nicht darstellbar ist als Product von Potenzen dreigliedriger cyklischer Substitutionen; folglich bestimmt im Rationalitätsbereiche x die Gattung der *alternirenden* Functionen der Wurzeln den Affect der Gleichung (4.), und in der That sahen wir, dass die Discriminante, also das Quadrat einer alternirenden Function der Wurzeln, gleich dem Quadrate einer rationalen Function von x ist.

II.

Wir wollen nun aus der in der vorigen Nummer behandelten algebraischen Gleichung mittelst eines Verfahrens, welches wohl als eine Art von *Iteration* bezeichnet werden kann, eine unendliche Reihe anderer Gleichungen ableiten und, nachdem wir die durch dieselben definirten algebraischen Functionen discutirt haben, nach dem *Grenzwerthe* fragen, welchem diese Functionen bei fortgesetzter Wiederholung jenes Iterationsprocesses zustreben.

Die in Nr. I definirte algebraische Function y von x hängt bis auf drei reelle, durch eine Ungleichheitsbedingung beschränkte, aber sonst willkürliche Constanten einzig und allein ab von der Zahl n und den n realen

*) Vergl. *Kronecker:* Monatsberichte der Berliner Akademie 1879 S. 210.

**) Vergl. z. B. *Serret:* Lehrbuch der höheren Algebra übersetzt von *Wertheim* (Leipzig 1878) Bd. II, S. 240.

Grössen $A_1, A_2, \ldots A_n$, wir können daher füglich setzen:

$$y = \overset{n+1}{S}(x; A_1, A_2, \ldots A_n).$$

Bilden wir nun den folgenden Algorithmus

$$(1.) \quad y_{\lambda+1} = \overset{n_{\lambda+1}+1}{S}(y_\lambda; a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots a_{n_{\lambda+1}}^{(\lambda)}),$$

wo λ die Reihe der positiven ganzen Zahlen, von 0 angefangen, durchläuft, y_0 eine complexe Variable, n_1 eine ganze Zahl >2, $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ beliebig gegebene von einander verschiedene reale Grössen mit der Bedingung $a_{\varkappa+1}^{(0)} > a_\varkappa^{(0)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n_1-1)$ bedeuten, wo ferner $n_{\lambda+1} = n_\lambda(n_\lambda-1)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ und endlich $a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots a_{n_{\lambda+1}}^{(\lambda)}$ die Reihe der nach der Grösse geordneten realen Werthe ist, welche y_λ in den Punkten $y_{\lambda-1} = a_1^{(\lambda-1)}, a_2^{(\lambda-1)}, \ldots a_{n_\lambda}^{(\lambda-1)}$ annimmt.

Wir bezeichnen analog wie in Nr. I mit $\bar{y}_{\lambda+1}^{(0)}$ jenen Zweig der Function $y_{\lambda+1}$ von y_λ, welcher in jedem der Punkte $a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots a_{n_{\lambda+1}}^{(\lambda)}$ eine Verzweigung erleidet, mit $\bar{y}_{\lambda+1}^{(\varkappa)}$ denjenigen, in welchen $\bar{y}_{\lambda+1}^{(0)}$ übergeht, wenn y einen einfachen Umgang um $a_\varkappa^{(\lambda)}$ vollzieht; dann ist

$$\text{für} \quad \operatorname{sgn} J(y_\lambda) = 1, \quad \operatorname{sgn} J(\bar{y}_{\lambda+1}^{(0)}) = 1, \quad \operatorname{sgn} J(\bar{y}_{\lambda+1}^{(\varkappa)}) = -1,$$

$$\text{für} \quad \operatorname{sgn} J(y_\lambda) = -1, \quad \operatorname{sgn} J(\bar{y}_{\lambda+1}^{(0)}) = -1, \quad \operatorname{sgn} J(\bar{y}_{\lambda+1}^{(\varkappa)}) = 1$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots n_{\lambda+1})$$

und für einen zwischen $a_\varkappa^{(\lambda)}$ und $a_{\varkappa+1}^{(\lambda)}$ gelegenen realen Werth von y_λ, $\operatorname{sgn} J(\bar{y}_{\lambda+1}^{(0)}) = 1$, $\operatorname{sgn} J(\bar{y}_{\lambda+1}^{(\varkappa)}) = -1$, während alle übrigen Zweige von $y_{\lambda+1}$ für diesen Werth von y_λ real sind. Aus der Gleichung

$$(\bar{2}.) \quad \bar{F}_{\lambda+1}(y_{\lambda+1}, y_\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n_{\lambda+1}+1} (\bar{b}_\nu^{(\lambda+1)} y_\lambda + \bar{c}_\nu^{(\lambda+1)}) y_{\lambda+1}^{n_{\lambda+1}-\nu+1} = 0,$$

welcher $y_{\lambda+1}$ als Function von y_λ genügt, ergiebt sich y_λ als *rationale Function mit realen Coefficienten* von $y_{\lambda+1}$; *es ist demzufolge auch* y_0 *durch* $y_{\lambda+1}$ *rational mit realen Coefficienten darstellbar.* Als Function von y_0 aufgefasst genügt also y_λ einer algebraischen Gleichung

$$(2.) \quad F_\lambda(y_\lambda, y_0) = \sum_{\mu=0}^{\nu_\lambda} (b_\mu^{(\lambda)} y_0 + c_\mu^{(\lambda)}) y_\lambda^{\nu_\lambda-\mu+1} = 0$$

vom Grade $\nu_\lambda = (n_\lambda+1)\nu_{\lambda-1} = \prod_{\mu=1}^{\lambda}(n_\mu+1)$, in welcher die $b_\mu^{(\lambda)}$, $c_\mu^{(\lambda)}$ reale Grössen sind. Die Verzweigungspunkte dieser Gleichung sind $y_0 = a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$, und zwar fallen in jedem derselben $2\delta_\lambda$ einfache Verzweigungs-

punkte zusammen, wo

$$\delta_\lambda = \sum_{i+1}^{\lambda} \prod_{\varkappa=1}^{i}(n_\varkappa^2-1)+1 = \frac{\nu_\lambda-1}{n_1}.$$

Die Function y_λ von y_0 ist durch den Algorithmus (1.) bis auf drei reale, durch eine Ungleichheitsbedingung beschränkte, aber sonst beliebig wählbare Constanten bestimmt, obwohl scheinbar bei jedesmaliger Anwendung der Iteration drei neue reale Constanten hinzutreten. Man erkennt nämlich leicht, dass diese neu hinzutretenden Constanten sich mit den früheren derart vereinigen, dass die Anzahl der willkürlich bleibenden Grössen nicht vermehrt wird. Zu diesem Ende verfüge man über die ersten drei Constanten etwa so, dass drei beliebigen Werthen von y_0 drei willkürliche Werthe von y_1, über die nächsten so, dass drei willkürlichen Werthen von y_1 drei ebenfalls willkürliche Werthe von y_2 entsprechen; dann heisst das offenbar nichts anderes, als drei willkürlichen Werthen von y_0 können drei willkürliche Werthe von y_2 beliebig zugeordnet werden, wobei jedoch die erforderlichen Realitäts- bezw. Ungleicheitsbedingungen stets zu beachten sind.

Die Discriminante $\Delta_\lambda(y_0)$ von Gleichung (2.) ist eine ganze homogene Function $2(\nu_\lambda-1)$-ten Grades der Coefficienten, also eine ganze Function eben desselben Grades von y_0 und folglich

$$(3.) \qquad \Delta_\lambda(y_0) = c_\lambda \prod_{\mu=1}^{n_1}(y_0-a_\mu^{(0)})^{2\delta_\lambda},$$

wo c_λ eine von y_0 unabhängige Grösse bedeutet.

Diese Form der Discriminante genügt allein schon zur Bestimmung der Gleichung (2.), beziehungsweise der Function y_λ; denn betrachten wir die $2(\nu_\lambda+1)$ Grössen $b_\mu^{(\lambda)}$, $c_\mu^{(\lambda)}$ als Unbekannte, so sind die Coefficienten der nach Potenzen von y_0 geordneten Discriminante $\Delta_\lambda(y_0)$ homogene Functionen dieser Unbekannten, und wenn wir zu beiden Seiten der Gleichung (3.) die Coefficienten der mit demselben Exponenten behafteten y_0-Potenzen vergleichen, so erhalten wir $2\nu_\lambda$ Gleichungen für unsere $2\nu_\lambda+2$ Unbekannten $b_\mu^{(\lambda)}$, $c_\mu^{(\lambda)}$ und den ebenfalls unbekannten constanten Factor c_λ; diese Grössen bestimmen sich also als Functionen der $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ... $a_{n_1}^{(0)}$ und dreier unbestimmt bleibenden Parameter, und wir wissen, dass der Eliminationsprocess stets ausführbar sein muss, da die Existenz der Function y_λ von anderer Seite her erwiesen ist. Ist $\bar{y}_\lambda$ eine solche Function, so ist jede andere als linearer Ausdruck mit constanten Coefficienten von $\bar{y}_\lambda$ darstellbar, wodurch auch die drei willkürlich bleibenden Parameter in Evidenz gesetzt sind.

Dass y_λ in der That nur bis auf drei willkürliche Constanten bestimmt ist, kann überdies auch durch *Riemann*sche Formeln bestätigt werden. Die Anzahl der in einer algebraischen Function enthaltenen willkürlichen Constanten ist nämlich *)

$$\varrho = 2m-p+1,$$

während **)

$$w-2n = 2(p-1);$$

in unserem Falle ist

$$m = 1, \quad w = 2n_1\delta_\lambda, \quad n = \nu_\lambda,$$

also $p = 0$, $\varrho = 3$.

Ueber diese drei Constanten kann so verfügt werden, dass die Grössen $b_\mu^{(\lambda)}$, $c_\mu^{(\lambda)}$ ***reale Werthe*** annehmen und dass für einen bestimmten in der oberen Halbebene gelegenen Punkt y_0 irgend ein bestimmter Zweig von y_λ ebenfalls einen positiven Coefficienten von i erhält; es bleiben alsdann noch drei reale Constanten, die einer Ungleichheitsbedingung zu genügen haben, zu unserer Verfügung. Bei geeigneter Wahl jenes Zweiges ist die so definirte Function y_λ mit der durch den Algorithmus (1.) bestimmten völlig identisch, ***wir haben also auf diese Weise für das durch Iteration erzeugte y_λ eine indepedente Definition gewonnen.***

Unter den Wurzeln der Gleichung (2.) soll diejenige als *Hauptzweig* $y_\lambda^{(0)}$ bezeichnet werden, welche aus $\bar{y}_\lambda^{(0)}$ entsteht, wenn wir in Gleichung (2) $y_{\lambda-1}$ durch $y_{\lambda-1}^{(0)}$, d. h. im Algorithmus (1.) jedes y durch das entsprechende $\bar{y}^{(0)}$ ersetzen, und es seien $h_1^{(\lambda)}, h_2^{(\lambda)}, \ldots h_{n_1}^{(\lambda)}$ die Werthe von $y_\lambda^{(0)}$ in den Punkten $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$; diese Werthe sind, wie überhaupt sämmtliche den Verzweigungspunkten entsprechenden Werthe von y_λ, reale Grössen, und in der Umgebung von $y_0 = a_\varkappa^{(0)}$ gilt die Entwickelung

$$y_\lambda^{(0)} = h_\varkappa^{(0)} + \alpha_1(y_0 - a_\varkappa^{(0)})^{\frac{1}{3^\lambda}} + \alpha_2(y_0 - a_\varkappa^{(0)})^{\frac{2}{3^\lambda}} + \cdots,$$

wo die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ real und α_1 von Null verschieden ist.

Sei T_λ die ν_λ-blättrige einfach zusammenhängende *Riemann*sche Fläche, welche, über die y_0 Ebene ausgebreitet, die Verzweigung von y_λ versinnlicht; wenn sich dann ein Blatt von T_λ um den Punkt $a_\varkappa^{(0)}$ windet, so muss das Gleiche auch in einem der benachbarten Punkte $a_{\varkappa-1}^{(0)}$ oder $a_{\varkappa+1}^{(0)}$ geschehen;

---

*) *Riemann:* Ges. Werke S. 101, 113.

**) ibid. S. 107.

die Verzweigungsschnitte verlaufen deshalb zwischen je zwei aufeinanderfolgenden der Punkte $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ... $a_{n_1}^{(0)}$, und zwar wollen wir uns dieselben stets längs der realen Axe gelegt denken. Unter den Blättern von T_λ finden sich alsdann solche, für welche die reale Axe in ihrer ganzen Länge Verzweigungsschnitt ist, und die zu diesen Blättern gehörigen Zweige von y_λ nehmen für jeden realen, nicht singulären Werth von y_0 complexe Werthe an; dies gilt für jeden Zweig, der in der Umgebung eines jeden der Punkte $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ... $a_{n_1}^{(0)}$ mehrdeutig ist, insbesondere (und zwar für alle Werthe $\lambda = 1, 2, \ldots$) für den Hauptzweig $y_\lambda^{(0)}$, beziehungsweise für das demselben entsprechende Blatt von T_λ, welchem letzteren wir im Folgenden die Marke 0 beilegen wollen.

Allgemein ergiebt ein Zweig von y_λ für die Punkte eines Theiles $(a_\varkappa^{(0)} a_{\varkappa+1}^{(0)})$ der realen y_0-Axe dann und nur dann complexe Werthe, wenn dieser Theil in dem den betreffenden Zweig repräsentirenden Blatte von T_λ als Verzweigungsschnitt fungirt.

Bilden wir die Fläche T_λ auf die y_λ-Ebene ab, so entsprechen den oberhalb, beziehungsweise unterhalb der realen y_0-Axe gelegenen Hälften der einzelnen Blätter einfach zusammenhängende Gebiete $g^{(\lambda)}$, beziehungsweise $\bar{g}^{(\lambda)}$, welche durch Theile der *Realitätscurve* begrenzt und von einander geschieden werden; auch hier hat die Realitätscurve, wie leicht einzusehen, nur in den den Verzweigungsstellen der *Riemann*schen Fläche T_λ entsprechenden Punkten, aber auch in jedem derselben eine Singularität. Die Gebiete $g^{(\lambda)}$ und $\bar{g}^{(\lambda)}$, welche Abbildungen der oberen, beziehungsweise unteren Hälfte desselben Blattes sind, liegen symmetrisch gegen die reale Axe und stehen mit einander nur in den Eckpunkten im Zusammenhange, wenn in dem betreffenden Blatte die ganze reale Axe Verzweigungsschnitt ist; für Blätter, wo dies nicht stattfindet, haben die entsprechenden $g^{(\lambda)}$ und $\bar{g}^{(\lambda)}$ ganze Theile der realen Axe gemein. Das Gebiet $g_0^{(\lambda)}$, welches die Abbildung der oberen Hälfte des Blattes 0 von T_λ liefert, ist ein in der y_λ-Halbebene gelegenes Polygon, dessen Ecken die Punkte $h_1^{(\lambda)}$, $h_2^{(\lambda)}$, ... $h_{n_1}^{(\lambda)}$ und dessen Seiten krumme Linien sind, die sich in den Eckpunkten unter dem Winkel $\frac{\pi}{3^\lambda}$ schneiden.

Gehen wir von einem Punkte der oberen Hälfte des Blattes 0 von T_λ aus und überschreiten den Verzweigungsschnitt $(a_\varkappa^{(0)} a_{\varkappa+1}^{(0)})$, so gelangen wir in ein Blatt, welches wir durch die Marke $(0, \lambda+1)$ bezeichnen wollen;

der zugehörige Zweig der Function y_λ heisse $y_\lambda^{(0,\varkappa+1)}$, die entsprechenden Gebiete der y_λ-Ebene $g_{(0,\varkappa+1)}^{(\lambda)}$ beziehungsweise $\bar{g}_{(0,\varkappa+1)}^{(\lambda)}$, und wir erkennen, dass $\bar{g}_{(0,\varkappa+1)}^{(\lambda)}$ in der oberen y_λ-Halbebene gelegen ist und mit $g_0^{(\lambda)}$ längs der Seite $(h_\varkappa^{(\lambda)} h_{\varkappa+1}^{(\lambda)})$ zusammenhängt. Gehen wir weiter und überschreiten die reale Axe in einem Punkte, der einem Verzweigungsschnitte $(a_\iota^{(0)} a_{\iota+1}^{(0)})$ des Blattes $(0, \varkappa+1)$ angehört, so werden wir in ein Blatt $(0, \varkappa+1, \iota+1)$ geführt, und wenn wir auf diese Weise fortfahren, werden wir nach und nach alle Blätter von T_λ passirt und mit Marken versehen haben. Der zum Blatte $(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)$ [wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ der Reihe der Zahlen 1, 2, $\ldots$ n_1 entnommen sind] gehörige Zweig von y_λ sowie die jenes Blatt abbildenden Gebiete $g^{(\lambda)}$ und $\bar{g}^{(\lambda)}$ erhalten die Marke des Blattes als oberen, beziehungsweise unteren Index, und wir können nun sagen, dass jene $g^{(\lambda)}$, deren Index eine ungerade Anzahl, und jene $\bar{g}^{(\lambda)}$, deren Index eine gerade Anzahl von Zahlen enthält, in der oberen, die anderen $g^{(\lambda)}$ und $\bar{g}^{(\lambda)}$ dagegen in der unteren y_0-Halbebene gelegen sind. Auf diese Weise haben wir jede der beiden durch die reale Axe geschiedenen y_λ-Halbebenen bedeckt mit einem *Netze von ν_λ Polygonen*, jedes Polygon ist das Abbild entweder der oberen oder der unteren y_0-Halbebene, die Eckpunkte dieser Polygone liegen auf der realen y_λ-Axe und entsprechen den Verzweigungspunkten $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$, auf der Begrenzung derselben ist y_0 real.

Um nun in möglichst übersichtlicher Weise die Frage erledigen zu können, ob sich die Functionen y_λ mit wachsendem λ einer *Grenze* nähern, legen wir den folgenden Ueberlegungen eine lineare Function von y_λ, nämlich:

$$\eta_\lambda = \frac{y_\lambda - r_\lambda}{y_\lambda - r'_\lambda}(r_\lambda, k_\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu Grunde, wo r_0, k_0 irgend welche bestimmte complexe Grössen mit positivem Coefficienten von i, ferner r_λ, k_λ die zu $y_0 = r_0$, bezw. $y_0 = k_0$ gehörigen Werthe von $y_\lambda^{(0)}$ und (r_λ, k_λ) die mit positivem Vorzeichen genommene Quadratwurzel aus dem Ausdrucke

$$\frac{r'_\lambda - k_\lambda . r'_\lambda - k'_\lambda}{r_\lambda - k_\lambda . r_\lambda - k'_\lambda}$$

bedeuten. Es ist dann η_λ, ebensowohl wie y_λ, eine eindeutige Function des Ortes in der *Riemann*schen Fläche T_λ, die nur an einer Stelle dieser Fläche von erster Ordnung unendlich wird, und die Theorie der Function η_λ ist daher durch die für y_λ gefundenen Resultate vollständig gegeben. Für

reale Werthe von y_λ ist $\mathrm{mod}\eta_\lambda = 1$, für $\mathrm{sgn}J(y_\lambda) = 1$, $\mathrm{mod}\eta_\lambda < 1$, für $\mathrm{sgn}J(y_\lambda) = -1$, $\mathrm{mod}\eta_\lambda > 1$ und für $y_\lambda = k_\lambda$ der zugehörige Werth $\eta_\lambda = \varkappa_\lambda$ real; es entspricht also der realen y_λ-Axe die Peripherie des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt der η_λ-Ebene als Centrum beschriebenen Kreises (der im Folgenden kurz als ***Einheitskreis*** bezeichnet werden soll), der oberen y_λ-Halbebene das Innere, der unteren y_λ-Halbebene das Aeussere dieses Kreises, dem conjugirten Werthe y'_λ von y_λ entspricht der ***harmonische Pol*** $'\eta_\lambda$ von η_λ in Bezug auf den Einheitskreis, und es ist bekanntlich

$$'\eta_\lambda = \frac{1}{\eta'_\lambda}.$$

Wenn a eine complexe Grösse bedeutet, wollen wir die Grösse $'a = \frac{1}{a'}$ den zu a ***harmonischen*** Werth nennen und diese Beziehung zwischen den beiden Grössen a, $'a$ durch das Zeichen

$$a \mp {}'a$$

ausdrücken. Die für y_λ eingeführten Bezeichnungen übertragen wir auf η_λ, indem wir überall setzen: η an Stelle von y, α an Stelle von a, ε an Stelle von h und γ an Stelle von g; es ist dann jedes Gebiet $\gamma^{(\lambda)}$ der η_λ-Ebene die ***Polarfigur*** des mit demselben unteren Index versehenen $\bar{\gamma}^{(\lambda)}$ in Bezug auf den Einheitskreis.

Wir haben nun für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, wenn $\mathrm{mod}\eta_{\lambda-1} < 1$, $\mathrm{mod}\bar{\eta}_\lambda^{(0)} < 1$, $\mathrm{mod}\bar{\eta}_\lambda^{(\varkappa)} > 1$; wenn $\mathrm{mod}\eta_{\lambda-1} = 1$, aber $\eta_{\lambda-1}$ nicht gleich einem der singulären Werthe $\alpha_\varrho^{(\lambda-1)} (\varrho = 1, 2, \ldots n_\lambda)$, $\mathrm{mod}\bar{\eta}_\lambda^{(0)} < 1$, $\mathrm{mod}\bar{\eta}_\lambda^{(\varkappa)} \geqq 1$; endlich wenn $\mathrm{mod}\eta_{\lambda-1} > 1$, $\mathrm{mod}\bar{\eta}_\lambda^{(0)} > 1$, $\mathrm{mod}\bar{\eta}_\lambda^{(\varkappa)} < 1$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n_\lambda)$. Ferner ist für $\eta_0 = 0$ auch $\eta_\lambda^{(0)} = 0$, für $\eta_0 = \infty$, $\eta_\lambda^{(0)} = \infty$, und dem realen Werthe $\eta_0 = \varkappa_0$ entspricht der gleichfalls reale Werth $\eta_\lambda = \varkappa_\lambda$.

Sei

$$\bar{\Phi}_\lambda(\eta_\lambda, \eta_{\lambda-1}) = \sum_{\mu=0}^{n_\lambda+1} (\bar{\beta}_\mu^{(\lambda)} \eta_{\lambda-1} + \bar{\zeta}_\mu^{(\lambda)}) \eta_\lambda^{n_\lambda-\mu+1} = 0$$

die η_λ als Function von $\eta_{\lambda-1}$ definirende algebraische Gleichung, dann ist $\bar{\beta}_0^{(\lambda)} = 0$, und wir können $\bar{\zeta}_0^{(\lambda)} = 1$ voraussetzen; aus dem Umstande, dass für $\mathrm{mod}\eta_\lambda = 1$ auch $\mathrm{mod}\eta_{\lambda-1} = 1$ ist, folgt dann leicht

$$\bar{\beta}_{n_\lambda+1-\mu}^{(\lambda)} = \bar{\zeta}_\mu^{(\lambda)\prime} \bar{\beta}_{n_\lambda+1}^{(\lambda)},$$

$$\bar{\zeta}_{n_\lambda+1-\mu}^{(\lambda)} = \bar{\beta}_\mu^{(\lambda)\prime} \bar{\beta}_{n_\lambda+1}^{(\lambda)},$$

also

$$\operatorname{mod}\bar{\beta}^{(\lambda)}_{n_\lambda+1} = 1,$$
$$\bar{\zeta}^{(\lambda)}_{n_\lambda+1} = 0.$$

Nun ist aber:

$$(-1)^{n_\lambda+1}\bar{\beta}^{(\lambda)}_{n_\lambda+1}\eta_{\lambda-1} = \bar{\eta}^{(0)}_\lambda\bar{\eta}^{(1)}_\lambda\ldots\bar{\eta}^{(n_\lambda)}_\lambda,$$

folglich für $\operatorname{mod}\eta_{\lambda-1}<1$, $\operatorname{mod}\bar{\eta}^{(0)}_\lambda<\operatorname{mod}\eta_{\lambda-1}$, für einen von den Punkten $\alpha^{(\lambda-1)}_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\ldots n_\lambda)$ verschiedenen Punkt der Peripherie des Einheitskreises der $\eta_{\lambda-1}$-Ebene ebenfalls $\operatorname{mod}\bar{\eta}^{(0)}_\lambda<\operatorname{mod}\eta_{\lambda-1}$, dagegen für $\operatorname{mod}\eta_{\lambda-1}>1$, $\operatorname{mod}\bar{\eta}^{(0)}_\lambda>\operatorname{mod}\eta_{\lambda-1}$. Wenn also $\operatorname{sgn}J(y_0)=1$ oder $J(y_0)=0$, aber y_0 keiner der Werthe $a^{(0)}_1$, $a^{(0)}_2$, $\ldots$ $a^{(0)}_{n_1}$, so ist:

$$1>\operatorname{mod}\eta_0>\operatorname{mod}\eta^{(0)}_1>\operatorname{mod}\eta^{(0)}_2>\cdots;$$

für einen der Werthe $y_0=a^{(0)}_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\ldots n_1)$:

$$1=\operatorname{mod}\eta_0=\operatorname{mod}\eta^{(0)}_1=\operatorname{mod}\eta^{(0)}_2=\cdots;$$

endlich wenn $\operatorname{sgn}J(y_0)=-1$:

$$1<\operatorname{mod}\eta_0<\operatorname{mod}\eta^{(0)}_1<\operatorname{mod}\eta^{(0)}_2<\cdots.$$

Beschränken wir also η_0 auf das Innere des Einheitskreises, so sind sämmtliche Glieder der Summe

$$(4.)\qquad (\operatorname{mod}\eta_0-\operatorname{mod}\eta^{(0)}_1)+(\operatorname{mod}\eta^{(0)}_1-\operatorname{mod}\eta^{(0)}_2)+\cdots \text{ ad infinitum}$$

für von Null verschiedene Werthe von η_0 wesentlich positiv, für $\eta_0=0$ aber gleich Null, und die Summe einer beliebig grossen Anzahl solcher Glieder ist stets kleiner als $\operatorname{mod}\eta_0$. Es hat folglich der Ausdruck (4.) für jedes η_0, dessen absoluter Betrag kleiner ist als 1, einen endlichen Werth S (für $\eta_0=0$ ist $S=0$), und es kann daher für ein beliebig klein vorgeschriebenes positives δ eine positive ganze Zahl μ allemale so angegeben werden, dass für $\lambda>\mu$

$$\sum_{i=0}^{\tau}(\operatorname{mod}\eta^{(0)}_{\lambda+i}-\operatorname{mod}\eta^{(0)}_{\lambda+i+1}) = \operatorname{mod}\eta^{(0)}_\lambda-\operatorname{mod}\eta^{(0)}_{\lambda+\tau}<\delta,$$

wo τ irgend eine noch so grosse positive ganze Zahl bedeutet. Mit andern Worten, es ist:

$$(5.)\qquad \lim_{\lambda=\infty}(\operatorname{mod}\eta^{(0)}_\lambda-\operatorname{mod}\eta^{(0)}_{\lambda+\tau}) = 0$$

und

$$\lim_{\lambda=\infty}\operatorname{mod}\eta^{(0)}_\lambda=\lim_{\lambda=\infty}\operatorname{mod}\eta^{(0)}_{\lambda+\tau}=\operatorname{mod}\eta_0-S.$$

Bedeutet ϱ_0 eine von Null verschiedene positive Grösse, die kleiner als 1

ist, so ist für $1 > \mathrm{mod}\,\eta_0 > \varrho_0$ der Werth von $\lim\limits_{\lambda=\infty} \mathrm{mod}\,\eta_\lambda^{(0)}$ jedenfalls von Null verschieden; es sei für diese Werthe von η_0

$$\lim_{\lambda=\infty} \mathrm{mod}\,\eta_\lambda^{(0)} > \varrho > 0,$$

dann ist offenbar

$$1 < \mathrm{mod}\frac{\eta_\lambda^{(0)}}{\eta_{\lambda+\tau}^{(0)}} < 1+\frac{\delta}{\varrho},$$

also

$$(6.) \quad 0 < \log \mathrm{mod}\frac{\eta_\lambda^{(0)}}{\eta_{\lambda+\tau}^{(0)}} < \log\left(1+\frac{\delta}{\varrho}\right).$$

Setzen wir: *)

$$\eta_0 = r+si,$$

$$\log \mathrm{mod}\frac{\eta_\lambda^{(0)}}{\eta_{\lambda+\tau}^{(0)}} = M(r,\ s); \quad \arg\eta_\lambda^{(0)} - \arg\eta_{\lambda+\tau}^{(0)} = N(r,\ s),$$

so ist:

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \frac{\partial N}{\partial s}, \quad \frac{\partial M}{\partial s} = -\frac{\partial N}{\partial r},$$

und da dem realen Werthe $\eta_0 = z_0$ die realen Werthe $\eta_\lambda^{(0)} = z_\lambda$, $\eta_{\lambda+\tau}^{(0)} = z_{\lambda+\tau}$ entsprechen, folgt hieraus:

$$N(r,\ s) = \int_{z_0}^{\eta_0} \left(\frac{\partial M}{\partial s}\,dr - \frac{\partial M}{\partial r}\,ds\right).$$

Nun gilt aber für

$$1 > \varrho_1 > \mathrm{mod}\,\eta_0 > \varrho_0$$

und $h^2+k^2 < (1-\varrho_1)^2$, wenn h, k reale Grössen sind, die Entwickelung

$$M(r+h,\ s+k) - M(r,\ s) = \frac{\partial M}{\partial r}h + \frac{\partial M}{\partial s}k + [g]_2,$$

wo $[g]_2$ nur Glieder zweiter und höherer Dimensionen von h und k enthält; nach einem bekannten Satze **) ist also

$$\mathrm{mod}\frac{\partial M}{\partial r} < \frac{4\log\left(1+\frac{\delta}{\varrho}\right)}{1-\varrho_1} > \mathrm{mod}\frac{\partial M}{\partial s}.$$

Wir haben demnach für wachsendes λ

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{\partial M}{\partial r} = \lim_{\lambda=\infty}\frac{\partial M}{\partial s} = 0$$

---

*) Vergl. *Poincaré*, Acta Mathem. Bd. IV pag. 296; Bulletin de la Société Mathématique de France T. XI p. 117.

**) Vergl. *Weierstrass*, Abhandlungen aus der Functionenlehre S. 93.

und folglich

$$(7.) \quad \lim_{\lambda=\infty} N(r,\ s) = \lim_{\lambda=\infty}(\arg\eta_\lambda^{(0)} - \arg\eta_{\lambda+\tau}^{(0)}) = 0.$$

Da aber

$$\mathrm{mod}^2(\eta_\lambda^{(0)} - \eta_{\lambda+\tau}^{(0)}) = (\mathrm{mod}\,\eta_\lambda^{(0)} - \mathrm{mod}\,\eta_{\lambda+\tau}^{(0)})^2 + [1 - \cos(\arg\eta_\lambda^{(0)} - \arg\eta_{\lambda+\tau}^{(0)})]2\,\mathrm{mod}\,\eta_\lambda^{(0)}\,\mathrm{mod}\,\eta_{\lambda+\tau}^{(0)}$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (5.), (7.)

$$\lim_{\lambda=\infty} \mathrm{mod}(\eta_\lambda^{(0)} - \eta_{\lambda+\tau}^{(0)}) = 0,$$

d. h. *die Reihe*

$$(8.) \quad \eta_0 - \sum_{\mu=0}^{\infty}(\eta_\mu^{(0)} - \eta_{\mu+1}^{(0)})$$

convergirt unbedingt und gleichmässig für alle innerhalb und auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Werthe von η_0, stellt also für diese Werthe einen wohlbestimmten Zweig

$$\eta^{(0)} = \lim_{\lambda=\infty} \eta_\lambda^{(0)}$$

einer analytischen Function von η_0 dar.

Auf ganz analoge Weise lässt sich zeigen, dass für $\mathrm{mod}\,\eta_0 > 1$ die Reihe (8.) ebenfalls unbedingt und gleichmässig convergirt *und also auch für diese Werthe von* η_0 einen Zweig

$$\bar{\eta}^{(0)} = \lim_{\lambda=\infty} \eta_\lambda^{(0)}$$

einer analytischen Function von η_0 darstellt; es ist dann offenbar

$$\bar{\eta}^{(0)} \neq \eta^{(0)}.$$

Ob $\bar{\eta}^{(0)}$ und $\eta^{(0)}$ zusammen einer einzigen monogenen *) analytischen Function angehören oder nicht, muss noch genauer untersucht werden; jedenfalls bestimmt uns $\eta^{(0)}$, welches wir in erster Reihe betrachten wollen, eine analytische Function η von y_0, welche die Punkte $y_0 = a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ zu Verzweigungspunkten hat, und deren gesammten Werthvorrath wir erhalten, indem wir das nur in der oberen y_0-Halbebene definirte $\eta^{(0)}$ zunächst in die untere Halbebene fortsetzen und dann y_0 alle möglichen Umläufe um die Verzweigungspunkte vollziehen lassen. Die Punkte $\eta^{(0)}$ erfüllen in der η-Ebene ein Gebiet γ_0, welches als $\lim_{\lambda=\infty} \gamma_0^{(\lambda)}$ aufzufassen und daher ein ganz innerhalb des Einheitskreises gelegenes Polygon ist. Die Eckpunkte von

*) Im Sinne von Herrn *Weierstrass,* vergl. l. c. S. 78.

γ_0 liegen auf dem Einheitskreise und sind die Grenzwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n_1}$ der $\varepsilon_1^{(\lambda)}, \varepsilon_2^{(\lambda)}, \ldots \varepsilon_{n_1}^{(\lambda)}$ für $\lambda = \infty$, während die Seiten von γ_0 Curvenstücke sind, die den von je zwei auf einander folgenden der Punkte $a_\varkappa^{(0)} (\varkappa = 1, 2, \ldots n_1)$ begrenzten Theilen der realen y_0-Axe entsprechen und sich in den Eckpunkten $\varepsilon_\varkappa$ unter dem Winkel $\lim\limits_{\lambda=\infty} \frac{\pi}{3^\lambda} = 0$ schneiden, d. h. berühren. Mit der Peripherie des Einheitskreises bilden diese Curvenstücke den Winkel

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3^2} + \frac{\pi}{3^3} + \cdots = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\pi}{3^\lambda} = \frac{\pi}{2}.$$

Ebenso ergiebt die analytische Fortsetzung von $\bar{\eta}^{(0)}$ eine Function $\bar{\eta}$, und es ist

$$\bar{\eta} \neq \eta.$$

Für jedes endliche λ stellt sich y_0 dar als rationale Function von η_λ:

$$y_0 = f_\lambda(\eta_\lambda),$$

und es ist:

$$y_0' = f_\lambda('\eta_\lambda).$$

An der Grenze für $\lambda = \infty$ ist demzufolge y_0 eine ***eindeutige*** Function von η sowohl wie von $\bar{\eta}$ und zwar, wenn

$$y_0 = f(\eta),$$

haben wir

$$y_0' = f(\bar{\eta}).$$

Nun ist offenbar

$$f_\lambda(\eta_\lambda) = f(\eta),$$

und da

$$\lim_{\lambda=\infty} \eta_\lambda = \eta$$

ist, so folgt leicht *)

$$\lim_{\lambda=\infty} f_\lambda(\eta) = f(\eta)$$

und ebenso

$$\lim f_\lambda(\bar{\eta}) = f(\bar{\eta}),$$

d. h. ***die Function $f(\eta)$ bezw. $f(\bar{\eta})$ ist der Grenzwerth der rationalen Function $f_\lambda(\eta)$.***

Um nun eingehender die Natur der aus $\eta^{(0)}$ entspringenden Function η sowie deren etwaigen analytischen Zusammenhang mit der aus $\bar{\eta}^{(0)}$ ent-

*) Vergl. *Poincaré,* Acta Mathematica Bd. IV S. 296.

springenden Function $\bar{\eta}$ erforschen zu können, soll in der folgenden Nummer eine neue Bezeichnungsweise erklärt werden, deren Einführung sich durch ihre Anwendbarkeit auf die Theorie unserer Functionen η_λ und η wohl rechtfertigen dürfte.

III.

Wenn die complexe Variable y_0 von einem Punkte y_0 nach dem conjugirten y_0' in continuirlichem Zuge geht und dabei die reale Axe in einem zwischen $a_{\varkappa-1}^{(0)}$ und $a_\varkappa^{(0)}$ gelegenen Punkte passirt ($\varkappa = 2, 3, \ldots n$), so wollen wir dies als *Operation* $\omega_\varkappa^{(0)}$ bezeichnen; die Operation $\omega_1^{(0)}$ bedeute dann den Uebergang von y_0 nach y_0' unter Ueberschreitung der realen Axe an einer ausserhalb der endlichen Strecke $(a_1^{(0)} a_{n_1}^{(0)})$ gelegenen Stelle. Unter dem *Producte*

$$u = \omega_{\varkappa_1}^{(0)} \omega_{\varkappa_2}^{(0)} \ldots \omega_{\varkappa_\mu}^{(0)}$$

verstehen wir eine Operation, welche entsteht, wenn wir erst $\omega_{\varkappa_1}^{(0)}$, dann $\omega_{\varkappa_2}^{(0)}$ u. s. w. bis endlich $\omega_{\varkappa_\mu}^{(0)}$ anwenden, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ irgend welche der Zahlen 1, 2, $\ldots$ n_1 bedeuten, und wo die Reihenfolge der *Factoren* für die Bedeutung von u wesentlich ist; ferner möge 1 die *identische Operation* und u^{-1} diejenige Operation repräsentiren, welche nach u angewandt die identische Operation liefert. Es ist dann offenbar:

$$(1.) \qquad \omega_\varkappa^{(0)} \omega_\varkappa^{(0)} = \omega_\varkappa^{(0)2} = 1, \quad (\omega_\varkappa^{(0)})^{-1} = \omega_\varkappa^{(0)},$$

und der Definition zufolge haben wir:

$$(2.) \qquad y_0' = \omega_\varkappa^{(0)} y_0, \quad \eta_0 + \omega_\varkappa^{(0)} \eta_0.$$

Bilden wir nun alle möglichen Producte von Potenzen der Operationen $\omega_\varkappa^{(0)}$, so constituiren diese eine *Gruppe* Ω_0, von der wir sagen, sie sei aus den $\omega_\varkappa^{(0)}$ als *Fundamentaloperationen* gebildet; zufolge der Gleichung (1.) ist jede Operation u von Ω_0 darstellbar in der Form

$$(3.) \qquad u = \omega_{\varkappa_1}^{(0)} \omega_{\varkappa_2}^{(0)} \ldots \omega_{\varkappa_\mu}^{(0)},$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ irgend welche der Zahlen 1, 2, $\ldots$ n_1 bedeuten und in der Reihe der Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ keine zwei aufeinanderfolgenden einander gleich sind; die Form (3.) ist dann für die Operation u eine *nothwendige*, wir nennen μ den *Index* der Operation u und setzen

$$\mu = \mathrm{Ind}_0 u.$$

Die Operationen von Ω_0 sind natürlich in *unendlicher* Anzahl vorhanden.

Wir bezeichnen eine Operation u von Ω_0 durch ω oder $\bar{\omega}$, jenachdem $\mathrm{Ind}_0 u$ nach dem Modul 2 den Rest 1 oder 0 lässt; dann folgt aus Gleichung (2.)

$$(4.) \qquad y_0' = \omega y_0, \quad y_0 = \bar{\omega} y_0; \quad \eta_0 + \omega\eta_0, \quad \eta_0 = \bar{\omega}\eta_0,$$

d. h. eine ω-Operation entspricht einem Uebergange von y_0 nach y_0', bezw. von η_0 nach $'\eta_0$, eine $\bar{\omega}$-Operation hingegen einem geschlossenen Umlaufe von y_0, bezw. η_0.

Die Operationen $\bar{\omega}$ constituiren für sich eine Gruppe O_0, da ja das Product von $\bar{\omega}$-Operationen wieder eine $\bar{\omega}$-Operation liefert. O_0 ist offenbar eine ***Untergruppe*** und zwar eine ***ausgezeichnete*** Untergruppe von Ω_0; denn wenn $\bar{\omega}$ irgend eine Operation von O_0, u irgend eine von $\bar{\omega}$ verschiedene Operation von Ω_0 bezeichnet, so ist die ***transformirte*** Operation von $\bar{\omega}$:

$$u^{-1}\bar{\omega}u$$

ebenfalls eine Operation von O_0. Wir sagen, die ausgezeichnete Untergruppe O_0 sei ***charakterisirt durch die Congruenz***

$$\mathrm{Ind}_0 u \equiv 0 \pmod 2.$$

Die Gesammtheit der ω-Operationen constituirt keine Gruppe, denn das Product zweier ω-Operationen ist eine $\bar{\omega}$-Operation; wir führen trotzdem auch für diese Gesammtheit ein Zeichen ein, setzen dieselbe nämlich gleich P_0. Dann ist offenbar jede Operation von P_0 darstellbar in der Form $\bar{\omega}\omega_z^{(0)}$, jede Operation von O_0 in der Form $\omega\omega_z^{(0)}$, wir können folglich symbolisch schreiben

$$(5.) \qquad P_0 = O_0\omega_z^{(0)}; \quad O_0 = P_0\omega_z^{(0)}.$$

Die Gruppe O_0 kann auch aus einem System von Fundamentaloperationen $\bar{\omega}$ erzeugt werden, ein solches System bilden z. B. die (n_1-1) Operationen

$$\omega_1^{(0)}\omega_2^{(0)}, \quad \omega_2^{(0)}\omega_3^{(0)}, \quad \ldots \quad \omega_{n_1-1}^{(0)}\omega_{n_1}^{(0)}$$

und deren inverse; jede Operation von O_0 ist darstellbar als Product von Potenzen dieser $2(n_1-1)$ Operationen, und umgekehrt ist jedes solche Product auch in O_0 enthalten; die angegebenen (n_1-1) Operationen sind im übrigen nichts anderes als einfache Umläufe um die Punkte $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1-1}^{(0)}$.

Die hier nur schattenhaft, ohne jede greifbare Form definirten Operationen ω und $\bar{\omega}$ gewinnen eine reale und anschauliche Bedeutung, wenn wir dieselben mit Beziehung auf eine mehrdeutige Function von y_0 betrachten, deren Verzweigungspunkte die Punkte $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ sind. Ohne

jedoch länger bei allgemeinen Speculationen zu verweilen, wollen wir sofort daran gehen, die Anwendbarkeit der eingeführten Symbole an unseren Functionen η_λ zu erproben.

Wir setzen den wohldefinirten Zweig $\eta_\lambda^{(0)}$ der algebraischen Function η_λ gleich:

$$\eta_\lambda^{(0)} = \varphi_\lambda(y_0)$$

und studiren zunächst $\varphi_1(y_0)$. Da die Coefficienten der y_1 definirenden algebraischen Gleichung lineare Functionen von y_0 mit realen Zahlcoefficienten sind, so entsprechen conjugirten complexen Werthen von y_0 auch conjugirte complexe Werthe von y_1, also harmonische Werthe von η_1; wenn $\eta_1^{(0)}$, $\eta_1^{(0,\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \dots n_1)$ die zu einem y_0-Werthe gehörigen Werthe von η_1 bedeuten, so haben wir demnach

$$\left.\begin{aligned} &(6.) \quad \eta_1^{(0,\varkappa)} \neq \varphi_1(\omega_\varkappa^{(0)} y_0) \\ &(7.) \quad \eta_1^{(0,\varkappa)} = \varphi_1(\omega_\varkappa^{(0)} \omega_\lambda^{(0)} y_0) \\ &(8.) \quad \eta_1^{(0)} \neq \varphi_1(\omega_\varkappa^{(0)} \omega_\lambda^{(0)} \omega_\varkappa^{(0)} y_0) \end{aligned}\right\} \qquad (\lambda, \varkappa = 1, 2, \dots n_1;\ \lambda \gtrless \varkappa)$$

Sei nunmehr:

$$(9.) \quad \omega_\varkappa^{(0)} \omega_\lambda^{(0)} \omega_\varkappa^{(0)} = \overset{\varkappa}{\omega}{}_\lambda^{(0)} \qquad (\varkappa \gtrless \lambda),$$

so ist:

$$\overset{\varkappa}{\omega}{}_\lambda^{(0)} \overset{\varkappa}{\omega}{}_\lambda^{(0)} = 1, \quad (\overset{\varkappa}{\omega}{}_\lambda^{(0)})^{-1} = \overset{\varkappa}{\omega}{}_\lambda^{(0)},$$

und nach Gleichung (8.) geht bei Anwendung der Operation $\overset{\varkappa}{\omega}{}_\lambda^{(0)}$ die complexe Variable η_1, die Peripherie des Einheitskreises in einem zwischen $\alpha_{\mu-1}^{(1)}$ und $\alpha_\mu^{(1)}$ gelegenen Punkte durchschneidend, nach dem harmonischen Werthe $'\eta_1$, wo μ eine durch $\varkappa$ und λ eindeutig bestimmte der Zahlen 1, 2, $\dots$ n_2 bedeutet $(\alpha_0^{(1)} = \alpha_{n_2}^{(1)})$. In diesem Sinne setzen wir:

$$\overset{\varkappa}{\omega}{}_\lambda^{(0)} = \omega_\mu^{(1)},$$

und da, wie leicht einzusehen, zwei verschiedene Werthepaare $\varkappa$, λ nicht zu demselben μ Veranlassung geben können, sind die n_2 Operationen $\omega_\mu^{(1)}$ $(\mu = 1, 2, \dots n_2)$ nichts anderes als die in einer bestimmten Reihenfolge genommenen Operationen (9.). Die Operationen $\omega_\mu^{(1)}$ spielen also in Bezug auf η_1 und die Punkte $\alpha_\lambda^{(1)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots n_2)$ dieselbe Rolle wie die Operationen $\omega_\varkappa^{(0)}$ in Bezug auf η_0 und die Punkte $\alpha_\lambda^{(0)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots n_1)$, und wir werden deshalb Gleichung (8.) wohl auch in der Form schreiben:

$$\eta_1 \neq \omega_\mu^{(1)} \eta_1.$$

Formiren wir aus den n_2 Operationen $\omega_\mu^{(1)}$ als Fundamentaloperationen

eine Gruppe Ω_1, so ist jede Operation $u^{(1)}$ dieser Gruppe nur auf eine Weise in der Form

$$u^{(1)} = \omega^{(1)}_{\varkappa_1}\omega^{(1)}_{\varkappa_2}\dots\omega^{(1)}_{\varkappa_\mu} \quad (\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_\mu = 1, 2, \dots n_2;\ \varkappa_\lambda \geqq \varkappa_{\lambda-1};\ \lambda = 1, 2, \dots \mu)$$

darstellbar, und wenn wir setzen

$$\mu = \mathrm{Ind}_1 u^{(1)}$$

und mit O_1 die durch die Congruenz

$$\mathrm{Ind}_1 u^{(1)} \equiv 0 \pmod 2$$

charakterisirte ausgezeichnete Untergruppe von Ω_1 bezeichnen, so ist offenbar Ω_1 eine Untergruppe von Ω_0, und O_1 enthält sämmtliche in Ω_1 vorkommenden ϖ-Operationen von Ω_0 und nur diese. Bezeichnen wir typisch eine Operation von Ω_1, die nicht in O_1 vorkommt, durch $\omega^{(1)}$, eine Operation von O_1 durch $\varpi^{(1)}$, so ist:

$$(10.) \quad \begin{cases} \eta_1^{(0)} \neq \omega^{(1)}\eta_1^{(0)} & \text{oder} \quad \varphi_1(y_0) \neq \varphi_1(\omega^{(1)}y_0), \\ \eta_1^{(0)} = \varpi^{(1)}\eta_1^{(0)} & \text{oder} \quad \varphi_1(y_0) = \varphi_1(\varpi^{(1)}y_0), \end{cases}$$

d. h. jeder Operation $\omega^{(1)}$ entspricht ein Uebergang von y_0 nach y_0', bezw. von η_0 nach $'\eta_0$, der auch das entsprechende $\eta_1^{(0)}$ nach $'\eta_1^{(0)}$ führt; jeder Operation $\varpi^{(1)}$ ein geschlossener Umlauf von y_0 bezw. η_0, der auch das entsprechende $\eta_1^{(0)}$ zu seinem Ausgangspunkte zurückleitet.

Sei nun

$$u = \omega^{(0)}_{\varkappa_1}\omega^{(0)}_{\varkappa_2}\dots\omega^{(0)}_{\varkappa_\mu} \qquad (\varkappa_\lambda \geqq \varkappa_{\lambda-1},\ \lambda = 2, 3, \dots \mu)$$

irgend eine Operation von Ω_0, und denken wir uns die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_\mu$, ohne ihre Reihenfolge zu ändern, in folgender Weise angeordnet. Von $\varkappa_1$ ausgehend durchlaufen wir die angegebene Zahlenreihe in der Richtung von links nach rechts, bis wir einer Zahl $\varkappa_{\lambda_1}$ begegnen, welche gleich $\varkappa_1$ ist; von der folgenden Zahl $\varkappa_{\lambda_1+1}$, die sicher nicht gleich $\varkappa_1$ sein kann, gehen wir in derselben Richtung weiter bis zu einer Zahl $\varkappa_{\lambda_2}$, welche gleich $\varkappa_{\lambda_1+1}$ ist, und so fahren wir fort, bis endlich auf ein $\varkappa_{\lambda_\varrho}$, welches gleich $\varkappa_{\lambda_{\varrho-1}+1}$ ist, ein $\varkappa_{\lambda_\varrho+1}$ folgt, welches sich unter den folgenden $\varkappa$ nicht wiederfindet. Nun ist:

$$\omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_\alpha+1}}\omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_\alpha+2}}\dots\omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_{\alpha+1}}} = \omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_\alpha+2}}{}^{\varkappa_{\lambda_\alpha+1}}\omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_\alpha+3}}{}^{\varkappa_{\lambda_\alpha+1}}\dots\omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_{\alpha+1}-1}}{}^{\varkappa_{\lambda_\alpha+1}},$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots \varrho-1),$$

und wenn $\lambda_\varrho < \mu-1$:

$$\omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_\varrho+1}}\omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_\varrho+2}}\dots\omega^{(0)}_{\varkappa_\mu} = \omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_\varrho+2}}{}^{\varkappa_{\lambda_\varrho+1}}\dots\omega^{(0)}_{\varkappa_\mu}{}^{\varkappa_{\lambda_\varrho+1}}\omega^{(0)}_{\varkappa_{\lambda_\varrho+1}};$$

wenn dagegen $\lambda_\varrho = \mu - 1$ ist, so lassen wir $\omega_{\varkappa\mu}$ unverändert stehen. Folglich ist, wenn $\lambda_\varrho = \mu$, die Operation u ein Product von Operationen $\omega_\varkappa^{(1)}$, d. h. selbst eine Operation von Ω_1; dagegen wenn $\lambda_\varrho < \mu$, haben wir

$$u = u^{(1)} . \omega_\varkappa^{(0)},$$

wo $u^{(1)}$ eine Operation von Ω_1 und $\omega_\varkappa^{(0)} = \omega_{\varkappa\lambda_\varrho+1}^{(0)}$ oder $\omega_{\varkappa\mu}^{(0)}$ ist, je nachdem $\lambda_\varrho \leqq \mu - 1$. Man sieht leicht, dass für $\lambda_\varrho = \mu$

$$\mathrm{Ind}_1 u < \mathrm{Ind}_0 u$$

und für $\lambda_\varrho < \mu$

$$\mathrm{Ind}_1 u^{(1)} < \mathrm{Ind}_0 u.$$

Es ist also jede Operation u von Ω_0 darstellbar in der Form

$$(11.) \qquad u = u^{(1)} \omega_\varkappa^{(0)},$$

wo $u^{(1)}$ eine Operation von Ω_1, $\varkappa$ eine der Zahlen 0, 1, 2, ... n_1 ($\omega_0^{(0)} = 1$) bedeutet und

$$\mathrm{Ind}_0 u > \mathrm{Ind}_1 u^{(1)}.$$

Wir erhalten daher sämmtliche Operationen von Ω_0, indem wir jede Operation von Ω_1 mit jeder der Operationen 1, $\omega_1^{(0)}$, $\omega_2^{(0)}$, ... $\omega_{n_1}^{(0)}$ componiren, und können also symbolisch setzen

$$(12.) \qquad \Omega_0 = \Omega_1 (1, \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \ldots \omega_{n_1}^{(0)}).$$

Sei

$$(1, \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \ldots \omega_{n_1}^{(0)}) = P_1,$$

so können wir sagen, die Grösse Ω_0 sei durch die Untergruppe Ω_1 „theilbar", oder auch, da P_1 aus einer endlichen Anzahl von Operationen besteht, Ω_1 sei eine Untergruppe von Ω_0 mit *endlichem Quotienten*. Bemerken wir, dass jeder Operation von P_1 der Uebergang von einem Punkte $\eta_1^{(0)}$ des Gebietes $\gamma_0^{(1)}$ bezw. $\bar{\gamma}_0^{(1)}$ nach dem entsprechenden Punkte eines Gebietes $\bar{\gamma}_{(0,\varkappa)}^{(1)}$ bezw. $\gamma_{(0,\varkappa)}^{(1)}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots n_1$) entspricht, sodass, wenn wir z. B. das Gebiet $\gamma_0^{(1)}$ der identischen Operation zuordnen, jeder anderen Operation von P_1 eines der in der oberen Halbebene gelegenen Gebiete $\bar{\gamma}_{(0,\varkappa)}^{(1)}$ entspricht. Aus den Gleichungen (6.), (11.), (12.) folgt für irgend eine ω-Operation von Ω_0, die nicht in Ω_1 enthalten ist:

$$\varphi_1(\omega y_0) = \varphi_1(\bar{\omega}^{(1)} . \omega_\varkappa^{(0)} y_0) = \varphi_1(\omega_\varkappa^{(0)} y_0) \neq \eta_1^{(0,\varkappa)}$$

und hieraus

$$\varphi_1(\omega_\varkappa^{(0)} \omega_\varkappa^{(0)} \bar{\omega}^{(1)} \omega_\varkappa^{(0)} y_0) = \varphi_1(\omega_\varkappa^{(0)} y_0),$$

ebenso

$$\varphi_1(\omega_\varkappa^{(0)}\omega_\varkappa^{(0)}\omega^{(1)}\omega_\varkappa^{(0)}y_0) \neq \varphi_1(\omega_\varkappa^{(0)}y_0).$$

Bezeichnen wir also durch $\Omega_1^{(\varkappa)}$ jene Gruppe, welche man erhält, indem man Ω_1 (d. h. jede Operation dieser Gruppe) mit der Operation $\omega_\varkappa^{(0)}$ transformirt, durch $O_1^{(\varkappa)}$ die durch die Congruenz

$$\mathrm{Ind}_0 u \equiv 0 \pmod 2$$

charakterisirte ausgezeichnete Untergruppe von $\Omega_1^{(\varkappa)}$, so geht $\eta_1^{(0,\varkappa)}$ bei Anwendung einer ω-Operation von $\Omega_1^{(\varkappa)}$ in seinen harmonischen Werth über, während es bei einer Operation von $O_1^{(\varkappa)}$ nicht verändert wird; es ist klar, dass auch die $\Omega_1^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n_1)$ Untergruppen mit endlichem Quotienten von Ω_0 sind. So wie $\eta_1^{(0)}$ zur Gruppe Ω_1, gehört $\eta_1^{(0,\varkappa)}$ zur Gruppe $\Omega_1^{(\varkappa)}$.

Da η_λ aus $\eta_{\lambda-1}$ auf analoge Weise erzeugt wird wie η_1 aus η_0, so können wir aus den eben für η_1 gewonnenen Resultaten die folgenden, für η_λ gültigen Sätze erschliessen. Setzen wir:

$$\omega_\varkappa^{(\lambda-1)}\omega_\mu^{(\lambda-1)}\omega_\varkappa^{(\lambda-1)} = \overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)} \qquad (\varkappa, \mu = 1, 2, \ldots n_\lambda,\ \varkappa \gtrless \mu),$$

so ist:

$$\overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)}\overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)} = 1, \quad (\overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)})^{-1} = \overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)},$$

und jede dieser $n_{\lambda+1}$ Operationen $\overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)}$ ist eine ω-Operation von Ω_0. Wir haben dann

$$(13.) \qquad \varphi_\lambda(y_0) \neq \varphi_\lambda(\overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)}y_0),$$

d. h. bei Anwendung einer der Operationen $\overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)}$ geht $\eta_\lambda^{(0)} = \varphi_\lambda(y_0)$, die Peripherie des Einheitskreises in einem zwischen $\alpha_{\varrho-1}^{(\lambda)}$ und $\alpha_\varrho^{(\lambda)}$ gelegenen Punkte durchschneidend, nach dem harmonischen Werthe $'\eta_\lambda^{(0)}$, wo ϱ eine durch $\varkappa$, μ eindeutig bestimmte der Zahlen 1, 2, $\ldots n_{\lambda+1}$ bedeutet $(\alpha_0^{(\lambda)} = \alpha_{n_{\lambda+1}}^{(\lambda)})$ und verschiedenen Werthepaaren $\varkappa$, μ stets auch verschiedene Werthe ϱ entsprechen. In diesem Sinne setzen wir

$$\overset{\varkappa}{\omega}{}_\mu^{(\lambda-1)} = \omega_\varrho^{(\lambda)}$$

und schreiben Gleichung (13.) auch in der Form

$$\eta_\lambda^{(0)} \neq \omega_\varrho^{(\lambda)}\eta_\lambda^{(0)} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots n_{\lambda+1}).$$

Bilden wir aus den $\omega_\varrho^{(\lambda)}$ als Fundamentaloperationen eine Gruppe Ω_λ, so ist jede Operation $u^{(\lambda)}$ dieser Gruppe nur auf eine Weise in der Form

$$u^{(\lambda)} = \omega_{\varkappa_1}^{(\lambda)}\omega_{\varkappa_2}^{(\lambda)}\ldots\omega_{\varkappa_\varrho}^{(\lambda)}$$

darstellbar, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\varrho$ irgend welche bestimmte der Zahlen 1, 2, $\ldots n_{\lambda+1}$

bedeuten und keine zwei aufeinanderfolgenden der $\varkappa$ einander gleich sind. Setzen wir:

$$\varkappa_\varrho = \mathrm{Ind}_\lambda u^{(\lambda)}$$

und bezeichnen mit O_λ die durch die Congruenz

$$\mathrm{Ind}_\lambda u^{(\lambda)} \equiv 0 \pmod 2$$

charakterisirte ausgezeichnete Untergruppe von Ω_λ, so ist offenbar Ω_λ eine Untergruppe von $\Omega_{\lambda-1}$, also auch von Ω_0, und O_λ enthält sämmtliche in Ω_λ vorkommenden ϖ-Operationen von Ω_0 und nur diese. Bezeichnen wir typisch durch $\varpi^{(\lambda)}$ die Operationen von O_λ, durch $\omega^{(\lambda)}$ die in O_λ nicht enthaltenen Operationen von Ω_λ, so ist:

$$\eta_\lambda^{(0)} \neq \omega^{(\lambda)}\eta_\lambda^{(0)}, \quad \text{oder} \quad \varphi_\lambda(y_0) \neq \varphi_\lambda(\omega^{(\lambda)}y_0),$$
$$\eta_\lambda^{(0)} = \varpi^{(\lambda)}\eta_\lambda^{(0)}, \quad \text{oder} \quad \varphi_\lambda(y_0) = \varphi_\lambda(\varpi^{(\lambda)}y_0),$$

d. h. jeder Operation $\omega^{(\lambda)}$ entspricht ein Uebergang von y_0 nach y_0', der jedes $\eta_\mu^{(0)}$ für $\mu = 0, 1, 2, \ldots \lambda$ in das harmonische $'\eta_\mu^{(0)}$ überführt, jeder Operation $\varpi^{(\lambda)}$ hingegen ein geschlossener Umlauf von y_0, durch welchen auch jedes $\eta_\mu^{(0)}$ für $\mu = 0, 1, 2, \ldots \lambda$ zu seinem Ausgangswerthe zurückgeleitet wird; es gehört also $\eta_\lambda^{(0)}$ zur Gruppe Ω_λ.

Jede Operation $u^{(\lambda-1)}$ von $\Omega_{\lambda-1}$ ist darstellbar in der Form

$$u^{(\lambda-1)} = u^{(\lambda)}\omega_\varkappa^{(\lambda-1)},$$

wo $u^{(\lambda)}$ eine Operation von Ω_λ, $\varkappa$ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n_\lambda$ $(\omega_0^{(\lambda-1)} = 1)$ bedeutet, und es ist

$$\mathrm{Ind}_{\lambda-1}u^{(\lambda-1)} > \mathrm{Ind}_\lambda u^{(\lambda)}.$$

Folglich lässt sich jede Operation u von Ω_0 in die Form setzen

$$(14.) \qquad u = u^{(\lambda)}\omega_{\varkappa_\lambda}^{(\lambda-1)}\omega_{\varkappa_{\lambda-1}}^{(\lambda-2)}\ldots\omega_{\varkappa_2}^{(1)}\omega_{\varkappa_1}^{(0)},$$

wo $u^{(\lambda)}$ eine Operation von Ω_λ, $\varkappa_\varrho$ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n_\varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots \lambda$ bedeutet. Symbolisch können wir also setzen

$$\Omega_{\lambda-1} = \Omega_\lambda\,(1, \omega_1^{(\lambda-1)}, \omega_2^{(\lambda-1)}, \ldots \omega_{n_\lambda}^{(\lambda-1)})$$

und daher

$$(15.) \quad \Omega_0 = \Omega_\lambda(1, \omega_1^{(\lambda-1)}, \ldots \omega_{n_\lambda}^{(\lambda-1)})(1, \omega_1^{(\lambda-2)}, \ldots \omega_{n_{\lambda-1}}^{(\lambda-2)})\ldots(1, \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \ldots \omega_{n_1}^{(0)}),$$

wo das symbolische Product im zweiten Gliede ausgeführt wird, indem man sich alle Operationen von Ω_λ, durch Kommata getrennt, zwischen Parenthesen aufgeschrieben denkt und dann nach der Multiplicationsregel für Polynome verfährt, als wären die in den einzelnen Parenthesen durch Kommata ge-

trennten Operationen, mit dem Zeichen + verbundene Grössen; in jedem Einzelproduct hat man aber die Operationen in der Reihenfolge zu nehmen, in welcher die Parenthesen, denen sie entnommen sind, aufeinander folgen. Es ist demnach Ω_λ für jeden bestimmten Werth von λ eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von Ω_0, und wenn wir die Gesammtheit der im zweiten Gliede von Gleichung (15.) mit Ω_λ zu multiplicirenden Operationen gleich P_λ setzen, so enthält P_λ genau ν_λ Operationen, und es ist für eine nicht in P_λ enthaltene Operation u von Ω_0

$$\mathrm{Ind}_0 u > \mathrm{Ind}_\lambda u^{(\lambda)} + \lambda - 1,$$

während alle Operationen u, für welche $\mathrm{Ind}_0 u \leqq \lambda - 1$, nothwendig in P_λ enthalten sind.

Sei u eine in P_λ vorkommende Operation, und denken wir uns dieselbe in der Form (3.) geschrieben, also

$$(16.) \qquad u = \omega_{\varkappa_1}^{(0)} \omega_{\varkappa_2}^{(0)} \ldots \omega_{\varkappa_\mu}^{(0)};$$

ist dann $\mu \equiv 0 \pmod 2$, d. h. u eine ϖ-Operation, so haben wir

$$\varphi_\lambda(u y_0) = \eta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)},$$

d. h. die ϖ-Operation u von P_λ führt $\eta_\lambda^{(0)}$ von $\gamma_0^{(\lambda)}$ bezw. $\bar{\gamma}_0^{(\lambda)}$ nach dem entsprechenden Punkte des Gebietes $\gamma^{(\lambda)}_{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)}$ bezw. $\bar{\gamma}^{(\lambda)}_{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)}$; wenn dagegen $\mu \equiv 1 \pmod 2$, d. h. u eine ω-Operation ist, haben wir

$$\varphi_\lambda(u y_0) + \eta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)},$$

d. h. durch die ω-Operation u von P_λ wird $\eta_\lambda^{(0)}$ von $\gamma_0^{(\lambda)}$ bezw. $\bar{\gamma}_0^{(\lambda)}$ in den entsprechenden Punkt von $\bar{\gamma}^{(\lambda)}_{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)}$ bezw. $\gamma^{(\lambda)}_{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)}$ übergeleitet; durch Anwendung sämmtlicher in P_λ enthaltenen Operationen ergeben sich also auf diese Weise alle ν_λ Zweige der Function η_λ. Bemerken wir, dass, wenn wir z. B. von einem innerhalb des Einheitskreises gelegenen Werthe $\eta_\lambda^{(0)}$ ausgehen, alle Werthe, welche aus diesem bei Anwendung der Operationen von P_λ hervorgehen, gleichfalls im Innern des Einheitskreises gelegen sind; der Uebergang vom Innern nach dem Aeussern dieses Kreises wird nur durch die Operationen von Ω_λ vermittelt. In beiden Fällen, d. h. sowohl wenn die Operation (16.) von P_λ eine ω-, als auch wenn dieselbe eine ϖ-Operation ist, setzen wir die aus Ω_λ durch Transformation mit u entstehende Gruppe:

$$u^{-1} \Omega_\lambda u = \Omega_\lambda^{(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)};$$

dann geht $\eta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu)}$ durch die ω-Operationen dieser Gruppe in seinen har-

monischen Werth über, während es durch die $\bar{\omega}$-Operationen derselben ungeändert bleibt; es gehört also $\eta_\lambda^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$ zur Gruppe $\Omega_\lambda^{(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$, und jede dieser Gruppen ist eine Untergruppe von Ω_0 mit endlichem Quotienten.

Die zu den verschiedenen Zweigen von η_λ gehörigen Gruppen $\Omega_\lambda^{(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$ werden gewisse Operationen mit einander gemein haben, welche für sich wieder eine Gruppe T_λ constituiren, von der wir nachweisen wollen, dass sie eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von Ω_0 sei. Statt diesen Nachweis für T_λ selbst zu erbringen, können wir uns darauf beschränken, denselben für die durch die Congruenz $\mathrm{Ind}_0 u \equiv 0 \pmod 2$ charakterisirte ausgezeichnete Untergruppe $\boldsymbol{T}_\lambda$ von T_λ zu führen. T_λ ist offenbar so beschaffen, dass jeder Zweig von η_λ durch eine in T_λ enthaltene ω-Operation in seinen harmonischen Werth übergeht und durch eine $\bar{\omega}$-Operation von T_λ, d. h. eine Operation von $\boldsymbol{T}_\lambda$, nicht verändert wird. Sei nun $\boldsymbol{M}_\lambda$ die ***Monodromiegruppe*** der η_λ als Function von y_0 definirenden algebraischen Gleichung $\boldsymbol{\Phi}_\lambda(\eta_\lambda, y_0) = 0$ und π_λ die Ordnung dieser Gruppe, dann lässt sich ein System von π_λ Operationen $\bar{\omega}$ auffinden, durch welche alle π_λ in $\boldsymbol{M}_\lambda$ vorkommenden Substitutionen der ν_λ Elemente η_λ erzeugt werden; diese $\bar{\omega}$-Operationen seien

$$1, \quad \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_2, \quad \ldots \quad \bar{\omega}_{\pi_\lambda - 1}.$$

Dann ist offenbar:

$$\boldsymbol{O}_0 = \boldsymbol{T}_\lambda(1, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots \bar{\omega}_{\pi_\lambda - 1}),$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist. Es ist ferner leicht einzusehen, dass T_λ eine ***ausgezeichnete*** Untergruppe von Ω_0 ist *); denn bedeutet $\bar{u}$ eine Operation von T_λ, welche also sämmtliche Zweige von η_λ entweder ungeändert lässt oder in ihre harmonischen Werthe überführt, und u irgend eine in T_λ nicht enthaltene Operation von Ω_0, so wird die transformirte Operation $u^{-1}\bar{u}u$ offenbar auch entweder sämmtliche η_λ ungeändert lassen oder in ihre harmonischen Werthe verwandeln. Bezeichne V_λ eine rationale Function der Wurzeln der Gleichung $\boldsymbol{\Phi}_\lambda(\eta_\lambda, y_0) = 0$, welche zur Gruppe T_λ gehört, d. h. durch die ω-Operationen dieser Gruppe in ihren harmonischen Werth übergeht und durch die $\bar{\omega}$-Operationen derselben ungeändert bleibt, dann ist, nach bekannten Sätzen, jeder Zweig von η_λ rational ausdrückbar in V_λ und y_0, und zwar wenn

$$(17.) \qquad \eta_\lambda^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)} = \boldsymbol{R}_{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}(V_\lambda, y_0),$$

*) Vergl. ***Poincaré,*** l. c. S. 293.

so ist:

$$(18.) \qquad {}'\eta_\lambda^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)} = R_{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}({}'V_\lambda,\ y_0');$$

folglich wird der aus

$$\eta_\lambda^{(0)} = R_0(V_\lambda,\ y_0)$$

durch die Operation (16.) hervorgehende Werth des Zweiges $\eta_\lambda^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$ durch Formel (17.) oder (18.) gegeben, je nachdem μ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Als solche Function V_λ kann z. B. eine passend gewählte Wurzel eines im Rationalitätsbereiche y_0 irreductiblen Factors der zur Gleichung

$$\Phi_\lambda(\eta_\lambda,\ y_0) = 0$$

gehörigen *Galois*schen Resolventengleichung genommen werden. Bemerken wir noch, dass, wenn $n_1 > 2$, der Zusammenhang $2p+1$ der zu V_λ gehörigen *Riemann*schen Fläche für einen endlichen bestimmten Werth von λ stets grösser als 1, also y_0 in V_λ nicht rational ausdrückbar ist.

IV.

Wir sind nunmehr im Besitze der Mittel, deren es bedarf, um in die Natur der durch unseren Iterationsprocess erzeugten Grenzfunctionen η und $\bar{\eta}$ volle Einsicht zu gewinnen.

Es war

$$\text{für}\quad \operatorname{sgn} J(y_0) = 1 \quad\text{und}\quad J(y_0) = 0\text{:}\quad \lim_{\lambda=\infty}\eta_\lambda^{(0)} = \eta^{(0)},$$

$$\text{für}\quad \operatorname{sgn} J(y_0) = -1\text{:}\qquad\qquad\quad \lim_{\lambda=\infty}\eta_\lambda^{(0)} = \bar{\eta}^{(0)};$$

folglich wird $\eta^{(0)}$ sowohl wie $\bar{\eta}^{(0)}$, als Function von y_0 aufgefasst, gehören zur Gruppe

$$\Omega = \lim_{\lambda=\infty}\Omega_\lambda.$$

Da, wenn

$$\operatorname{Ind}_0 u \leqq \lambda - 1,$$

die Operation u in P_λ enthalten ist, so folgt, dass, wie gross auch $\operatorname{Ind}_0 u$ sein möge, λ stets so gewählt werden kann, dass u in P_λ vorkommt; es enthält daher

$$P = \lim_{\lambda=\infty} P_\lambda$$

sämmtliche in Ω_0 vorkommende Operationen und nur diese, d. h. es ist:

$$P = \Omega_0$$

und folglich

$$\lim_{\lambda=\infty} \Omega_\lambda = \Omega = 1.$$

Hieraus folgt zunächst, dass es keine Operation ω oder $\bar{\omega}$ giebt, welche $\eta^{(0)}$ bezw. $\bar{\eta}^{(0)}$ in seinen harmonischen Werth überführen würde, d. h. es ist für jeden von den $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ verschiedenen Werth von y_0

$$\mathrm{mod}\,\eta < 1, \quad \mathrm{mod}\,\bar{\eta} > 1.$$

Dagegen ist für $y = a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$

$$\mathrm{mod}\,\eta = \mathrm{mod}\,\bar{\eta} = 1,$$

die Functionen η und $\bar{\eta}$ stehen also in keinem analytischen Zusammenhange; als Function von η existirt y_0 nur innerhalb und auf der Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene, als Function von $\bar{\eta}$ nur ausserhalb und auf der Peripherie des Einheitskreises der $\bar{\eta}$-Ebene; denjenigen Punkten der Peripherie des Einheitskreises, wo y_0 überhaupt einen bestimmten Werth hat, entsprechen die Werthe $y_0 = a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ *).

Den folgenden Untersuchungen legen wir die Function η allein zu Grunde; denn, wie bereits bemerkt, ist ja $\bar{\eta} \neq \eta$.

Die Gesammtheit der in Bezug auf die Gruppe Ω_0 gefundenen Resultate, soweit dieselben unabhängig sind von der analytischen Bedeutung der betrachteten Operationen ω und $\bar{\omega}$, nämlich die Zerlegung dieser Gruppe in immer umfassendere Untergruppen, die Erzeugung ihrer sämmtlichen Operationen nach einem übersichtlichen Schema etc. kann wohl als die ***Arithmetik*** der Gruppe bezeichnet werden, und man kann eine aus gewissen Fundamentaloperationen hergeleitete Gruppe eigentlich nur dann als vollkommen bekannt ansehen, wenn man in diesem Sinne die Arithmetik derselben beherrscht. Diese hängt aber ihrerseits einzig und allein ab von der Natur der zwischen den Fundamentaloperationen bestehenden Relationen, welche Herr ***Poincaré*** als ***Fundamentalrelationen*** (relations fondamentales) bezeichnet **); folglich besitzen Gruppen, die aus der gleichen Anzahl von Fundamentaloperationen gebildet sind, zwischen welchen auch dieselben Fundamentalrelationen bestehen, dieselbe Arithmetik. In unserem Falle

*) Für die hier auftretenden analytischen Verhältnisse vergl. die Abhandlung von Herrn ***Fuchs*** dieses Journal Bd. 83 S. 27 ff. und die von Herrn *Weierstrass* „Zur Functionenlehre". (Ges. Abhandl. S. 79 ff.)

**) Acta Mathematica Bd. I S. 10.

der Gruppe Ω_0 sind die Fundamentalrelationen die denkbar einfachsten, nämlich

$$\omega_\varkappa^{(0)2} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n_1),$$

und aus diesem Grunde war das im Allgemeinen so schwierige Problem der Entwickelung der Gruppen-Arithmetik hier in verhältnissmässig einfacher Weise zu erledigen.

Durch Anwendung einer Operation $\omega_\varkappa^{(0)}$ auf y_0 geht $\eta^{(0)}$ über in $\eta^{(0,\varkappa)}$, und so wie $\eta^{(0)}$ den Punkten der oberen Halbebene, entspricht $\eta^{(0,\varkappa)}$ den Punkten der unteren Halbebene von y_0; es kann also $\eta^{(0,\varkappa)}$ betrachtet werden als die analytische Fortsetzung von $\eta^{(0)}$ in die untere y_0-Halbebene, oder mit andern Worten $\eta^{(0)}$ constituirt mit irgend einem $\eta^{(0,\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \dots n_1)$ einen completten Zweig der Function η, aus welchem wir nun, indem wir y_0 Umläufe um die Punkte $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $\dots$ $a_{n_1}^{(0)}$ vollziehen lassen, d. h. auf y_0 ϖ-Operationen anwenden, neue Zweige von η herleiten können. Möge $\eta^{(0)}$ durch Ausübung der Operation

$$u = \omega_{\varkappa_1}^{(0)} \omega_{\varkappa_2}^{(0)} \dots \omega_{\varkappa_\mu}^{(0)}$$

von Ω_0 auf y_0 übergehen in $\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\dots\varkappa_\mu)}$, und bezeichnen wir das Gebiet, welches durch die so entstehenden η-Punkte erfüllt wird, mit $\gamma_{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\dots\varkappa_\mu)}$ oder $\bar{\gamma}_{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\dots\varkappa_\mu)}$, je nachdem μ eine gerade oder ungerade Zahl ist, so liefern jene $\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\dots\varkappa_\mu)}$, für welche $\mu \equiv 0 \pmod 2$, neue Zweige der Function η, und es ist klar, dass wir auf diese Weise auch alle möglichen Zweige dieser Function erhalten. Die Gebiete γ und $\bar{\gamma}$ sind so wie γ_0 ganz innerhalb des Einheitskreises gelegene Polygone, deren Eckpunkte den Punkten $y_0 = a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $\dots$ $a_{n_1}^{(0)}$ entsprechen und auf der Peripherie des Einheitskreises gelegen sind, während ihre Seiten sich in den Eckpunkten berühren; diese Polygone bedecken, neben einander gelagert, die Fläche des Einheitskreises einfach und vollständig. Die längs einer Seite zusammenhängenden Polygone γ_0 und ein $\bar{\gamma}_{(0,\varkappa)}$ constituiren zusammengenommen einen Bereich $R_\varkappa$, der durch die Seite $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$, die als Diagonale aufgefasst werden kann, in zwei symmetrische Theile getheilt wird, und innerhalb dessen die Function $y_0 = f(\eta)$ jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt; auf der Begrenzung und der Diagonale von $R_\varkappa$ ist $f(\eta)$ real. So lassen sich je zwei der Gebiete γ, $\bar{\gamma}$ zu einem solchen Bereiche R zusammenfassen, welcher die eindeutige conforme Abbildung der ganzen y_0-Ebene vermöge eines Zweiges der Function η von y_0 liefert,

und diese Bereiche R erfüllen den ganzen vom Einheitskreise begrenzten Theil der η-Ebene.

Was die Beziehung zwischen den einzelnen $\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$, die wir wohl als ***Halbzweige*** der Function η bezeichnen können, anlangt, so bemerken wir zuvörderst, dass, da

$$\Omega = 1,$$

auch jedes

$$\Omega^{(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)} = u^{-1}\Omega u = 1,$$

und folglich auch

$$T = \lim_{\lambda=\infty} T_\lambda = 1,$$

d. h. an der Grenze für $\lambda = \infty$ kann jedes einzelne $\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$ selbst als Function V_λ aufgefasst werden. Ist also $\eta^{(0,l_1,l_2,\ldots l_\varrho)}$ irgend ein von $\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$ verschiedener Halbzweig, so ist dieser rational ausdrückbar in $\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$ und y_0 oder in ${}'\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$ und y_0', je nachdem μ und ϱ nach dem Modul 2 gleiche oder verschiedene Reste lassen; da aber y_0 eine eindeutige Function von η ist, so folgt hieraus, dass jeder Halbzweig durch jeden anderen oder dessen harmonischen Werth eindeutig darstellbar ist, und nach bekannten Sätzen schliessen wir nun, dass jeder Halbzweig eine *lineare Function* mit constanten Coefficienten von jedem anderen oder dessen harmonischem Werthe ist, je nachdem beide derselben oder verschiedenen y_0-Halbebenen entsprechen. Diese linearen Functionen müssen in beiden Fällen Punkte der Peripherie des Einheitskreises in Punkte eben dieser Peripherie transformiren, oder, wie wir kurz sagen wollen, die Peripherie des Einheitskreises wird durch jene linearen Functionen *in sich selbst* transformirt. Speciell ist jedes $\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)}$ eine lineare Function von $\eta^{(0)}$ oder ${}'\eta^{(0)}$, je nachdem μ gerade oder ungerade ist, ***und η ist also eine unendlich vieldeutige Function von y_0, deren jeder Zweig durch jeden anderen linear mit constanten Coefficienten ausdrückbar ist.***

Sei

$$(1.) \qquad \eta^{(0,\varkappa)} = \frac{\alpha_{\varkappa 1}{}'\eta^{(0)} + \alpha_{\varkappa 2}}{\alpha_{\varkappa 3}{}'\eta^{(0)} + \alpha_{\varkappa 4}},$$

dann ist für einen Punkt ζ der Seite $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$, längs welcher die Gebiete γ_0 und $\bar{\gamma}_{(0,\varkappa)}$ zusammenhängen:

$$\zeta = \frac{\alpha_{\varkappa 1}{}'\zeta + \alpha_{\varkappa 2}}{\alpha_{\varkappa 3}{}'\zeta + \alpha_{\varkappa 4}};$$

da aber hieraus

$$'\zeta = \frac{\alpha'_{\varkappa 3}+\alpha'_{\varkappa 4}\zeta}{\alpha'_{\varkappa 1}+\alpha'_{\varkappa 2}\zeta}$$

folgt, so bestehen zwischen den Coefficienten $\alpha_{\varkappa 1}$, $\alpha_{\varkappa 2}$, $\alpha_{\varkappa 3}$, $\alpha_{\varkappa 4}$ die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} \alpha_{\varkappa 3}\alpha'_{\varkappa 4}+\alpha'_{\varkappa 2}\alpha_{\varkappa 4} = 0, \\ \alpha_{\varkappa 1}\alpha'_{\varkappa 3}+\alpha'_{\varkappa 1}\alpha_{\varkappa 2} = 0, \\ \alpha_{\varkappa 3}\alpha'_{\varkappa 3}+\alpha'_{\varkappa 1}\alpha_{\varkappa 4}-\alpha_{\varkappa 1}\alpha'_{\varkappa 4}-\alpha_{\varkappa 2}\alpha'_{\varkappa 2} = 0; \end{cases}$$

ferner müssen $\varepsilon_{\varkappa-1}$, $\varepsilon_\varkappa$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\frac{\alpha_{\varkappa 1}\varepsilon+\alpha_{\varkappa 2}}{\alpha_{\varkappa 3}\varepsilon+\alpha_{\varkappa 4}} = \varepsilon$$

sein, woraus sich

$$(3.)\quad \begin{cases} \varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa = -\dfrac{\alpha_{\varkappa 4}-\alpha_{\varkappa 1}}{\alpha_{\varkappa 3}}, \\ \varepsilon_{\varkappa-1}\varepsilon_\varkappa = -\dfrac{\alpha_{\varkappa 2}}{\alpha_{\varkappa 3}} \end{cases}$$

ergiebt, und da endlich die Function (1.) die Peripherie des Einheitskreises in sich selbst transformiren soll, haben wir

$$(4.)\quad \begin{cases} \alpha_{\varkappa 1}\alpha'_{\varkappa 2}-\alpha_{\varkappa 3}\alpha'_{\varkappa 4} = 0, \\ \alpha_{\varkappa 1}\alpha'_{\varkappa 1}+\alpha_{\varkappa 2}\alpha'_{\varkappa 2}-\alpha_{\varkappa 3}\alpha'_{\varkappa 3}-\alpha_{\varkappa 4}\alpha'_{\varkappa 4} = 0. \end{cases}$$

Mit Rücksicht darauf, dass $\alpha_{\varkappa 1}\alpha_{\varkappa 4}-\alpha_{\varkappa 3}\alpha_{\varkappa 2}$ von Null verschieden sein muss, ergeben die Gleichungen (2.), (3.), (4.)

$$\alpha_{\varkappa 1} = \varrho(\varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa);\quad \alpha_{\varkappa 2} = -2\varrho\varepsilon_{\varkappa-1}\varepsilon_\varkappa;\quad \alpha_{\varkappa 3} = 2\varrho;\quad \alpha_{\varkappa 4} = -\varrho(\varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa),$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor ist, den wir gleich 1 wählen wollen. Es ist also

$$(5.)\quad \eta^{(0,\varkappa)} = \frac{(\varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa)'\eta^{(0)}-2\varepsilon_{\varkappa-1}\varepsilon_\varkappa}{2'\eta^{(0)}-(\varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa)},$$

und die Punkte ζ der Seite $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$ von γ_0 genügen der Gleichung

$$(6.)\quad \zeta = \frac{(\varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa)'\zeta-2\varepsilon_{\varkappa-1}\varepsilon_\varkappa}{2'\zeta-(\varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa)},$$

welche einen Kreis darstellt, der den Einheitskreis in den Punkten $\varepsilon_{\varkappa-1}$, $\varepsilon_\varkappa$ orthogonal schneidet. ***Die Begrenzung des Polygons γ_0 wird also von Kreisen gebildet, welche den Einheitskreis unter rechten Winkeln schneiden,*** und, wie leicht einzusehen, constituiren die ausserhalb des Einheitskreises verlaufenden Theile jener Kreislinien die Begrenzung des Gebietes $\bar\gamma_0$, welches die Abbildung der oberen y_0-Halbebene vermittelst der Function $\bar\eta^{(0)}$ darstellt.

Da jedes der Polygone γ und $\bar\gamma$ aus γ_0 oder $\bar\gamma_0$ hervorgeht durch

Abbildung mittelst einer gebrochenen linearen Function, welche die Peripherie des Einheitskreises in sich selbst transformirt, so folgt, dass alle Polygone γ und $\bar{\gamma}$ begrenzt werden von den Einheitskreis orthogonal schneidenden Kreisbogen.

Die Function y_0 von η liefert also die conforme Abbildung irgend eines dieser Kreispolygone auf eine Halbebene, speciell des Polygons γ_0 auf die obere y_0-Halbebene, und von diesem Gesichtspunkte aus lässt sich nun die Theorie dieser Function nach *Riemann*schen Principien *) mit Leichtigkeit entwickeln. Hat man nämlich y_0 als Function von η innerhalb eines Kreispolygons γ oder $\bar{\gamma}$ definirt, so wird y_0 über die Begrenzung dieses Polygons hinaus fortgesetzt, indem man zu jedem Punkte innerhalb des Polygons in Bezug auf jede Seite des letzteren den harmonischen Pol aufsucht und in diesem der Function y_0 den conjugirten Werth beilegt. Es ist folglich z. B. $\bar{\gamma}_{(0,\varkappa)}$ die Polarfigur von γ_0 in Bezug auf den Kreis $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$, und allgemein von zwei confinen Polygonen γ und $\bar{\gamma}$ jedes die Polarfigur des andern in Bezug auf den die gemeinschaftliche Grenze bildenden Kreisbogen.

Setzen wir

$$(7.) \qquad \Sigma_\varkappa^{(0)}\zeta = \frac{(\varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa)\zeta - 2\varepsilon_{\varkappa-1}\varepsilon_\varkappa}{2\zeta-(\varepsilon_{\varkappa-1}+\varepsilon_\varkappa)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n_1),$$

und bezeichnen mit $\Sigma_\varkappa^{(0)}$ allein die lineare ***Substitution,*** welche ζ in $\Sigma_\varkappa^{(0)}\zeta$ überführt; bedeutet ferner

$$U\zeta = \Sigma_{\varkappa_1}^{(0)}\Sigma_{\varkappa_2}^{(0)}\ldots\Sigma_{\varkappa_\mu}^{(0)}\zeta \qquad (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu = 1, 2, \ldots n_1)$$

eine lineare Function von ζ, welche entsteht, indem man in $\Sigma_{\varkappa_1}^{(0)}\zeta$ ersetzt ζ durch $\Sigma_{\varkappa_2}^{(0)}\zeta$, dann hierin ζ durch $\Sigma_{\varkappa_3}^{(0)}\zeta$ u. s. w., endlich in $\Sigma_{\varkappa_1}^{(0)}\Sigma_{\varkappa_2}^{(0)}\ldots\Sigma_{\varkappa_{\mu-1}}^{(0)}\zeta$ ζ durch $\Sigma_{\varkappa_\mu}^{(0)}\zeta$ oder, was dasselbe heisst, indem man auf ζ anwendet erst die Substitution $\Sigma_{\varkappa_\mu}^{(0)}$, dann auf $\Sigma_{\varkappa_\mu}^{(0)}\zeta$ die Substitution $\Sigma_{\varkappa_{\mu-1}}^{(0)}$ u. s. w., endlich auf $\Sigma_{\varkappa_2}^{(0)}\ldots\Sigma_{\varkappa_\mu}^{(0)}\zeta$ die Substitution $\Sigma_{\varkappa_1}^{(0)}$; und möge schliesslich mit

$$(8.) \qquad U = \Sigma_{\varkappa_1}^{(0)}\Sigma_{\varkappa_2}^{(0)}\ldots\Sigma_{\varkappa_\mu}^{(0)}$$

selbst die lineare Substitution, durch welche ζ in $U\zeta$ übergeht, mit 1 die identische Substitution und mit U^{-1} jene Substitution bezeichnet werden, welche $U\zeta$ in ζ zurücktransformirt: dann sieht man leicht, dass

$$(9.) \qquad \Sigma_\varkappa^{(0)}\Sigma_\varkappa^{(0)} = \Sigma_\varkappa^{(0)2} = 1, \quad (\Sigma_\varkappa^{(0)})^{-1} = \Sigma_\varkappa^{(0)}$$

*) Vergl. *Riemann:* Gesammelte Werke, S. 415 ff., S. 283 ff.; *Schottky:* dieses Journal Bd. 83 S. 300 ff.

und

$$(10.) \qquad \Sigma_{\varkappa}^{(0)}\zeta + \Sigma_{\varkappa}^{(0)\prime}\zeta.$$

Die sämmtlichen Substitutionen, welche entstehen durch successive Anwendung irgend welcher der Substitutionen $\Sigma_{\varkappa}^{(0)}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots n_1$), welche also symbolisch darstellbar sind als Producte von Potenzen dieser n_1 Substitutionen, constituiren eine aus diesen letzteren als ***Fundamentalsubstitutionen*** gebildete Gruppe Γ_0, und da zwischen den $\Sigma_{\varkappa}^{(0)}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots n_1$) die n_1 ***Fundamentalrelationen*** (9.) bestehen, so ist jede Substitution der Gruppe Γ_0 nur auf eine Weise in der Form (8.) darstellbar, wenn wir voraussetzen, dass keine zwei aufeinander folgenden der $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ einander gleich sind; wir nennen dann μ den ***Index*** der Substitution U und setzen

$$\mu = \operatorname{Ind} U.$$

Da die Fundamentalrelationen der Gruppe Γ_0 identisch sind mit jenen der Gruppe Ω_0, so folgt, dass Γ_0 und Ω_0 dieselbe Arithmetik haben und einstufig (holoëdrisch) isomorph sind, es haben daher alle für die Gruppe Ω_0 gefundenen Resultate, sofern dieselben unabhängig sind von der specifischen Bedeutung der Operationen ω, auch für die Gruppe Γ_0 Geltung. Die Substitution

$$U = \Sigma_{\varkappa_1}^{(0)} \Sigma_{\varkappa_2}^{(0)} \ldots \Sigma_{\varkappa_\mu}^{(0)}$$

von Γ_0 und die Operation

$$u = \omega_{\varkappa_1}^{(0)} \omega_{\varkappa_2}^{(0)} \ldots \omega_{\varkappa_\mu}^{(0)}$$

von Ω_0 sollen ***entsprechend*** genannt werden, und der gleiche Ausdruck möge auch die Beziehung zwischen Untergruppen von Γ_0 und Ω_0, welche aus entsprechenden Substitutionen bezw. Operationen gebildet sind, bezeichnen. Wir übertragen ferner die für die Gruppe Ω_0 eingeführten Indexbezeichnungen auf die Gruppe Γ_0, indem wir die einer Operation ω, $\bar{\omega}$ oder einer Untergruppe Ω, O entsprechenden Substitutionen oder Untergruppen von Γ_0 durch ein mit denselben Indices versehenes Σ, S oder Γ, G darstellen.

Nun ist nach den Gleichungen (5.), (10.)

$$\eta^{(0,\varkappa)} + \Sigma_{\varkappa}^{(0)} \eta_{\prime}^{(0)},$$

d. h. die Ausübung der Operation $\omega_{\varkappa}^{(0)}$ auf y_0 lässt den harmonischen Werth $'\eta_{\prime}^{(0)}$ von $\eta^{(0)}$ die Substitution $\Sigma_{\varkappa}^{(0)}$ erleiden; hieraus und aus den über die Gruppen Γ_0 und Ω_0 eben gemachten Bemerkungen folgt, dass, wenn auf y_0 die Operation u von Ω_0 angewandt wird und U die entsprechende Substitution von Γ_0 bedeutet, $\eta_{\prime}^{(0)}$ übergeht in $U\eta_{\prime}^{(0)}$ oder dessen harmonischen

Werth, je nachdem Ind U eine gerade oder eine ungerade Zahl ist; es ist also für die durch Gleichung (8.) erklärte Substitution U

$$\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)} \neq U\eta^{(0)}, \quad \text{wenn} \quad \mu \equiv 1 \pmod 2,$$
$$\eta^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu)} = U\eta^{(0)}, \quad \text{wenn} \quad \mu \equiv 0 \pmod 2,$$

d. h. durch Anwendung der Σ-Substitutionen der Gruppe Γ_0 auf $\eta^{(0)}$ erhalten wir die harmonischen Werthe derjenigen Halbzweige der Function η, welche den Punkten der unteren y_0-Halbebene entsprechen, durch Anwendung der S-Substitutionen von Γ_0, d. h. der Substitutionen der durch die Congruenz

$$\text{Ind}\, U \equiv 0 \pmod 2$$

charakterisirten ausgezeichneten Untergruppe G_0 von Γ_0 alle jene Halbzweige von η, welche zu den Punkten der oberen y_0-Halbebene gehören. ***Die Function $y_0 = f(\eta)$ bleibt also ungeändert, wenn η eine Substitution von G_0, sie geht in ihren conjugirten Werth über, wenn $'\eta$ eine Σ-Substitution von Γ_0 erleidet.***

Jede Substitution von G_0 ist darstellbar als symbolisches Product von Potenzen gewisser Fundamentalsubstitutionen, deren sämmtliche Producte von Potenzen auch wieder in G_0 enthalten sind. Ein System solcher Substitutionen ist z. B.

$$S_1 = \Sigma_1^{(0)}\Sigma_2^{(0)}, \quad S_2 = \Sigma_2^{(0)}\Sigma_3^{(0)}, \quad \ldots \quad S_{n_1-1} = \Sigma_{n_1-1}^{(0)}\Sigma_{n_1}^{(0)}$$

und deren inverse *); es bedeutet hier $S_\varkappa$ die lineare Substitution, welche $\eta^{(0)}$ erfährt, wenn y_0 einen einfachen Umgang um den Punkt $a_\varkappa^{(0)}$ vollzieht, während die Substitution S_{n_1}, die durch den Umlauf der unabhängigen Variablen um den Punkt $a_{n_1}^{(0)}$ erzielt wird, gleich ist:

$$S_{n_1} = (S_1 S_2 \ldots S_{n_1-1})^{-1} = S_{n_1-1}^{-1} S_{n_1-2}^{-1} \ldots S_1^{-1}.$$

Ein anderes System von Fundamentalsubstitutionen der Gruppe G_0 wird geliefert durch die (n_1-1) Substitutionen $\Sigma_\varkappa^{(0)}\Sigma_\lambda^{(0)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots \varkappa-1, \varkappa+1, \ldots n_1)$ und deren inverse, für jedes $\varkappa = 1, 2, \ldots n_1$; durch diese Substitutionen werden in dem Bereiche $R_\varkappa$, innerhalb dessen die Function y_0 von η jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, je zwei Seiten, welche in Bezug auf die Diagonale $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$ symmetrisch liegen (d. h. Polarfiguren in Bezug auf den Kreis $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$ sind) in einander transformirt. Herr *Poincaré* nennt darum einen solchen Bereich $R_\varkappa$ ein ***Fundamentalpolygon*** (polygone générateur

*) Vergl. S. 204.

oder fondamental)*) der Function y_0 von η. Eine eindeutige Function von η, welche innerhalb eines Fundamentalpolygons nur an einer endlichen Anzahl von Stellen von erster Ordnung unendlich wird und durch die den Einheitskreis in sich selbst transformirenden Substitutionen einer Gruppe G_0 ungeändert bleibt, möge nach Herrn *Poincaré* eine ***Fuchssche Function*** heissen**), und zwar sagen wir, dieselbe sei ***von der μ-ten Ordnung,*** wenn μ die Anzahl ihrer Unendlichkeitsstellen innerhalb eines Fundamentalpolygons bedeutet. ***Es ist also $y_0 = f(\eta)$ eine zur Gruppe G_0 gehörige Fuchssche Function erster Ordnung.***

Nun ist leicht einzusehen, dass auch jedes y_λ (für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) eine *Fuchs*sche Function erster Ordnung von η ist. In der That ist y_λ rational ausdrückbar durch jedes $y_{\lambda+\mu}$ beziehungsweise $\eta_{\lambda+\mu}$, und wenn

$$y_\lambda = \overset{\lambda}{f}_{\lambda+\mu}(\eta_{\lambda+\mu}),$$

haben wir:

$$y_\lambda = \lim_{\mu=\infty} \overset{\lambda}{f}_{\lambda+\mu}(\eta) = \overset{\lambda}{f}(\eta),$$

also y_λ eine eindeutige Function von η, die offenbar ebenso wie y_0 nur innerhalb und auf der Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene existirt. Als Function von y_0 gehörten $y_\lambda^{(0)}$ bezw. $\eta_\lambda^{(0)}$ zur Gruppe Ω_λ, und die übrigen Zweige der algebraischen Function y_λ von y_0 entstehen durch Anwendung der Operationen von P_λ auf y_0; bezeichnen wir also mit H_λ die Gesammtheit der den Operationen von P_λ entsprechenden Substitutionen von Γ_0, so ist:

$$H_\lambda = (1, \Sigma_1^{(\lambda-1)}, \ldots \Sigma_{n_\lambda}^{(\lambda-1)}) \ldots (1, \Sigma_1^{(0)}, \ldots \Sigma_{n_1}^{(0)})$$

und

$$\Gamma_0 = \Gamma_\lambda H_\lambda.$$

Die Function y_λ bleibt ungeändert, wenn η eine S-Substitution von Γ_λ, d. h. eine Substitution der Gruppe G_λ erleidet; sie geht in ihren conjugirten Werth über, wenn auf $'\eta$ eine Σ-Substitution von Γ_λ ausgeübt wird. Bedeutet $\varphi_0^{(\lambda)}$ das Gebiet, welches wir erhalten, indem wir γ_0 mit allen jenen Polygonen γ bezw. $\bar{\gamma}$ vereinigen, die aus γ_0 hervorgehen durch Abbildung mittelst der Functionen $S\eta^{(0)}$ bezw. $\Sigma'\eta^{(0)}$, wenn wir S der Reihe nach alle S-Substitutionen, Σ alle Σ-Substitutionen von H_λ durchlaufen lassen, dann liefert die Function y_λ die eindeutige conforme Abbildung des Gebietes $\varphi_0^{(\lambda)}$ auf

*) Acta Mathematica Bd. I S. 20; Comptes Rendus 1886 I S. 43.

**) Acta Mathematica Bd. I S. 227.

die obere y_λ-Halbebene und ist auf der Begrenzung von $\varphi_0^{(\lambda)}$ real. $\varphi_0^{(\lambda)}$ ist ein Kreispolygon, dessen $n_{\lambda+1}$ auf der Peripherie des Einheitskreises gelegene Eckpunkte den Verzweigungspunkten $y_\lambda = a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots a_{n_{\lambda+1}}^{(\lambda)}$ der Function η von y_λ entsprechen, und dessen Seiten den Einheitskreis orthogonal schneiden; es kann aus $\varphi_0^{(\lambda-1)}$ hergeleitet werden, indem man sich die Polarfiguren von $\varphi_0^{(\lambda-1)}$ in Bezug auf jede der n_λ Seiten dieses letzteren Polygons bildet, und die so entstehenden n_λ Polygone mit $\varphi_0^{(\lambda-1)}$ vereinigt. Construirt man sich die Polarfigur von $\varphi_0^{(\lambda)}$ in Bezug auf irgend eine seiner $n_{\lambda+1}$ Seiten, so bildet diese mit $\varphi_0^{(\lambda)}$ zusammengenommen ein Fundamentalpolygon der Function $y_\lambda = f(\eta)$, welches die eindeutige conforme Abbildung der ganzen y_λ-Ebene liefert. Die Abbildungen dieses Fundamentalpolygons durch Substitutionen der Gruppe G_λ erfüllen den Einheitskreis vollständig und bedecken dessen Fläche einfach. Auch die übrigen Zweige der algebraischen Function y_λ von y_0 sind *Fuchs*sche Functionen erster Ordnung von η; die Substitutionsgruppen, durch welche dieselben ungeändert bleiben, erhält man, indem man G_λ mit den Substitutionen von H_λ transformirt.

Wir haben also durch unseren Iterationsprocess nicht nur die *Fuchs*sche Function y_0 mit der Gruppe G_0, sondern zugleich eine unendliche Anzahl anderer *Fuchs*scher Functionen erhalten, deren Gruppen $G_1, G_2, G_3, \ldots$ Untergruppen mit endlichem Quotienten von G_0 sind, und zwischen denen und y_0 algebraische Gleichungen mit in y_0 linearen Coefficienten bestehen.

Die *Fuchs*sche Function erster Ordnung $y_0 = f(\eta)$ liess sich, wie wir sahen, herstellen bei ganz willkürlicher Angabe der n_1 realen Werthe $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$, welche als Verzweigungsstellen der Umkehrungsfunction η von y_0 fungiren. Andererseits können aber zur Bestimmung der *Fuchs*schen Function auch die n_1 Werthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n_1}$ auf der Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene beliebig gegeben werden, welche irgend ein Zweig von η an den Verzweigungsstellen annehmen soll. In der That ist alsdann die Gruppe Γ_0 bezw. G_0 unmittelbar bekannt, und man hat nur je zwei auf einander folgende der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n_1}$ durch Kreise, die den Einheitskreis orthogonal schneiden, zu verbinden, um nach dem *Dirichlet*schen Principe $y_0 = f(\eta)$ als diejenige Function construiren zu können, welche das durch jene Kreise begrenzte Gebiet auf eine Halbebene conform abbildet. Legt man der Theorie der *Fuchs*schen Functionen diese Bestimmungsweise, d. h. ihre Definition aus der Gruppe zu Grunde, so hat man hinterher den Nachweis für

die Existenz der Function $y_0 = f(\eta)$, bei beliebig gegebenen realen Werthen der $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ... $a_{n_1}^{(0)}$, zu liefern; diesen Nachweis hat Herr *Poincaré*, der Schöpfer der systematischen Theorie der *Fuchs*schen Functionen, für den von ihm behandelten allgemeinsten Fall mit Hülfe der *„méthode de continuité“* *) erbracht; eine Reihe anderer von den Herren *Fuchs* und *Poincaré* entdeckter Sätze soll für die von uns betrachtete specielle Gattung *Fuchs*scher Functionen im Folgenden noch kurz entwickelt werden.

V.

Sei $G(\eta)$ eine *Fuchs*sche Function q-ter Ordnung mit der Gruppe G_0, und möge dieselbe innerhalb des Fundamentalpolygons $R_1 = \gamma_0 + \bar{\gamma}_{(0,1)}$ in den Punkten $\eta = r_1, r_2, \ldots r_p$ von erster Ordnung Null, in den Punkten $\eta = s_1, s_2, \ldots s_q$ von erster Ordnung unendlich werden, dann ist bekanntlich

$$\int d\log G(\eta) = p - q,$$

wenn die Integration über die Peripherie von R_1 erstreckt wird. Es ist also:

$$\sum_{\lambda=1}^{n_1-1} \left\{ \int_{\varepsilon_\lambda}^{\varepsilon_{\lambda+1}} d\log G(\eta) + \int_{\bar{\varepsilon}_{\lambda+1}}^{\bar{\varepsilon}_\lambda} d\log G(\eta) \right\} = p - q,$$

wo

$$\bar{\varepsilon}_\lambda = \Sigma_1^{(0)} \Sigma_{\lambda+1}^{(0)} \varepsilon_\lambda,$$
$$\bar{\varepsilon}_{\lambda+1} = \Sigma_1^{(0)} \Sigma_{\lambda+1}^{(0)} \varepsilon_{\lambda+1}$$

und die Integrationen längs der den Einheitskreis orthogonal schneidenden Kreise auszuführen sind. Wenn nun

$$\Sigma_1^{(0)} \Sigma_{\lambda+1}^{(0)} \eta = \zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$$d\log G(\eta) = g(\eta) d\eta$$

gesetzt wird, haben wir:

$$g(\zeta) = g(\eta)(\gamma\eta + \delta)^2,$$

folglich

$$\int_{\bar{\varepsilon}_{\lambda+1}}^{\bar{\varepsilon}_\lambda} g(\zeta) d\zeta = -\int_{\varepsilon_\lambda}^{\varepsilon_{\lambda+1}} g(\eta)(\gamma\eta + \delta)^2 \frac{d\zeta}{d\eta} d\eta = -\int_{\varepsilon_\lambda}^{\varepsilon_{\lambda+1}} g(\eta) d\eta,$$

und daher

$$p = q,$$

---

*) Acta Mathematica Bd. IV S. 233—278.

d. h. ***eine Fuchssche Function wird innerhalb des Fundamentalpolygons ebenso oft erster Ordnung Null als erster Ordnung unendlich.***

Wenn $y_0 = m_\varkappa$ dem $\eta = r_\varkappa$ entspricht, $y_0 = \mu_\varkappa$ dem $\eta = s_\varkappa$, so ist:

$$G(\eta) = \text{const.} \prod_{\varkappa=1}^{q} \frac{y_0 - m_\varkappa}{y_0 - \mu_\varkappa},$$

d. h. ***jede zur Gruppe G_0 gehörige Fuchssche Function ist rational durch y_0 ausdrückbar*** *).

Eine *Fuchs*sche Function erster Ordnung, die durch die Substitutionen der Gruppe G_0 ungeändert bleibt, ist demnach eine lineare Function von y_0, und umgekehrt ist klar, dass auch jede lineare Function von y_0 eine *Fuchs*sche Function erster Ordnung mit der Gruppe G_0 sei. Man kann diesen Umstand dazu benutzen, um für drei der Punkte $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ ganz willkürliche Werthe zu fixiren; die übrigen $(n_1 - 3)$ dieser Punkte müssen aber dann auf dem durch jene drei Punkte gelegten Kreise angenommen werden. Dass jede zur Gruppe G_0 gehörige *Fuchs*sche Function nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene definirt sei, ist a posteriori auch daher einleuchtend, dass, wenn $\mathrm{mod}\,\zeta < 1$, für eine Σ-Substitution von Γ_0 $\mathrm{mod}\,\Sigma\zeta > 1$, also $\mathrm{mod}\,\Sigma'\zeta < 1$ und für eine Substitution S von G_0 $\mathrm{mod}\,S\zeta < 1$ ist. Im Folgenden wollen wir die $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ nach wie vor real, aber $a_{n_1}^{(0)} = \infty$ annehmen.

Setzen wir den Differentialausdruck

$$\frac{3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 - 2\,\frac{dz}{dx}\,\frac{d^3z}{dx^3}}{4\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \Delta\left(\frac{z}{x}\right),$$

so ist leicht einzusehen, dass

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right)dx^2 = -\Delta\left(\frac{x}{z}\right)dz^2,$$

und wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige Constante bedeuten, hat man ferner

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right) = \Delta\left(\frac{\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}}{x}\right),$$

vorausgesetzt, dass $\alpha\delta - \gamma\beta$ von Null verschieden sei.

Offenbar ist $\Delta\left(\frac{\eta}{y_0}\right)$ eine eindeutige Function von η, und da y_0 un-

*) Vergl.: *Schottky,* dieses Journal Bd. 83 S. 309 ff.; *Poincaré,* Acta Mathematica Bd. I S. 227 ff.

geändert bleibt, wenn η eine Substitution der Gruppe G_0 erfährt, ist $\Delta\left(\frac{\eta}{y_0}\right)$ eine zu dieser Gruppe gehörige *Fuchs*sche Function, folglich eine rationale Function $Q_0(y_0)$ von y_0; wir haben daher:

$$\Delta\left(\frac{\eta}{y_0}\right) = -\Delta\left(\frac{y_0}{\eta}\right)\left(\frac{d\eta}{dy_0}\right)^2 = Q_0(y_0).$$

Wenn wir auf $'\eta$ eine Σ-Substitution der Gruppe Γ_0 anwenden, d. h. η in eine lineare Function von $'\eta$ verwandeln, wodurch y_0 in y_0' übergeht, so verwandelt sich auch $Q_0(y_0)$ in seinen conjugirten Werth, und hieraus folgt, dass die rationale Function $Q_0(y_0)$ ***reale Coefficienten*** haben muss, wenn man sich in derselben Zähler und Nenner von gemeinsamen Factoren befreit denkt. Setzen wir ferner

$$z_1 = \sqrt{\frac{dy_0}{d\eta}}, \quad z_2 = \eta\sqrt{\frac{dy_0}{d\eta}},$$

so ist:

$$\frac{1}{z_1}\frac{d^2z_1}{dy_0^2} = \frac{1}{z_2}\frac{d^2z_2}{dy_0^2} = \Delta\left(\frac{\eta}{y_0}\right) = Q_0(y_0),$$

d. h. *die Functionen z_1, z_2 genügen der homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$(A.) \qquad \frac{d^2z}{dy_0^2} = z.Q_0(y_0)$$

und constituiren, da $\frac{z_1}{z_2} = \eta$ keine Constante ist, ein ***Fundamentalsystem*** derselben *). Die Integrale z_1, z_2 besitzen die Punkte $y_0 = a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_0-1}^{(0)}, \infty$ zu Verzweigungspunkten, denn nur für diese kann $\frac{dy_0}{d\eta}$ verschwinden und η eine Verzweigung erleiden; diese Werthe liefern demzufolge die singulären Punkte der Differentialgleichung (*A.*), d. h. die Unendlichkeitsstellen der Function $Q_0(y_0)$.

Um die Form der rationalen Function $Q_0(y_0)$ genauer bestimmen zu können, bilden wir uns das „zum singulären Punkte $a_x^{(0)}$ gehörige Fundamentalsystem" z_{x1}, z_{x2}. Der Integralquotient:

$$\frac{z_2}{z_1} = \eta$$

erleidet durch einen einfachen Umgang der unabhängigen Variabeln y_0 um

*) Vergl. ***Riemann:*** Ges. Werke S. 298 ff.; S. 415, 416; ***Fuchs,*** dieses Journal Bd. 89 S. 151; *Poincaré* l. c. S. 229.

$a_\varkappa^{(0)}$ die Substitution $\Sigma_\varkappa^{(0)}\Sigma_{\varkappa+1}^{(0)}$, und aus den für die Coefficienten dieser Substitution gefundenen Ausdrücken folgt leicht, dass die zum singulären Punkte $a_\varkappa^{(0)}$ gehörige *Fundamentalgleichung* zwei gleiche Wurzeln hat, dass also in der Umgebung dieses Punktes:

$$z_{\varkappa 1} = (y_0 - a_\varkappa^{(0)})^{\frac{1}{2}}\, P_1(y_0|a_\varkappa^{(0)}),$$
$$z_{\varkappa 2} = (y_0 - a_\varkappa^{(0)})^{\frac{1}{2}}\{P_2(y_0|a_\varkappa^{(0)}) + P_1(y_0|a_\varkappa^{(0)})\log(y_0 - a_\varkappa^{(0)})\},$$

wo P_1, P_2 nach ganzen Potenzen von $(y_0 - a_\varkappa^{(0)})$ fortschreitende Reihen bedeuten und für $\varkappa = n_1$, d. h. $a_{n_1}^{(0)} = \infty$, an Stelle von $y_0 - a_\varkappa^{(0)}$ zu nehmen ist $\frac{1}{y_0}$. Da im Punkte $y_0 = a_\varkappa^{(0)}$ sowohl η als auch dessen Ableitungen bestimmte Werthe haben, können P_1, P_2 nicht unendlich viele negative Potenzen enthalten, die Gleichung (*A.*) gehört folglich zu der von Herrn *Fuchs* *) charakterisirten Klasse linearer homogener Differentialgleichungen, welche ich bei einer früheren Gelegenheit als *Fuchssche Klasse* bezeichnet habe. Die Differenz der Wurzeln der zu $a_\varkappa^{(0)}$ gehörigen *determinirenden* Fundamentalgleichung muss eine ganze Zahl sein, und da y_0 eine eindeutige Function von η ist, folgt hieraus, nach den Principien von Herrn *Fuchs* **), dass diese Wurzeln einander gleich sein müssen. Da ferner in (*A.*) der Coefficient von $\frac{dz}{dy_0}$ gleich Null ist, hat jede dieser Wurzeln für einen im Endlichen gelegenen singulären Punkt den Werth $\frac{1}{2}$, für den unendlich fernen Punkt dagegen den Werth $-\frac{1}{2}$. P_1, P_2 sind demnach im Punkte $y_0 = a_\varkappa^{(0)}$ endlich und von Null verschieden, und aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen folgt nun leicht ***), dass $Q_0(y_0)$ die Form hat:

$$(1.)\qquad Q_0(y_0) = \frac{[(n_1-1)^2-1]\,g(y_0)\prod_{\lambda=1}^{n_1-3}(y_0-p_\lambda^{(0)}) - \left\{\prod_{\varkappa=1}^{n_1-1}\frac{g(y_0)}{y_0-a_\varkappa^{(0)}}\right\}^2}{4g(y_0)^2},$$

wo

$$g(y_0) = \prod_{\varkappa=1}^{n_1-1}(y_0 - a_\varkappa^{(0)}); \quad a_{n_1}^{(0)} = \infty$$

und $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots p_{n_1-3}^{(0)}$ reale Zahlwerthe sind. Die Form (1.) der Function $Q_0(y_0)$ wurde bestimmt aus der Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (*A.*) der *Fuchs*schen Klasse angehöre, dass ihre singulären Punkte $y_0 = a_1^{(0)}$,

---

*) Dieses Journal Bd. 66 S. 146.

**) ibid. Bd. 89 S. 151 ff.

***) Vergl. *Fuchs,* dieses Journal Bd. 76 S. 183.

$a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ seien, und dass ihre determinirenden Fundamentalgleichungen die doppelte Wurzel $\frac{1}{2}$, bezw. für $a_{n_1}^{(0)} = \infty$ die doppelte Wurzel $-\frac{1}{2}$ haben; die trotz dieser Bedingungen unbestimmt bleibenden Parameter $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots p_{n_1-3}^{(0)}$ bestimmen sich durch die Forderung, dass y_0 eine ***Fuchs***sche Function des Integralquotienten sei.

Für $n_1 = 3$ wird $Q_0(y_0)$ durch Gleichung (1.) vollkommen bestimmt, es ist nämlich, wenn wir überdies $a_1^{(0)} = 0$, $a_2^{(0)} = 1$ wählen:

$$Q_0(y_0) = -\frac{1}{4}\frac{y_0^2 - y_0 + 1}{y_0^2(y_0-1)^2},$$

die Differentialgleichung (*A.*) lautet also:

$$\frac{d^2z}{dy_0^2} + \frac{1}{4}\frac{y_0^2 - y_0 + 1}{y_0^2(y_0-1)^2}z = 0$$

und stimmt demnach im Wesentlichen mit derjenigen überein, welcher die Periodicitätsmoduln eines elliptischen Integrals erster Gattung als Functionen des Moduls genügen. Die Function η von y_0 ist also in diesem Falle identisch mit der zuerst von Herrn ***Hermite*** in die Analysis eingeführten ***Modulfunction***, deren ausführliche Theorie Herr ***Fuchs*** *), von der angegebenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ausgehend, entwickelt hat.

Wenn $n_1 > 3$, haben wir bei ***willkürlich gegebenen*** realen Werthen der $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1-1}^{(0)}$

$$Q_0(y_0) = \lim_{\lambda=\infty} \Delta\left(\frac{\eta_\lambda}{y_0}\right),$$

die Parameter $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots p_{n_1-3}^{(0)}$ ***lassen sich also stets so bestimmen,*** dass y_0 eine ***Fuchs***sche Function des Integralquotienten ist **); wir wollen nun noch nachweisen, dass diese Bestimmung jener Parameter ***nur auf eine einzige Weise möglich ist*** ***). Um diesen Beweis liefern zu können, bedarf es jedoch noch einiger Bemerkungen über die Differentialgleichung (*A.*).

Es ist in der Umgebung des Punktes $y_0 = a_\varkappa^{(0)}$:

$$\frac{z_{\varkappa 2}}{z_{\varkappa 1}} = \log(y_0 - a_\varkappa^{(0)}) + \mathfrak{P}_\varkappa(y_0 | a_\varkappa^{(0)}),$$

wo $\mathfrak{P}_\varkappa$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $y_0 - a_\varkappa^{(0)}$ fortschreitende Reihe bedeutet. Sei nun

---

*) Dieses Journal Bd. 83.

) Vergl. ***Poincaré:* Acta Mathematica Bd. I S. 234, Bd. IV S. 233—278.

) Vergl. ***Poincaré ibid. Bd. IV S. 231 ff.

$$\left.\begin{aligned} z_{\varkappa 1} &= c_{11}^{(\varkappa)} z_1 + c_{12}^{(\varkappa)} z_2 \\ z_{\varkappa 2} &= c_{21}^{(\varkappa)} z_1 + c_{22}^{(\varkappa)} z_2 \end{aligned}\right\} \quad c_{11}^{(\varkappa)} c_{22}^{(\varkappa)} - c_{12}^{(\varkappa)} c_{21}^{(\varkappa)} = 1,$$

so ist leicht einzusehen, dass die Function

$$\xi_\varkappa = e^{\frac{c_{22}^{(\varkappa)}\eta + c_{21}^{(\varkappa)}}{c_{12}^{(\varkappa)}\eta + c_{11}^{(\varkappa)}}} = (y_0 - a_\varkappa^{(0)}) e^{\mathfrak{P}_\varkappa(y_0 | a_\varkappa^{(0)})}$$

ungeändert bleibt, wenn y_0 einen Umlauf um $a_\varkappa^{(0)}$ vollzieht, und dass y_0 eine allenthalben eindeutige Function von $\xi_\varkappa$ ist, die aber in der Umgebung der Punkte $\xi_\varkappa = \delta_\lambda$, welche den von $a_\varkappa^{(0)}$ verschiedenen Werthen $y_0 = a_\lambda^{(0)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots n_1)$ entsprechen, in der Form

$$y_0 - a_\lambda^{(0)} = \mathfrak{P}\left(e^{\frac{1}{\mu_1(\xi_\varkappa - \delta_\lambda) + \mu_2(\xi_\varkappa - \delta_\lambda)^2 + \cdots}}\right)$$

darstellbar ist, wo $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzen Potenzen der in Parenthesen stehenden Grösse fortschreitende Reihe, μ_1, μ_2, ... Constante bedeuten, d. h. y_0 als Function von $\xi_\varkappa$ besitzt in den Punkten δ_λ $(\lambda \leqq \varkappa)$ eine *wesentliche Singularität.* Setzen wir:

$$q_\varkappa = e^{\frac{1}{c_{12}^{(\varkappa)} + c_{11}^{(\varkappa)}} \frac{\eta - 1}{c_{12}^{(\varkappa)}\eta + c_{11}^{(\varkappa)}}},$$

so ist:

$$\xi_\varkappa = \text{const.} q_\varkappa$$

und folglich y_0 auch eine allenthalben eindeutige Function von $q_\varkappa$.

Vollzieht y_0 einen einfachen Umlauf um den Punkt $a_\varkappa^{(0)}$, so geht η über in:

$$\eta^{(0,\varkappa,\varkappa+1)} = \frac{2\pi i c_{11}^{(\varkappa)2} + (1 + 2\pi i c_{11}^{(\varkappa)} c_{12}^{(\varkappa)})\eta}{1 - 2\pi i c_{11}^{(\varkappa)} c_{12}^{(\varkappa)} - 2\pi i c_{12}^{(\varkappa)2}\eta};$$

diese lineare Function muss die Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene in sich selbst transformiren, und die sich hieraus für $c_{11}^{(\varkappa)}$, $c_{12}^{(\varkappa)}$ ergebenden Bedingungsgleichungen lehren, dass:

$$\operatorname{sgn}\Re\left(\frac{1}{c_{11}^{(\varkappa)} + c_{12}^{(\varkappa)}} \frac{\eta - 1}{c_{12}^{(\varkappa)}\eta + c_{11}^{(\varkappa)}}\right) = \operatorname{sgn}(\operatorname{mod}\eta - 1).$$

Es ist demnach, wenn $\operatorname{mod}\eta < 1$, auch $\operatorname{mod} q_\varkappa < 1$, und wenn $\operatorname{mod}\eta = 1$, auch $\operatorname{mod} q_\varkappa = 1$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n_1)$. Es ist also y_0 für $\varkappa = 1, 2, \ldots n_1 - 1$, $\frac{1}{y_0}$ für $\varkappa = n_1$, eine innerhalb des Einheitskreises der $q_\varkappa$-Ebene holomorphe Function von $q_\varkappa$, die für Werthe von $q_\varkappa$, deren absoluter Betrag grösser als 1 ist, nicht existirt; die Punkte der Peripherie dieses Einheitskreises, welchen überhaupt Werthe der Function y_0 entsprechen, gehören zu den Punkten

$y_0 = a_\lambda^{(0)}$ $(\lambda \gtrless \varkappa)$ und sind demnach wesentlich singuläre Stellen für diese Function, während für $y_0 = a_\varkappa^{(0)}$ ist:

$$\frac{z_{\varkappa 2}}{z_{\varkappa 1}} = \infty, \quad \text{also} \quad \frac{c_{11}^{(\varkappa)}}{c_{12}^{(\varkappa)}} = -\varepsilon_\varkappa, \quad \text{d. h.} \quad q_\varkappa = 0.$$

In der Umgebung von $q_\varkappa = 0$, d. h. innerhalb des Einheitskreises der $q_\varkappa$-Ebene ist y_0 entwickelbar nach positiven ganzen Potenzen von $q_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots n_1 - 1$, während für $\varkappa = n_1$, für welchen Werth wir $q_{n_1} = q$ setzen wollen:

$$(2.) \qquad \frac{1}{y_0} = A_1 q + A_2 q^2 + \cdots,$$

wo A_1 von Null verschieden ist, und diese Reihe convergirt für alle Werthe von q, deren absoluter Betrag < 1 *), stellt uns also die Function y_0 in ihrer Totalität dar.

Wir formuliren nun den zu beweisenden Satz in folgender Weise. Durch unseren Iterationsprocess haben wir die Differentialgleichung (*A.*) mit den singulären Punkten $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ erhalten; möge

$$(B.) \qquad \frac{d^2 w}{dy_0^2} = R(y_0).w$$

eine andere Differentialgleichung sein, welche zur *Fuchs*schen Klasse gehört, deren singuläre Punkte dieselben sind wie die von (*A.*), deren determinirende Fundamentalgleichungen für die im Endlichen gelegenen singulären Punkte sämmtlich die doppelte Wurzel $\frac{1}{2}$, für den unendlich fernen Punkt die doppelte Wurzel $-\frac{1}{2}$ haben, und wo y_0 eine *Fuchs*sche Function des Integralquotienten ζ ist; dann soll gezeigt werden, dass (*B.*) mit (*A.*) identisch ist.

Bezeichne w_1, w_2 ein Fundamentalsystem von (*B.*), für welches

$$\frac{w_2}{w_1} = \zeta,$$

dann ist y_0 eine eindeutige Function von ζ, die ungeändert bleibt, wenn auf ζ eine Gruppe E_0 von linearen Substitutionen angewandt wird, welche die Peripherie des Einheitskreises der ζ-Ebene in sich selbst transformiren. Man sieht leicht ein, dass alsdann die ζ-Werthe, welche den singulären Punkten $y_0 = a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}$ entsprechen, auf der Peripherie des Einheitskreises gelegen sind, mögen die diesen Punkten entsprechenden Werthe eines bestimmten Zweiges der Function ζ sein $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots \bar{\varepsilon}_{n_1}$. Das zum

*) Vergl. *Poincaré,* Acta Mathematica Bd. I S. 215.

Punkte $y_0 = a_{n_1}^{(0)} = \infty$ gehörige Fundamentalsystem sei:

$$\left.\begin{aligned} w_{\infty 1} &= \gamma_{11} w_1 + \gamma_{12} w_2 \\ w_{\infty 2} &= \gamma_{21} w_1 + \gamma_{22} w_2 \end{aligned}\right\} \quad \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} = 1,$$

und setzen wir

$$\bar{q} = e^{\frac{1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}} \frac{\zeta-1}{\gamma_{12}\zeta+\gamma_{11}}},$$

so entspricht dem $y_0 = \infty$ der Werth $\bar{q} = 0$, und wenn $\mathrm{mod}\zeta = 1$, ist auch $\mathrm{mod}\bar{q} = 1$; die den singulären Punkten $y_0 = a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1-1}^{(0)}$ entsprechenden $\bar{q}$-Werthe liegen also auf der Peripherie des Einheitskreises. In der Umgebung von $\bar{q} = 0$ ist y_0 eine holomorphe Function von $\bar{q}$, also holomorph für $\mathrm{mod}\bar{q} < 1$, und für diese Werthe von $\bar{q}$ gilt demnach die Entwickelung:

$$(3.) \qquad \frac{1}{y_0} = B_1\bar{q} + B_2\bar{q}^2 + \cdots,$$

wo B_1 von Null verschieden ist. Aus den Gleichungen (2.), (3.) folgt nunmehr, dass für $\mathrm{mod}q < 1$ und $\mathrm{mod}\bar{q} < 1$, $\bar{q}$ eine eindeutige Function von q und q eine eindeutige Function von $\bar{q}$ sei, es ist also der Quotient

$$\frac{\bar{q}}{q} = t$$

eine eindeutige Function von q für $\mathrm{mod}q < 1$ und eine ebensolche Function von $\bar{q}$ für $\mathrm{mod}\bar{q} < 1$. Sei

$$q = r + si,$$
$$M = \log \mathrm{mod} t,$$

so genügt M der partiellen Differentialgleichung

$$(4.) \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = 0,$$

während y_0 als Function von $\bar{q}$ die Differentialgleichung

$$\frac{dy_0}{d\bar{q}} = \frac{w_1^2}{\bar{q}(\log\bar{q})^2\gamma_{12}^2}$$

befriedigt, und $\frac{1}{y_0}$ ist ein in der Umgebung von $\bar{q} = 0$ holomorphes Integral dieser Differentialgleichung *). Dasselbe bleibt holomorph, solange $\frac{dy_0}{d\bar{q}}$ eine

*) Vergl. ***Fuchs,*** dieses Journal Bd. 83 S. 25.

holomorphe Function von y_0 und $\bar{q}$ ist *), also jedenfalls für $\mathrm{mod}\bar{q} < 1$. Sei w_{x1}, w_{x2} das zum singulären Punkte $y_0 = a_x^{(0)}$ gehörige Fundamentalsystem der Differentialgleichung (*B.*) und

$$\frac{w_{x2}}{w_{x1}} = \frac{\gamma_{21}^{(x)} + \gamma_{22}^{(x)}\zeta}{\gamma_{12}^{(x)}(\zeta - \bar{\varepsilon}_x)},$$

$$\bar{q}_x = e^{\frac{1}{\gamma_{11}^{(x)} + \gamma_{12}^{(x)}} \frac{\zeta - 1}{\gamma_{12}^{(x)}\zeta + \gamma_{11}^{(x)}}},$$

dann ist $\bar{q}_x = 0$ für $y_0 = a_x^{(0)}$, und y_0 ist eine holomorphe Function von q_x, wenn $\mathrm{mod}\bar{q}_x < 1$. Es lässt sich daher in der y_0-Ebene ein den Punkt $a_x^{(0)}$ in sich schliessender Bereich f_x abgrenzen, innerhalb dessen $\mathrm{mod}\bar{q}_x$ stets kleiner ist als 1. Aber so lange $\mathrm{mod}\bar{q}_x < 1$, bleibt $\mathrm{mod}\zeta$ entweder stets kleiner oder stets grösser als 1, d. h. alle ζ-Werthe, welche y_0-Punkten des Bereiches f_x entsprechen, liegen entweder sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb des Einheitskreises der ζ-Ebene. Sei nun $\bar{q} = \varrho_x$ ein Punkt der Peripherie des Einheitskreises, welcher dem $\zeta = \bar{\varepsilon}_x$ entspricht, dann werden in einer gewissen Umgebung von ϱ_x die $\bar{q}$-Werthe, welchen überhaupt Stellen der Function y_0 entsprechen, entweder sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb des Einheitskreises der $\bar{q}$-Ebene liegen, aber da y_0 innerhalb dieses Einheitskreises holomorph ist, wird man ϱ_x mit einem theils im Innern theils ausserhalb des Einheitskreises verlaufenden Bereiche umgeben können, in dessen ausserhalb dieses Kreises gelegenem Theile sich kein $\bar{q}$-Punkt vorfindet, der einem y_0-Werthe entspräche. Nehmen wir nun an, es gäbe auf der Peripherie des Einheitskreises der $\bar{q}$-Ebene einen Bogen σ von endlicher Länge, dessen einem Endpunkte ϱ der singuläre Werth $y_0 = a_x^{(0)}$ entspricht, auf dem sich aber sonst kein Punkt findet, in welchem die Function y_0 von $\bar{q}$ entweder nicht existirt oder gleich einem der singulären Werthe $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ... $a_{n_1-1}^{(0)}$ wird, dann wäre $\frac{dy_0}{d\bar{q}}$ längs σ holomorph; es liesse sich daher **) y_0 über den Bogen σ hinweg nach dem ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Theile der $\bar{q}$-Ebene als holomorphe Function fortsetzen und bliebe auch in diesem ganzen Theile holomorph. Dann würden aber auch den ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Punkten

*) *Briot et Bouquet,* Journal de l'École Polytechnique Cah. 36 p. 138.

**) Vergl. hierfür, wie für die ganze Schlussweise: *Fuchs,* l. c. S. 26, 27.

der Umgebung von ϱ Werthe der Function y_0 entsprechen, was den früher gefundenen Resultaten widerspräche. Ein solcher Bogen σ kann sich folglich nicht vorfinden, d. h. es giebt in jeder Nähe eines jeden Punktes der Peripherie des Einheitskreises der $\bar{q}$-Ebene Stellen, wo die Function y_0 wesentlich singulär ist oder gar nicht existirt, und hieraus schliessen wir, dass den $\bar{q}$-Werthen, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, q-Werthe entsprechen, deren absoluter Betrag ebenfalls gleich 1 ist, und umgekehrt, dass also für $\mathrm{mod} q = 1$ $\mathrm{mod} t = 1$, also $M = 0$ ist*). Da aber M eine holomorphe Function von r, s ist (für $r^2+s^2 < 1$), die der partiellen Differentialgleichung (4.) genügt, folgt, dass M identisch Null ist, und also

$$\mathrm{mod} q = \mathrm{mod} \bar{q},$$

d. h.

$$q = e^{\vartheta i} \bar{q},$$

wo ϑ eine Constante, und endlich

$$\eta = \frac{\lambda\zeta+\mu}{\nu\zeta+\varrho},$$

wo λ, μ, ν, ϱ Constante bedeuten, und hierdurch ist unser Satz bewiesen.

VI.

Sowie y_0 als *Fuchs*sche Function von η mit der Gruppe G_0 durch die Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \Delta\left(\frac{y_0}{\eta}\right)+\left(\frac{dy_0}{d\eta}\right)^2 Q_0(y_0) = 0$$

definirt wird, wo $Q_0(y_0)$ die durch Gleichung (1.) Nr. V gegebene rationale Function bedeutet, genügt auch die *Fuchs*sche Function y_λ mit der Gruppe G_λ einer Differentialgleichung derselben Art, welche aus (1.) entsteht, indem man daselbst y_0 durch seinen rationalen Ausdruck in y_λ ersetzt. Da

$$\Delta\left(\frac{y_0}{\eta}\right)d\eta^2 = \Delta\left(\frac{y_0}{y_\lambda}\right)dy_\lambda^2+\Delta\left(\frac{y_\lambda}{\eta}\right)d\eta^2,$$

so hat die Differentialgleichung für y_λ die Form:

$$(2.) \qquad \Delta\left(\frac{y_\lambda}{\eta}\right)+\left(\frac{dy_\lambda}{d\eta}\right)^2 Q_\lambda(y_\lambda) = 0,$$

wo

*) Vergl. *Poincaré,* Acta Mathematica Bd. IV S. 231, 232.

$$(3.) \qquad Q_\lambda(y_\lambda) = \Delta\left(\frac{y_0}{y_\lambda}\right)+\left(\frac{dy_0}{dy_\lambda}\right)^2 Q_0(y_0),$$

und die rationale Function $Q_\lambda(y_\lambda)$ ist aus den Werthen $a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots a_{n_{\lambda+1}}^{(\lambda)}(=\infty)$ auf analoge Weise gebildet, wie $Q_0(y_0)$ aus den $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1}^{(0)}(=\infty)$, sie enthält also $n_{\lambda+1}-3$ algebraisch nicht bestimmbare Parameter. Wenn die n_1-3 Parameter von $Q_0(y_0)$ so gewählt sind, dass y_0 eine *Fuchs*sche Function von η ist, und zwischen y_λ und y_0 die Gleichung (2.) Nr. II besteht, so ist in dem durch Gleichung (3.) bestimmten $Q_\lambda(y_\lambda)$ über die in demselben enthaltenen $(n_{\lambda+1}-3)$ Parameter auch derart verfügt, dass y_λ eine *Fuchs*sche Function von η ist. Die Gleichung (2.) Nr. II liefert uns also eine *Transformation* *) der Differentialgleichung (1.) in eine Differentialgleichung (2.) von gleicher Beschaffenheit, ebenso wie bei *Jacobi* **) die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = (1-y^2).(1-\lambda^2 y^2)$$

in die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = M^2(1-x^2).(1-\varkappa^2 x^2)$$

durch die Gleichung

$$Vy-U = 0$$

transformirt wird. Wir können also füglich y_λ als eine *aus y_0 durch rationale Transformation entstandene Fuchssche Function* bezeichnen, und die Analogie mit den rational aus einander transformirten elliptischen Functionen ist auch darin hergestellt, dass die Gruppe von y_λ eine Untergruppe mit endlichem Quotienten der Gruppe von y_0 ist ***). Ferner ist auch hier, wie bei den elliptischen Functionen

$$\lim_{\lambda=\infty} \eta_\lambda = \eta,$$

wo η_λ eine lineare Function von y_λ, und wir haben folglich

$$\lim_{\lambda=\infty} Q_\lambda(y_\lambda) = 0,$$

eine Gleichung, die bei gegebenen Werthen der $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_{n_1-1}^{(0)}$ zur näherungsweisen Berechnung der Parameter $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots p_{n_1-3}^{(0)}$ dienen kann.

---

*) Man vergl. hierfür Herrn *Kummer*s Abhandlung über die hypergeometrische Reihe, dieses Journal Bd. XV S. 39 ff.

**) Gesammelte Werke (1881) Bd. I S. 87, 88.

***) Vergl. *Poincaré,* Acta Mathematica Bd. IV S. 287.

Ueber die Beziehungen zwischen den sechzehn Thetafunctionen von zwei Variabeln.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

§ 1.

Wir betrachten das System der sechzehn Thetafunctionen von zwei Argumenten. Die ungeraden bezeichnen wir als Θ_1, Θ_2, ... Θ_6. Den dreigliedrigen Combinationen der Zahlen 1 bis 6 sind dann die geraden Functionen zugeordnet, und zwar complementären Combinationen dieselbe Function; so ist $\Theta_{123} = \Theta_{456}$ u. s. f. Dagegen entsprechen den fünfzehn Combinationen zu zweien: 12, 13, ... 56 die sämmtlichen unter einander incongruenten halben Perioden.

Die Functionen Θ_m sind durch ein System homogener quadratischer Gleichungen verbunden, und zwar hat man in diesem zwei Gruppen zu unterscheiden: erstens lineare Relationen zwischen den Quadraten, und zweitens solche zwischen den Producten verschiedener Θ. Geht man von den Gleichungen der ersten Art aus, so kann man durch sie sämmtliche Grössen Θ_m^2 als lineare Functionen von vier Veränderlichen X, Y, Z, W ausdrücken.

Die Gleichungen der zweiten Gruppe zerfallen, den einzelnen halben Perioden entsprechend, in fünfzehn besondere Gruppen. Zur Periode 56 gehören die acht Producte:

$$\text{I.} \quad \Theta_1\Theta_{156}, \quad \Theta_2\Theta_{256}, \quad \Theta_3\Theta_{356}, \quad \Theta_4\Theta_{456};$$

$$\text{II.} \quad \Theta_{145}\Theta_{235}, \quad \Theta_{245}\Theta_{315}, \quad \Theta_{345}\Theta_{125}, \quad \Theta_5\Theta_6.$$

Die Reihe I enthält nur ungerade, die Reihe II nur gerade Functionen; zwischen je drei Gliedern einer solchen Reihe besteht eine homogene lineare Gleichung.

Nimmt man zu den Gleichungen der ersten Gruppe noch irgend eine von diesen Gleichungen der zweiten Art hinzu, gleichviel welche, so erhält man eine biquadratische Relation zwischen X, Y, Z, W, die Gleichung der

*Kummer*schen Fläche. Es ergiebt sich also auf diese Weise eine Darstellung aller geraden *Abel*schen Functionen, die zu einer bestimmten Klasse gehören, rational durch die homogenen Coordinaten eines variabeln Punkts der *Kummer*schen Fläche; für die ungeraden Functionen muss noch eine Irrationalität hinzugefügt werden.

Dies ist bekannt. Zu einer anderen Darstellung aber gelangt man, indem man die Relationen der zweiten Gruppe zum Ausgangspunkt wählt; und zwar kann man sich auf dieses System beschränken; denn die linearen Relationen zwischen den Quadraten sind eine Folge desselben, wenn dies auch nicht ganz unmittelbar zu erkennen ist. Die Coefficienten der Gleichungen, die wir benutzen, werden wir nicht bestimmen; denn bei unserer Untersuchung ist nur die Form der Relationen von Wichtigkeit, und diese ist durch die Aufstellung der beiden Systeme I und II bereits gegeben. Es wird sich also nichts ändern, wenn wir uns jedes Theta mit einem willkürlichen constanten Factor behaftet denken. Auch können wir alle sechzehn Grössen Θ_m noch mit einem und demselben variabeln Factor multipliciren, da die Relationen, die wir zu betrachten haben, sämmtlich homogen sind.

§ 2.

Wir setzen:

$$(1.) \qquad \Theta_\alpha \Theta_\beta \Theta_\gamma \Theta_{\alpha\beta\gamma} = F_{\alpha\beta\gamma}.$$

Auf diese Weise sind, den zwanzig möglichen Combinationen $\alpha\beta\gamma$ der Zahlen 1 bis 6 entsprechend, ebensoviele Grössen F definirt. Aus den Gleichungen des Systems I, das im vorigen Paragraphen aufgestellt wurde, geht nun Folgendes hervor: Wenn man aus diesen zwanzig Grössen F irgend drei auswählt, deren Indices zwei gemeinsame Elemente haben, z. B. F_{156}, F_{256}, F_{356}, so sind diese drei Grössen durch eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten verbunden. Auf diese Weise ist es möglich,

$$F_{156} \text{ und } F_{256} \text{ durch } F_{356} \text{ und } F_{456},$$
$$F_{145} \text{ und } F_{245} \text{ durch } F_{345} \text{ und } F_{456}$$

auszudrücken, u. s. f. Man erkennt leicht, dass sämmtliche zwanzig Grössen F sich als lineare homogene Functionen von

$$(2.) \qquad F_{356}, \quad F_{456}, \quad F_{345}, \quad F_{346}$$

ausdrücken lassen; dass aber diejenigen Grössen, wie F_{126}, F_{136} u. s. f., deren

Index das Element 6 enthält, auch schon durch die drei Grössen

$$(3.) \qquad F_{345}, \quad F_{346}, \quad F_{356}$$

allein dargestellt werden können. — Es seien nun:

$$x, \quad y, \quad z, \quad w$$

vier lineare Functionen der Grössen (2.) mit nicht verschwindender Determinante. Dann werden sämmtliche $F_{\alpha\beta\gamma}$ lineare Functionen von x, y, z, w. Es muss ein Werthsystem

$$x = a_6, \quad y = b_6, \quad z = c_6, \quad w = d_6$$

geben, für welches diejenigen zehn linearen Ausdrücke $F_{\alpha\beta\gamma}$ verschwinden, deren Index das Element 6 enthält; denn, wie eben bemerkt, sind hierzu nur drei Gleichungen erforderlich. Ebenso müssen fünf andere constante Werthsysteme

$$a_1, \ b_1, \ c_1, \ d_1; \quad a_2, \ b_2, \ c_2, \ d_2; \quad \ldots \quad a_5, \ b_5, \ c_5, \ d_5$$

existiren von solcher Beschaffenheit, dass allgemein die lineare Function $F_{\alpha\beta\gamma}$ gleich 0 wird, sobald für x, y, z, w eins der drei Werthsysteme

$$(a_\alpha, \ b_\alpha, \ c_\alpha, \ d_\alpha), \quad (a_\beta, \ b_\beta, \ c_\beta, \ d_\beta), \quad (a_\gamma, \ b_\gamma, \ c_\gamma, \ d_\gamma)$$

gesetzt wird.

Wir betrachten das veränderliche Werthsystem (x, y, z, w) und die sechs festen $(a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa, d_\varkappa)$ als die homogenen Coordinaten eines veränderlichen und sechs fester Punkte im Raume. $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ist dann die Gleichung einer Ebene, welche durch die Punkte α, β, γ hindurchgeht. Nimmt man die festen Punkte als gegeben an, so ist auf diese Weise jede der zwanzig linearen Functionen $F_{\alpha\beta\gamma}$ definirt bis auf einen constanten Factor.

§ 3.

Betrachten wir jetzt das System II in § 1. Hier folgt, dass $\Theta_5\Theta_6$ sich homogen und linear durch

$$\Theta_{145}\Theta_{235} \quad \text{und} \quad \Theta_{245}\Theta_{315}$$

ausdrücken lässt. Multiplicirt man alle drei Producte mit

$$\Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4\Theta_5^2$$

und setzt:

$$(1.) \qquad \Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4\Theta_5\Theta_6 = \Pi,$$

so folgt eine Gleichung:

$$(2.) \qquad \Pi.\Theta_5^2 = AF_{145}F_{235} + BF_{245}F_{315},$$

in der A und B Constanten bedeuten. Der Ausdruck auf der rechten Seite setzt sich zusammen aus zwei quadratischen Functionen, die in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 verschwinden, und zwar im Punkte 5 von der zweiten Ordnung. Da man aber bei dieser Darstellung jeden der Punkte 1, 2, 3, 4 auch mit 6 vertauschen kann, so muss der Ausdruck auf der rechten Seite im Punkte 6 ebenfalls verschwinden. Wir erhalten also:

$$(3.) \qquad \Pi.\Theta_5^2 = G_5,$$

wo G_5 eine quadratische Function von x, y, z, w bedeutet, die in allen sechs Hauptpunkten verschwindet, und zwar im Punkte 5 von der zweiten Ordnung. $G_\alpha = 0$ ist die Gleichung eines Kegels zweiten Grades, dessen Spitze durch den Punkt α gebildet wird, während auch die fünf übrigen Punkte auf der Fläche liegen.

In ganz ähnlicher Weise lassen sich aber auch die übrigen Grössen $\Pi.\Theta_{\alpha\beta\gamma}^2$ ausdrücken. Es ist

$$(4.) \qquad \Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_{123} = F_{123},$$

$$(5.) \qquad \Theta_4\Theta_5\Theta_6\Theta_{456} = F_{456}.$$

Da aber zugleich:

$$\Theta_{456} = \Theta_{123}$$

ist, so folgt:

$$(6.) \qquad \Pi.\Theta_{123}^2 = G_{123},$$

wo G_{123} das Product

$$(7.) \qquad G_{123} = F_{123}F_{456}$$

bedeutet. Auch dies ist eine homogene quadratische Function von x, y, z, w, die in den sechs Hauptpunkten verschwindet. Für alle sechzehn Indices gilt also jetzt die Formel

$$(8.) \qquad \Pi.\Theta_m^2 = G_m,$$

wo jedes G_m eine quadratische Function bedeutet, die in den sechs Punkten verschwindet. Es giebt vier linear unabhängige Functionen, die dieser Bedingung genügen. Nennen wir ein solches System

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad W,$$

so sind die sechzehn G_m lineare Functionen dieser vier neuen Variabeln, die wir ebenfalls als Coordinaten eines Raumpunkts auffassen wollen. Und

zwar sind es diejenigen besonderen linearen Ausdrücke, welche, als quadratische Functionen von x, y, z, w betrachtet, entweder zerfallen oder in einem der sechs Hauptpunkte von der zweiten Ordnung verschwinden.

§ 4.

Aus den Gleichungen (4.) und (5.) im vorigen Paragraphen folgt ferner:

$$\frac{F_{123}}{F_{456}} = \frac{\Theta_1\Theta_2\Theta_3}{\Theta_4\Theta_5\Theta_6}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{F_{156}}{F_{423}} = \frac{\Theta_1\Theta_5\Theta_6}{\Theta_4\Theta_2\Theta_3};$$

folglich:

$$\frac{F_{123}F_{156}}{F_{423}F_{456}} = \frac{\Theta_1^2}{\Theta_4^2} = \frac{G_1}{G_4}.$$

Wir erhalten also:

$$(1.)\quad G_4F_{123}F_{156} - G_1F_{423}F_{456} = 0.$$

Da diese Gleichung auch bei Vertauschung der Indices 3 und 5 bestehen bleiben muss, so ist auch

$$(2.)\quad F_{123}F_{156}F_{425}F_{436} - F_{423}F_{456}F_{125}F_{136} = 0.$$

Dies sind Relationen zwischen den Veränderlichen x, y, z, w; die Ausdrücke auf der linken Seite stellen sämmtlich ganze Functionen vierten Grades dar, welche in den sechs Hauptpunkten von der zweiten Ordnung verschwinden.

Bezeichnen wir für den Augenblick die Determinanten, welche gebildet sind aus dem variabeln Werthsystem x, y, z, w und je drei der sechs festen, mit $D_{\alpha\beta\gamma}$. Dann kann sich $F_{\alpha\beta\gamma}$ von $D_{\alpha\beta\gamma}$ nur um einen constanten Factor unterscheiden. Aus (2.) folgt dann:

$$D_{123}D_{156}D_{425}D_{436} - cD_{423}D_{456}D_{125}D_{136} = 0,$$
$$D_{123}D_{156}D_{435}D_{426} - c'D_{423}D_{456}D_{135}D_{126} = 0,$$

wo c und c' Constanten bedeuten. Subtrahirt man beide Gleichungen, so ist nach einem bekannten Determinantensatz

$$D_{425}D_{436} - D_{435}D_{426} = D_{423}D_{456};$$

dies wird also gemeinsamer Factor in der Differenz. Lässt man denselben fort, so ergiebt sich:

$$D_{123}D_{156} = cD_{125}D_{136} - c'D_{135}D_{126},$$

und dies muss eine Identität sein. Hieraus folgt:

$$c = c' = 1;$$

die Gleichung (2.) bleibt also auch bestehen, wenn man für die Grössen $F_{\alpha\beta\gamma}$ direct die Determinanten-Ausdrücke $D_{\alpha\beta\gamma}$ substituirt.

Daraus geht aber hervor, dass die Gleichungen (2.) — und ebenso (1.) — identisch sind mit derjenigen Beschränkung, welcher der Punkt x, y, z, w unterliegen muss, wenn von ihm aus ein Kegel zweiten Grades construirbar sein soll, welcher durch die festen Punkte 1 bis 6 hindurchgeht. Bezeichnen x_0, y_0, z_0, w_0 die Coordinaten irgend eines Punktes, der dieser Bedingung genügt, so muss eine lineare Function von X, Y, Z, W existiren, deren vier Ableitungen im Punkte x_0, y_0, z_0, w_0 verschwinden. Die Ausdrücke auf der linken Seite der Gleichungen (1.) und (2.) sind deswegen der Functional-Determinante von X, Y, Z, W, die wir mit D bezeichnen wollen, proportional.

§ 5.

Die Fläche der Kegelspitzen, $D = 0$, wird zuerst erwähnt in einer Abhandlung von *Weddle:* „On the theorems in space analogous to those of *Pascal* and *Brianchon* in a plane". Camb. and Dubl. Math. Journal, t. V, 1850. Ich entnehme dies einer *Cayley*schen Arbeit: „Sur les cônes du second ordre qui passent par six points donnés". Comptes rendus 1861. Von Herrn *Geiser* (Ueber zwei geometrische Probleme, dieses Journal Bd. 67) rührt die Definition der Fläche als Ort der sich selbst entsprechenden Punkte einer reciproken Transformation her. Herr *Geiser* erwähnt sechzehn besondere Linien, die auf der Fläche liegen. Dies sind folgende:

I. Die Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die sechs gegebenen Punkte bestimmt ist. Bekanntlich geht durch diese Curve jeder Kegel zweiten Grades, dessen Spitze einer der sechs Hauptpunkte ist, und auf dem ausserdem die fünf übrigen Punkte liegen. Es verschwinden also in dieser Curve, die wir λ_0 nennen wollen, die sechs Functionen $G_1, \ldots G_6$, während G_{123} etc. von 0 verschiedene Werthe erhalten. Dass die Linie λ_0 auf der Fläche $D = 0$ liegt, geht unmittelbar aus der Form (1.) hervor, in der diese Gleichung im vorigen Paragraphen zuerst dargestellt wurde.

II. Die geraden Verbindungslinien der Hauptpunkte. Diese wollen wir als $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots \lambda_{56}$ bezeichnen. In λ_{12} verschwinden die vier linearen

Ausdrücke F_{123}, F_{124}, F_{125}, F_{126}, also auch die quadratischen G_{123}, G_{124}, etc., ausserdem G_1 und G_2, während die übrigen Flächen $G_m = 0$ die Linie λ_{12} nicht enthalten. Aus der zweiten Form der Gleichung $D = 0$ geht hervor, dass λ_{12} auf dieser Fläche liegt. Es verschwinden in dieser Linie die Functionen:

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_{123}, \quad \Theta_{124}, \quad \Theta_{125}, \quad \Theta_{126},$$

während die übrigen Θ von 0 verschiedene Werthe annehmen.

Zu jeder von den angegebenen sechzehn Linien gehört also eine Gruppe von sechs Thetafunctionen, welche längs derselben verschwinden. Zu λ_0 gehören die sechs ungeraden, zu $\lambda_{\alpha\beta}$ diejenigen sechs, welche aus den ungeraden entstehen durch Vermehrung der Argumente um die halbe Periode $\alpha\beta$. Wenn die sechs ungeraden Thetafunctionen gemeinsam verschwinden, so müssen nothwendig die Argumente constant, und zwar gleich oder congruent 0 sein. Es entsprechen also den sämmtlichen Punkten der Linie λ_0 die Werthe $u = 0$, $u' = 0$. Ebenso sind längs der Linie $\lambda_{\alpha\beta}$ die Werthe der Argumente constant, und zwar gleich der halben Periode $\alpha\beta$. Es folgt hieraus, dass die Quotienten der Coordinaten x, y, z, w *Abel*sche Functionen sind, welche unbestimmt werden für $u = 0$, $u' = 0$ und diejenigen Werthe, welche den halben Perioden entsprechen. Ausserdem liegt noch auf der Fläche $D = 0$ die Schnittlinie des Ebenenpaares $F_{123} = 0$, $F_{456} = 0$. Hier verschwindet $\Theta_{123} = \Theta_{456}$, während die fünfzehn übrigen Functionen von 0 verschieden sind. Die Argumente bleiben deshalb längs dieser Linie variabel.

§ 6.

Bei der folgenden Untersuchung betrachten wir x, y, z, w als unabhängige Grössen; wir sehen also ab von der Gleichung, welche zwischen ihnen besteht. Wenn wir setzen:

$$\frac{x}{w} = \xi, \quad \frac{y}{w} = \eta, \quad \frac{z}{w} = \zeta;$$

$$\frac{X}{W} = \lambda, \quad \frac{Y}{W} = \mu, \quad \frac{Z}{W} = \nu;$$

so sind λ, μ, ν gegeben als rationale Functionen von ξ, η, ζ; wir können aber auch umgekehrt ξ, η, ζ als Functionen von λ, μ, ν auffassen.

Es seien

$$\xi_0, \ \eta_0, \ \zeta_0; \quad \lambda_0, \ \mu_0, \ \nu_0$$

irgend zwei bestimmte zusammengehörige Werthsysteme. Die drei Gleichungen zweiten Grades

$$X-\lambda_0 W=0, \quad Y-\mu_0 W=0, \quad Z-\nu_0 W=0$$

werden dann erfüllt durch das Werthsystem

$$(x,\ y,\ z,\ w) = (\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ 1)$$

und durch diejenigen, welche den sechs Hauptpunkten entsprechen. Es giebt aber acht Schnittpunkte dieser drei Flächen zweiten Grades, und durch sieben derselben ist der achte eindeutig rational bestimmt. Folglich giebt es ausser dem Werthsystem ξ_0, η_0, ζ_0 noch ein zweites ξ_0', η_0', ζ_0', welches zu demselben Werthsystem λ_0, μ_0, ν_0 gehört.

Einem Werthsystem λ, μ, ν entsprechen also zwei Werthsysteme ξ, η, ζ, die durch Auflösung einer quadratischen Gleichung gefunden werden. Zwei solche zusammengehörige Werthsysteme wollen wir conjugirt nennen; ist ξ, η, ζ das eine, ξ', η', ζ' das andere, so können ξ', η', ζ' als rationale Functionen von ξ, η, ζ dargestellt werden, deren Coefficienten rational sind in den Coordinaten der sechs festen Punkte. Dieselben rationalen Ausdrücke stellen ξ, η, ζ als Functionen von ξ', η', ζ' dar *).

Offenbar kann jede rationale Function von ξ, η, ζ zerlegt werden in einen Theil, der ungeändert bleibt, wenn man für ξ, η, ζ das conjugirte Werthsystem einsetzt, und einen zweiten, der bei dieser Transformation nur sein Vorzeichen ändert. Der erste Theil muss sich offenbar rational durch λ, μ, ν ausdrücken lassen, der zweite als Quadratwurzel einer rationalen Function von λ, μ, ν; und es genügt, eine einzige Function dieser zweiten Art aufzustellen.

Wir betrachten die ganzen Functionen vierten Grades von x, y, z, w, welche in den sechs Hauptpunkten von der zweiten Ordnung verschwinden. Die Anzahl der linear unabhängigen Functionen dieser Art ist 11; denn die allgemeine Function vierten Grades hat 35 Coefficienten, zwischen denselben aber sind 4.6 Bedingungsgleichungen gegeben.

Zu diesen Functionen gehören zunächst alle quadratisch aus X, Y, Z, W gebildeten Ausdrücke; diese erschöpfen 10 der 11 Functionen; es muss also noch eine elfte existiren, die sich nicht quadratisch aus X, Y, Z, W zusammensetzen lässt. Eine solche wollen wir mit Q bezeichnen.

*) Vgl. § 10 der citirten *Geiser*schen Abhandlung.

Bilden wir nun aber einen Ausdruck von dieser Form:

$$V = AQ^2+BQ+C,$$

wo A eine Constante, B eine beliebige quadratische, C eine Function vierten Grades von X, Y, Z, W bedeuten soll, so stellt dieser eine Function achten Grades von x, y, z, w dar, die in den sechs Hauptpunkten von der vierten Ordnung verschwindet. Die Anzahl der linear unabhängigen Functionen dieser Art ist

$$\frac{9.10.11}{1.2.3}-6.20 = 45,$$

die Anzahl der in V enthaltenen Coefficienten aber:

$$1+10+35 = 46.$$

Folglich muss es möglich sein, diese Coefficienten so zu bestimmen, dass V identisch 0 wird.

Nehmen wir dies an, so kann der Coefficient A nicht 0 sein, weil sonst entweder eine Gleichung zwischen X, Y, Z, W bestehen würde, oder Q rational durch diese Grössen ausdrückbar wäre. Beides ist nicht der Fall; folglich können wir $A = 1$ annehmen.

Dann aber können wir Q durch $Q-\frac{1}{2}B$ ersetzen, ohne dass die vorausgesetzten wesentlichen Eigenschaften von Q aufgehoben werden. Die identische Gleichung $V = 0$ geht dann über in eine Gleichung von dieser Form:

$$Q^2-M = 0,$$

wo M eine ganze Function vierten Grades von X, Y, Z, W bedeutet. Wir erhalten also den Satz:

Es giebt eine Function vierten Grades $Q(x, y, z, w)$, deren Quadrat sich als Function vierten Grades von X, Y, Z, W darstellen lässt:

$$\{Q(x, y, z, w)\}^2 = M(X, Y, Z, W),$$

während Q selbst nicht rational in diesen Grössen ist, und zwar ist Q — daher auch M — durch die Bedingungen dieses Satzes bestimmt bis auf einen constanten Factor.

Der Quotient

$$q = \frac{Q}{W^2} = \frac{\sqrt{M}}{W^2}$$

ist zwar rational in den Grössen ξ, η, ζ, aber nicht in λ, μ, ν; erst q^2 lässt sich rational in den letzteren Grössen darstellen. q selbst muss deshalb

in $-q$ übergehen, wenn die Grössen ξ, η, ζ durch das conjugirte System ersetzt werden. Hieraus folgt:

Die Verhältnisse der Grössen x, y, z, w lassen sich rational ausdrücken durch X, Y, Z, W und $\sqrt{M(X, Y, Z, W)}$.

§ 7.

M ist eine Function vierten Grades von X, Y, Z, W. Wir müssen zeigen, dass diese nicht in Factoren niedrigeren Grades zerlegbar ist.

I. Wir nehmen zunächst an, M enthielte einen Linearfactor f. Als abhängig von x, y, z, w betrachtet, wäre dieser eine quadratische Function, die in den sechs Hauptpunkten verschwindet. Eine solche kann kein Quadrat sein, und da Q^2 durch f theilbar ist, so wäre Q selbst durch f theilbar. Nennen wir den übrig bleibenden Factor g:

$$Q = f \cdot g,$$

so ist g ebenfalls eine quadratische Function von x, y, z, w. Es wäre dann

$$f^2 g^2 = M,$$

also g^2 gleichzeitig eine rationale Function von X, Y, Z, W, und eine ganze von x, y, z, w. Folglich müsste g^2 auch als ganze Function von X, Y, Z, W darstellbar sein. Daraus folgt aber, dass g in den sechs Hauptpunkten 0 wird. Mithin müsste g eine lineare Function von X, Y, Z, W werden. Es wäre also $Q = fg$ eine rationale Function von X, Y, Z, W, was der Voraussetzung widerspricht.

II. Wenn M keinen Linearfactor enthält, aber dennoch zerlegbar ist, so muss M das Product von zwei unzerlegbaren quadratischen Functionen K, L der Grössen X, Y, Z, W sein:

$$M = K.L = Q^2.$$

Fassen wir jetzt K und L als abhängig von x, y, z, w auf, so könnten K und L zerlegbar werden. Es sei γ der grösste gemeinsame Theiler von K und Q, und

$$K = \alpha\gamma, \quad Q = \beta\gamma,$$

wo α, β Functionen von x, y, z, w bedeuten, die keinen gemeinsamen Theiler haben. Dann ist

$$\alpha L = \beta^2 \gamma,$$

und hieraus folgt, dass γ durch α theilbar sein muss. Wir können deshalb

$\gamma = \alpha\lambda$ setzen und erhalten so:

$$K = \alpha^2\lambda, \quad Q = \alpha\beta\lambda, \quad L = \beta^2\lambda.$$

α, β sind Functionen von x, y, z, w, welche von demselben Grade sein müssen.

a. Seien zunächst α, β constant; dann können wir beide gleich 1 annehmen, wir bekämen also $K = L = Q$, somit wäre Q eine rationale Function von X, Y, Z, W.

b. Sind α, β linear, so kann α höchstens in drei von den sechs Hauptpunkten verschwinden. Es muss also drei Punkte geben, in denen α nicht verschwindet. Diese seien 1, 2, 3. Da der Voraussetzung zufolge K eine Function vierten Grades von x, y, z, w ist, die in allen sechs Punkten von der zweiten Ordnung verschwindet, und $K = \alpha^2\lambda$ ist, so muss λ eine Function zweiten Grades sein, die in den Punkten 1, 2, 3 von der zweiten Ordnung verschwindet. Folglich muss λ mit F_{123}^2 identisch sein. Weil ferner L in den Punkten 4, 5, 6 verschwindet, λ aber nicht, und $L = \beta^2\lambda$ ist, so muss $\beta = F_{456}$ sein. Es wäre daher Q durch $F_{123}F_{456} = G_{123}$ theilbar. Dies ist eine lineare Function von X, Y, Z, W; durch dieselbe müsste auch $Q^2 = M$ theilbar sein. Wir haben aber Linearfactoren ausgeschlossen.

c. Sind α, β quadratische Functionen, so muss $\lambda = 1$ sein. Es müssen also α, β in den sechs festen Punkten verschwinden. Dann müssen sie aber lineare Functionen der andern Variabeln sein, es wäre also wiederum Q eine rationale Function von X, Y, Z, W. Wir sehen also:

Die in § 6 definirte Function vierten Grades $M(X, Y, Z, W)$ ist unzerlegbar.

§ 8.

Wir differentiiren die identische Gleichung

$$Q^2 = M$$

nach x, y, z, w und nennen die Ableitungen von M nach X, Y, Z, W: M_1, M_2, M_3, M_4. Wir erhalten so:

$$2Q\frac{\partial Q}{\partial x} = M_1\frac{\partial X}{\partial x} + M_2\frac{\partial Y}{\partial x} + M_3\frac{\partial Z}{\partial x} + M_4\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$2Q\frac{\partial Q}{\partial y} = M_1\frac{\partial X}{\partial y} + \cdots$$

etc.

Wenn wir diese vier Gleichungen auflösen, so erhalten wir:

$$(1.) \qquad 2Q.A = M_1.D,$$

wo D die Functionaldeterminante von X, Y, Z, W, dagegen A diejenige von Q, Y, Z, W bedeutet.

Nun ist D ebenso wie Q eine Function vierten Grades der Variabeln x, y, z, w, welche in den sechs Hauptpunkten von der zweiten Ordnung verschwindet. Wir wissen: Alle Functionen dieser Art lassen sich in der Form

$$\alpha Q + H$$

darstellen, wo α eine Constante, H eine quadratische Function von X, Y, Z, W bedeutet. Angenommen nun, es sei

$$(2.) \qquad D = \alpha Q + H,$$

und H nicht identisch 0, so würde aus der Gleichung (1.) folgen, dass $M_1.H$ durch Q theilbar ist. $M_1^2 H^2$ müsste also durch M theilbar sein, und da M_1 und H nur die Variabeln X, Y, Z, W enthalten, so müsste der Quotient eine ganze Function auch von diesen Variabeln sein. Aus der Unzerlegbarkeit von M folgt nun, dass entweder M_1 oder H durch M theilbar sein müsste; beides ist unmöglich, da diese Factoren von niedrigerem Grade sind als M. Folglich muss H identisch 0 sein.

Wir kommen auf diese Weise zu dem Resultat, dass die Function Q mit der Functionaldeterminante der Grössen X, Y, Z, W übereinstimmt. Damit ist der algebraische Satz bewiesen:

Das Quadrat der Functionaldeterminante der linear unabhängigen Functionen zweiten Grades von x, y, z, w, welche in sechs festen Punkten verschwinden, lässt sich rational durch diese Functionen ausdrücken, und, indem man diesen rationalen Ausdruck gleich 0 setzt, erhält man die Gleichung der Kummerschen Fläche.

Denn durch die Grössen X, Y, Z, W sind die sechzehn Functionen $\Pi\Theta_m^2$ linear dargestellt worden; ist $D = 0$, so ist auch $M = 0$; es ist also $M = 0$ die Gleichung vierten Grades, welche zwischen vier Thetaquadraten (oder linearen Functionen derselben) besteht.

Zwischen der *Kummer*schen Fläche und der Kegelspitzenfläche $D = 0$ ist auf diese Weise eine Beziehung hergestellt. Die Transformation hat eine Bedeutung für die Punkte des Raums auch ausserhalb jener Flächen, sie ist aber dann nur nach dem einen System von Variabeln eindeutig rational. Einem Punkte im Raum der *Kummer*schen Fläche ent-

sprechen im Allgemeinen zwei Punkte des andern Raums. Diese beiden Punkte fallen aber zusammen, sobald man den entsprechenden auf der *Kummer*schen Fläche selbst annimmt, weil dann die irrationale Grösse $\sqrt{M}$ verschwindet. Die Punkte der Flächen selbst sind daher im Allgemeinen eindeutig auf einander bezogen.

Allerdings erleidet diese Eindeutigkeit Ausnahmen. Beschränkt man den Punkt x, y, z, w auf eine der Linien, die wir mit λ bezeichnet haben, so werden sechs von den Ausdrücken

$$G_m = A_m X + B_m Y + C_m Z + D_m W,$$

die den Quadraten der Thetafunctionen proportional sind, 0, während die übrigen von 0 verschieden bleiben. Der Punkt X, Y, Z, W wird also dann ein fester, und zwar der gemeinsame Schnittpunkt der sechs Ebenen $G_m = 0$. Dies ist ein Knotenpunkt der *Kummer*schen Fläche. Wir erhalten also das Resultat:

Den Knotenpunkten der Kummerschen Fläche entsprechen in der Kegelspitzenfläche die Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die sechs Hauptpunkte gelegt werden kann, und die fünfzehn Verbindungslinien der Hauptpunkte.

§ 9.

Sowohl durch die Grössen λ, μ, ν wie durch ξ, η, ζ können alle geraden *Abel*schen Functionen der Klasse rational dargestellt werden. Zur Darstellung der ungeraden dagegen ist noch eine Irrationalität hinzuzufügen. Wenn man den Quotienten bilden will:

$$\Phi = \frac{\Theta_1 \Theta_{123}}{\Theta_2 \Theta_3},$$

so ist dieser:

$$\Phi = \frac{F_{123}}{\Theta_2^2 \Theta_3^2} = \frac{\Pi^2 . F_{123}}{G_2 G_3}.$$

Nun ist aber Π das Product der sechs ungeraden Thetafunctionen, und

$$\Pi . \Theta_a^2 = G_a.$$

Nennt man P das Product der sechs Grössen $G_1, G_2, \ldots G_6$, so ist demnach

$$P = \Pi^8,$$

$$\Pi^2 = \sqrt[4]{P};$$

wir erhalten also:

$$\Phi = \frac{\Theta_1 \Theta_{123}}{\Theta_2 \Theta_3} = \frac{\sqrt[4]{P} . F_{123}}{G_2 G_3}.$$

Uebrigens lässt sich, wenigstens in gebrochener Form, schon $\sqrt{P}$ rational durch x, y, z, w ausdrücken. Denn es ist

$$\frac{G_1 G_2 G_3 F_{456}}{F_{123}} = \Pi^4 = \sqrt{P};$$

es kann mithin $\sqrt{P}$ dargestellt werden als Quotient einer Function siebenten Grades durch eine lineare, und zwar kann man als Nenner jeden beliebigen linearen Ausdruck wählen.

Sämmtliche *Abel*sche Functionen sind jetzt rational ausdrückbar durch x, y, z, w und $\sqrt[4]{P}$. Will man aber von einer solchen Darstellung Gebrauch machen, so ist es wesentlich, zu wissen, in welcher Art die Argumente u, u' der Thetafunctionen von den variabeln Grössen x, y, z, w abhängen.

§ 10.

Zwischen den drei Producten

$$(1.) \quad \begin{cases} \Phi_1 = \Theta_1 \Theta_{234} = \Theta_1 \Theta_{156}, \\ \Phi_2 = \Theta_2 \Theta_{314} = \Theta_2 \Theta_{256}, \\ \Phi_3 = \Theta_3 \Theta_{124} = \Theta_3 \Theta_{356} \end{cases}$$

besteht, wie wir wissen, eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten:

$$(2.) \quad \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \alpha_3 \Phi_3 = 0.$$

In dem Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung setzen wir an Stelle von Φ_1, Φ_2, Φ_3 die Werthe:

$$(3.) \quad \begin{cases} \psi_1 = \Theta_1 \frac{\partial \Theta_{234}}{\partial u}, \\ \psi_2 = \Theta_2 \frac{\partial \Theta_{314}}{\partial u}, \\ \psi_3 = \Theta_3 \frac{\partial \Theta_{124}}{\partial u} \end{cases}$$

und setzen den Werth der Summe:

$$(4.) \quad \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3 = S.$$

Es lässt sich dann zeigen, dass, bis auf einen constanten Factor, S mit $\Theta_5 \Theta_6$ übereinstimmt. Denn aus den Gleichungen (2.) und (4.) folgt:

$$S = \alpha_1 \left(\psi_1 - \tfrac{1}{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \right) + \alpha_2 \left(\psi_2 - \tfrac{1}{2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \right) + \alpha_3 \left(\psi_3 - \tfrac{1}{2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right).$$

Es ist aber:

$$\psi_1 - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} = \tfrac{1}{2}\Phi_1 \frac{\partial \log\left(\frac{\Theta_{234}}{\Theta_1}\right)}{\partial u},$$

wie aus (1.) und (3.) hervorgeht. Folglich ist S eine Thetafunction zweiten Grades, die zu derselben Periode gehört wie Φ_1, Φ_2, Φ_3; nämlich zur Periode $1234 = 56$. Zugleich ist S eine gerade Function; denn Θ_1 und $\frac{\partial \Theta_{234}}{\partial u}$ sind ungerade. Daraus folgt, dass S durch eine lineare Gleichung verbunden ist mit

$$\Theta_5\Theta_6 \quad \text{und} \quad \Theta_{125}\Theta_{126}.$$

Da aber S sowohl als $\Theta_5\Theta_6$ gleichzeitig mit den Argumenten verschwindet, $\Theta_{125}\Theta_{126}$ dagegen nicht, so muss der Coefficient dieser letzteren Grösse gleich 0 sein. Es ist also:

$$(5.) \qquad \alpha_1\Theta_1\frac{\partial \Theta_{234}}{\partial u} + \alpha_2\Theta_2\frac{\partial \Theta_{314}}{\partial u} + \alpha_3\Theta_3\frac{\partial \Theta_{124}}{\partial u} = a\Theta_5\Theta_6,$$

wo α_1, α_2, α_3, a Constanten bedeuten, und zwar α_1, α_2, α_3 dieselben, welche auch in der Gleichung

$$(6.) \qquad \alpha_1\Theta_1\Theta_{234} + \alpha_2\Theta_2\Theta_{314} + \alpha_3\Theta_3\Theta_{124} = 0$$

auftreten. Eine entsprechende Gleichung gilt für die Ableitungen nach u; es ist deshalb:

$$\alpha_1\Theta_1 d\Theta_{234} + \alpha_2\Theta_2 d\Theta_{314} + \alpha_3\Theta_3 d\Theta_{124} = \Theta_5\Theta_6(a\,du + b\,du').$$

Diese letzte Relation kann man wegen der Formel (6.) auch so darstellen:

$$(7.) \qquad \alpha_1\Theta_{234} d\Theta_1 + \alpha_2\Theta_{314} d\Theta_2 + \alpha_3\Theta_{124} d\Theta_3 = -(a\,du + b\,du')\Theta_5\Theta_6.$$

Wir multipliciren die Gleichungen (6.) und (7.) mit $\Pi.\Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4$ und setzen:

$$G_1 \text{ für } \Pi\Theta_1^2, \quad F_{234} \text{ für } \Theta_2\Theta_3\Theta_4\Theta_{234}, \quad \text{etc.}$$

Dann folgt:

$$(8.) \qquad \alpha_1 G_1 F_{234} + \alpha_2 G_2 F_{314} + \alpha_3 G_3 F_{124} = 0,$$

$$(9.) \qquad \alpha_1 F_{234} dG_1 + \alpha_2 F_{314} dG_2 + \alpha_3 F_{124} dG_3 = -2\Pi^2(a\,du + b\,du').$$

Π^2 ist identisch mit $\sqrt[4]{P}$. Es giebt also eine lineare Function der Argumente, deren Differential sich in dieser Form darstellen lässt:

$$(10.) \qquad dv = \frac{\alpha_1 F_{234} dG_1 + \alpha_2 F_{314} dG_2 + \alpha_3 F_{124} dG_3}{2\sqrt[4]{P}},$$

während gleichzeitig:

$$\alpha_1 F_{234} G_1 + \alpha_2 F_{314} G_2 + \alpha_3 F_{124} G_3 = 0$$

ist.

§ 11.

dv ist auf diese Weise dargestellt in Form eines Bruchs, dessen Zähler linear ist in dG_1, dG_2, dG_3. Die Coefficienten sind lineare Functionen von x, y, z, w; dieselben haben noch die besondere Eigenschaft, dass sie im Punkte 4 verschwinden.

Wir können annehmen, das System der vier Functionen X, Y, Z, W sei so gewählt, dass X, Y, Z in allen Punkten der Linie λ_0 verschwinden, W dagegen nicht. Dann können dG_1, dG_2, dG_3 linear durch dX, dY, dZ ausgedrückt werden; man erhält so:

$$(1.) \qquad dv = \frac{\xi dX + \eta dY + \zeta dZ}{2\sqrt[4]{P}},$$

und zwar ist diese Darstellung eine völlig bestimmte, wenn wir hinzufügen — was nach Formel (8.) im vorigen Paragraphen der Fall ist — dass:

$$(2.) \qquad \xi X + \eta Y + \zeta Z = 0$$

sein soll. ξ, η, ζ sind lineare Functionen von x, y, z, w; die letzte Gleichung muss eine Identität sein, da die Grössen x, y, z, w nicht einer Gleichung dritten Grades genügen.

Nun fragt es sich: Giebt es nur eine einzige lineare Function von u und u', deren Differential sich in dieser Form darstellen lässt? Hier verschwinden ξ, η, ζ im Punkte 4; gäbe es nur dies eine Differential, so müssten wir aus der Symmetrie der Voraussetzungen schliessen, dass ξ, η, ζ ebenso in den Punkten 1, 2, 3 etc. Null werden. Dies ist nicht möglich. Folglich müssen du und du' selbst in der Form (1.) darstellbar sein.

An Stelle des Zählers in der Gleichung (1.) können wir setzen:

$$-(X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta).$$

Dies ist eine lineare Function von dx, dy, dz, dw, deren Coefficienten linear in X, Y, Z, W sind, also eine bilineare Function beider Werthsysteme. Wir kommen also zu dem Resultat: du und du' lassen sich darstellen in der Form:

$$du = \frac{F_1(X, Y, Z, W; dx, dy, dz, dw)}{2\sqrt[4]{P}},$$

$$du' = \frac{F_2(X, Y, Z, W; dx, dy, dz, dw)}{2\sqrt[4]{P}},$$

wo F_1 und F_2 bilineare Functionen bedeuten, die identisch verschwinden,

wenn an Stelle der Differentiale dx, dy etc. die Grössen x, y, z, w selbst treten.

Fassen wir irgend eine bilineare Form

$$F(x', y', z', w';\ x, y, z, w)$$

von zwei willkürlichen Werthsystemen ins Auge. Diese enthält sechzehn Coefficienten. Setzt man an Stelle des einen Systems x', y', z', w' die Functionen X, Y, Z, W, so geht F über in eine Function dritten Grades von x, y, z, w, welche in den sechs Hauptpunkten verschwindet. Es existiren aber nur vierzehn linear unabhängige Functionen dieser Art. Folglich müssen zwei verschiedene bilineare Formen F existiren, die identisch verschwinden, sobald man für das eine Werthsystem die Functionen X, Y, Z, W des anderen einsetzt. Bezeichnet man diese Formen mit F_1 und F_2, so ist die allgemeinste $\alpha F_1 + \beta F_2$. ***Deswegen kann man bei der Definition von u und u' auch so verfahren, dass man zunächst die beiden bilinearen Gleichungen aufstellt, welche zwischen den Variabeln x, y, z, w und den Functionen X, Y, Z, W bestehen. Ersetzt man in den beiden bilinearen Formen, welche auf diese Weise bestimmt sind, die Grössen x, y, z, w durch ihre Differentiale dx, dy, dz, dw, und dividirt durch die vierte Wurzel aus dem Product der sechs Functionen G_a, so erhält man Ausdrücke, welche vollständige Differentiale sind für die Punkte der Fläche $D = 0$; ihre Integrale sind lineare Functionen von u und u'.***

Beweis eines *Liouville*schen Satzes.

(Von Herrn *M. A. Stern* in Zürich.)

1.

In dem Journal des Mathématiques (Sér. 2, T. III, p. 358) beschäftigt sich *Liouville* mit einer Frage, welche sich auf die Anzahl der Darstellungen einer geraden Zahl als Summe von vier Quadraten bezieht. Ist nämlich m eine ganze positive ungerade Zahl und $n = 2^{\alpha}.m$, wo α eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, und man sucht die verschiedenen Darstellungen von n als Summe von vier Quadraten, indem man nicht bloss die Permutationen einer Darstellung, in welcher die Quadrate in einer bestimmten Ordnung auf einander folgen, als einzelne Darstellungen betrachtet, sondern auch die Darstellungen, welche sich ergeben, wenn man in einer beliebigen Anzahl von Quadraten positiver Zahlen diese Zahlen durch die ihnen gleichen, aber mit negativem Zeichen versehenen ersetzt, so ist, nach einem bekannten *Jacobi*schen Satze, die Anzahl N dieser Darstellungen $24\varphi m$, wo φm die Summe der Factoren der Zahl m bedeutet. Denkt man sich nun diese N Lösungen unter einander geschrieben, so dass man etwa hätte

$$\begin{aligned} n &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2, \\ n &= a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n &= a_N^2 + b_N^2 + c_N^2 + d_N^2, \end{aligned}$$

so ist offenbar die Summe aller hier vorkommenden Quadrate gleich nN, und da jedes Quadrat, in Folge der Permutationen, eben so oft in der ersten, wie in jeder folgenden Stelle vorkommt, so ist klar, dass die Summe $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2$ aller in erster Stelle stehenden Quadrate, wie *Liouville* bemerkt, den Werth $\frac{nN}{4}$ hat. Bei weitem schwieriger ist aber die Beantwortung der Frage, welchen Werth die Summe $a_1^{2k} + a_2^{2k} + \cdots + a_N^{2k}$ hat, wenn k eine ganze positive Zahl bedeutet, die grösser als die Einheit ist. Ist

$k = 2$, sucht man also den Werth der Summe $a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_N^4$ und bezeichnet diese Summe durch Σa^4, so ist nach *Liouville* $\Sigma a^4 = \frac{n^2 N}{8}$. *Liouville* sagt, er habe sich durch einen regelrechten Beweis (par une démonstration en règle) von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt. Diesen Beweis giebt er aber nicht, sondern zeigt nur an verschiedenen Beispielen die Richtigkeit der Formel. So weit meine Kenntniss der Literatur reicht, hat weder *Liouville* selbst seinen Beweis bekannt gemacht, noch hat ein Anderer einen Beweis des Satzes gegeben.

Dem Beweise, welchen ich hier entwickeln will, schicke ich folgende Bemerkung voraus. Die Summe Σa^4 ist offenbar der vierte Theil der Summe aller Biquadrate, welche man erhält, wenn man in allen Darstellungen alle Quadrate durch Biquadrate ersetzt, da sich jedes Biquadrat in allen vier Stellen, ebenso wie jedes Quadrat, gleich oft findet. Bezeichnet man also die Summe aller dieser Biquadrate durch ΣB^4, so kann man den *Liouville*schen Satz auch in der Form $\Sigma B^4 = \frac{n^2 N}{2}$ ausdrücken. Dem folgenden elementaren Beweise dieses Satzes schicke ich einen elementaren Beweis des schon oben erwähnten *Jacobi*schen Satzes voraus, mit welchem er in enger Beziehung steht. Der *Jacobi*sche Satz findet sich bekanntlich am Schlusse der *Fundamenta nova* und heisst vollständig: Die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl m als Summe von vier Quadraten, in dem oben angegebenen Sinne, ist $8\varphi m$; dagegen ist diese Anzahl $24\varphi m$, wenn die darzustellende Zahl gleich $2^\alpha . m$ und α irgend eine ganze positive Zahl ist. Dieser Satz, welchen *Jacobi* aus der Theorie der elliptischen Functionen findet, ist, soviel ich weiss, noch nicht vollständig auf rein arithmetischem Wege abgeleitet worden *). Der folgende Beweis desselben stützt sich auf den ebenfalls zuerst von *Jacobi* aus der Theorie der elliptischen Functionen gefundenen Satz, dass die Anzahl der Darstellungen des Vierfachen einer ungeraden Zahl m als Summe der Quadrate vier ungerader *positiver* Zahlen, jede Permutation einer bestimmten Darstellung als besondere Darstellung gerechnet, der Summe der Factoren von m gleich ist. Später hat *Jacobi* im 12. Bande dieses Journals einen von der Theorie der elliptischen Functionen unabhängigen Beweis gegeben, welchen *Dirichlet* (Journ. des Mathém. S. 2, Vol. 1, p. 210) dann so vereinfacht hat, dass man ihn wohl in dieser Form als einen elementaren bezeichnen darf.

*) Man vergleiche Bd. 47, S. 368 dieses Journals.

2.

Da im Folgenden nur von Darstellungen einer Zahl als Summe von vier Quadraten die Rede ist, so werde ich solche kurz als ***Darstellungen*** bezeichnen. Sei nun m eine ganze positive Zahl und $m = p^2+q^2+r^2+s^2$, zugleich seien p, q, r, s positive Zahlen (oder Null), sie sollen ***Elemente*** heissen. Eine solche Darstellung von m soll eine ***Grundform*** heissen; man kann dafür jede der Darstellungen nehmen, die sich nur durch Vertauschung der Elemente von einander unterscheiden, hat man aber eine dieser Darstellungen zur Grundform gewählt, so muss man sie auch als solche beibehalten. Die Darstellungen, die sich nur durch Vertauschung der Elemente von einander unterscheiden, sollen ***primäre*** Darstellungen heissen; ihre Summe findet man, indem man die Grundform mit der dazu gehörenden Permutationszahl multiplicirt. Bildet man dann aber aus jeder primären Darstellung neue Formen, indem man nun p und $-p$, q und $-q$ u. s. w. als verschiedene Elemente betrachtet, so sollen die hierdurch entstehenden Darstellungen die ***definitiven*** heissen.

Kommt unter den Elementen nicht Null vor, so giebt jede primäre Darstellung 16 definitive, wie folgendes Schema zeigt, in welchem mit Weglassung der Elemente selbst nur die Zeichen derselben stehen:

+ + + +	− − − −
+ + + −	− − − +
+ + − +	− − + −
+ − + +	− + − −
− + + +	+ − − −
− − + +	+ + − −
+ − + −	− + − +
− + + −	+ − − + .

Insofern bei Null positives und negatives Zeichen nicht zu unterscheiden ist, reduciren sich, wenn ein Element Null ist, die 16 definitiven Darstellungen auf 8; sind zwei Elemente Null, auf 4; sind drei Elemente Null, auf 2. Die Zahl, mit welcher die Summe der primären Darstellungen zu multipliciren ist, um die Summe der definitiven zu erhalten, soll die ***Zeichenzahl*** heissen.

3.

Sei nun m eine *ungerade* Zahl und $m = p^2+q^2+r^2+s^2$ eine Grundform. Dann ergeben sich aus dieser Grundform, wenn p, q, r, s verschiedene Werthe haben und keine dieser Zahlen Null ist, drei Grundformen für $2m$, nämlich

$$\text{(I.)} \quad 2m = (p-q)^2+(p+q)^2+(r-s)^2+(r+s)^2,$$
$$\text{(II.)} \quad 2m = (p-r)^2+(p+r)^2+(q-s)^2+(q+s)^2,$$
$$\text{(III.)} \quad 2m = (p-s)^2+(p+s)^2+(q-r)^2+(q+r)^2 \text{ *)}.$$

Es können aber auch nicht mehr als drei Grundformen von $2m$ aus einer Grundform von m abgeleitet werden. Hat man nämlich $2m = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$, wo α, β, γ, δ positive Zahlen sind, so müssen, da $2m$ eine Zahl von der Form $4p+2$ ist, zwei dieser Zahlen gerade und zwei ungerade sein, man kann sie daher paarweise so zusammenstellen, dass die Summe jedes Paares, wie etwa $\alpha+\beta$ und $\gamma+\delta$ eine gerade Zahl ist. Setzt man

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = p', \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = q', \quad \frac{\gamma+\delta}{2} = r', \quad \frac{\gamma-\delta}{2} = s' \text{ **)},$$

so sind mithin p', q', r', s' ganze Zahlen und

$$m = p'^2+q'^2+r'^2+s'^2.$$

Sind nun die Zahlen p', q', r', s', wenn auch in anderer Aufeinanderfolge, dieselben wie die Zahlen p, q, r, s, so ist auch die Darstellung von $2m$ durch $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ identisch mit einer der drei obigen Grundformen für $2m$. Im entgegengesetzten Falle muss sich diese Darstellung von $2m$ aus einer anderen Grundform von m ableiten lassen, da sie, nach dem Vorhergehenden, auf eine solche zurückführt.

Es ergiebt sich hieraus sehr leicht, dass in *allen* Fällen die Anzahl der definitiven Darstellungen von $2m$ das Dreifache der definitiven Darstellungen von m ist.

Sind nämlich die Elemente p, q, r, s verschiedene Zahlen und ist keine gleich 0, so folgt aus der Grundform $m = p^2+q^2+r^2+s^2$ die Anzahl 24.16 definitive Darstellungen für m, und dieselbe Anzahl definitiver Darstellungen giebt auch jede der drei Grundformen von $2m$.

Ist ein Element Null und sind die drei übrigen verschieden, so kommen

*) Wären die Differenzen $p-q$ oder $r-s$ u. s. w. negative Zahlen, so könnte man dafür $q-p$ oder $s-r$ u. s. w. nehmen.

**) Also $\alpha = p'+q'$, $\beta = p'-q'$, $\gamma = r'+s'$, $\delta = r'-s'$.

in jeder der drei Formeln (I.), (II.), (III.) zwei gleiche Quadrate vor. Aus der Grundform für m ergeben sich nun 24.8 definitive Darstellungen und aus jeder der drei Grundformen für $2m$ dieselbe Zahl 12.16. Sind zwei der Elemente p, q, r, s Null, so müssen die zwei anderen, da m ungerade ist, verschiedene Werthe haben. In diesem Falle reduciren sich die drei Grundformen für $2m$ auf zwei. Ist z. B. $p = 0$ und $q = 0$, so werden sie $0+0+(r-s)^2+(r+s)^2$ und $r^2+r^2+s^2+s^2$. Die erste dieser Formeln giebt 12.4 definitive Darstellungen, die zweite 6.16, also zusammen $144 = 3.48$, während aus der Grundform $0+0+r^2+s^2$ für m sich $12.4 = 48$ definitive Darstellungen ergeben. Sind drei Elemente Null, z. B. $p, q, r,$ so gehen die drei Grundformen für $2m$ in eine einzige über, bei diesem Beispiele in $0+0+s^2+s^2$, dies giebt 6.4 definitive Darstellungen, während die Grundform $m = 0+0+0+s^2$ zu $4.2 = 8$ definitiven Darstellungen von m führt.

Ist keines der Elemente p, q, r, s Null, jedoch zwei einander gleich, so findet sich unter den Grundformen für $2m$ eine, in welcher eines der vier Quadrate (nämlich das Quadrat der Differenz der zwei gleichen Elemente) Null ist. Dies giebt 24.8 definitive Darstellungen. Die zwei anderen Grundformen reduciren sich auf eine einzige, welche 24.16 definitive Darstellungen liefert, so dass man im Ganzen 3.8.24 solche hat, während die Grundform für m zu $12.16 = 8.24$ definitiven Darstellungen führt.

Sind drei Elemente gleich und das vierte ist nicht Null, so reduciren sich die drei Grundformen von $2m$ auf eine einzige, in welcher ein Quadrat Null ist. Dies giebt $24.8 = 3.4.16$ definitive Darstellungen, während die Grundform für m zu 4.16 definitiven Darstellungen führt.

Es wären nun noch die Fälle zu betrachten, wenn ein Element Null und zugleich von den übrigen Elementen zwei oder drei gleich wären. Im ersten Falle führt dann die Grundform für m zu 12.8 definitiven Darstellungen. Die drei Grundformen für $2m$ reduciren sich auf zwei, von welchen die eine zwei gleiche Elemente und kein Element Null enthält, die andere zwei gleiche Elemente und ein Element Null. Daraus ergeben sich also $12.16+12.8 = 3.8.12$ definitive Darstellungen.

Im zweiten Falle führt die Grundform für m zu 4.8 definitiven Darstellungen für m. Die drei Grundformen für $2m$ reduciren sich auf eine einzige, welche zwei gleiche Elemente und ein Element Null enthält, woraus sich $12.8 = 3.4.8$ definitive Darstellungen ergeben. Da, wie oben bemerkt wurde, der Fall, dass zwei der Elemente p, q, r, s Null und die zwei

anderen gleichwerthig sind, nicht vorkommen kann, so sind alle Fälle erschöpft, und es zeigt sich, dass in der That in allen Fällen die Anzahl der definitiven Darstellungen von $2m$ das Dreifache der Anzahl der definitiven Darstellungen von m ist.

4.

In derselben Weise, wie aus der Anzahl der Darstellungen von m die Anzahl der Darstellungen von $2m$ abgeleitet ist, kann man wieder aus letzterer die Anzahl der Darstellungen von $4m$ finden, jedoch mit einem wesentlichen Unterschiede. Während nämlich *eine* Grundform von m (abgesehen von besonderen Fällen) zu *drei* Grundformen für $2m$ geführt hat, führen diese drei Grundformen nur wieder zu drei Grundformen für $4m$.

Aus Formel (I.) findet man nämlich

$$\text{(IV.)} \quad \begin{cases} 4m = (p+q+p-q)^2+(p+q-(p-q))^2+(r+s+r-s)^2+(r+s-(r-s))^2 \\ \quad = (2p)^2+(2q)^2+(2r)^2+(2s)^2. \end{cases}$$

Denselben Ausdruck findet man aber auch, wenn man aus Formel (II.)

$$4m = (p+r+p-r)^2+(p+r-(p-r))^2+(q+s+q-s)^2+(q+s-(q-s))^2$$

oder aus Formel (III.)

$$4m = (p+s+p-s)^2+(p+s-(p-s))^2+(q+r+q-r)^2+(q+r-(q-r))^2$$

ableitet.

Dagegen erhält man aus Formel (I.) eine *zweite* Grundform für $4m$ durch den Ausdruck

$$\text{(V.)} \quad 4m = (p+q+r+s)^2+(p+q-(r+s))^2+(p-q+r-s)^2+(p-q-(r-s))^2$$

und eine *dritte* Grundform durch den Ausdruck

$$\text{(VI.)} \quad 4m = (p+q+r-s)^2+(p+q-(r-s))^2+(p-q+r+s)^2+(p-q-(r+s))^2.$$

Die Formeln (II.) und (III.), auf dieselbe Weise behandelt, führen, wie man leicht sieht, zu denselben Grundformen für $4m$ und zu keiner neuen.

Die drei Formeln (IV.), (V.), (VI.) bilden wieder die aus der Grundform $m = p^2+q^2+r^2+s^2$ entspringenden Grundformen für $4m$, und man kann wieder leicht zeigen, dass eine jede Darstellung $4m = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$, wo α, β, γ, δ positive Zahlen sind, entweder mit einer der Grundformen (IV.), (V.), (VI.) übereinstimmt, also aus $m = p^2+q^2+r^2+s^2$ abzuleiten ist, oder, im entgegengesetzten Falle, aus einer anderen Grundform für m abzuleiten ist. Die Zahlen α, β, γ, δ sind nämlich nothwendig entweder alle gerade

oder alle ungerade, da ihre Summe durch 4 theilbar ist. Setzt man daher

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=p', \quad \frac{\alpha-\beta}{2}=q', \quad \frac{\gamma+\delta}{2}=r', \quad \frac{\gamma-\delta}{2}=s',$$

also

$$\alpha=p'+q', \quad \beta=p'-q', \quad \gamma=r'+s', \quad \delta=r'-s',$$

so sind p', q', r', s' ganze Zahlen, und man hat

$$2m = p'^2+q'^2+r'^2+s'^2.$$

Sind mithin die Zahlen p', q', r', s' (ohne Rücksicht auf die Ordnung) dieselben wie die Zahlen, deren Quadrate in einer der Formeln (I.), (II.), (III.) vorkommen, so stimmt auch $4m=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ mit einer der Formeln (IV.), (V.), (VI.) überein. Im entgegengesetzten Falle muss sich die Grundform $2m=p'^2+q'^2+r'^2+s'^2$ aus einer anderen Grundform für m als $m=p^2+q^2+r^2+s^2$ ergeben, wie oben gezeigt worden ist, und aus dieser ist auch die Grundform $4m=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ abgeleitet.

5.

Abgesehen von den noch besonders zu besprechenden Fällen ergiebt sich hieraus, dass die Anzahl der definitiven Darstellungen von $4m$ genau so gross ist, wie die Anzahl der definitiven Darstellungen von $2m$, also der dreifachen Anzahl der definitiven Darstellungen von m gleich ist. Es soll nun gezeigt werden, dass dieses Verhältniss in *allen* Fällen stattfindet.

Wenn nämlich eines der Elemente p, q, r, s Null ist, so kommt in der Formel (IV.) ein Quadrat gleich 0 vor, während die Formeln (V.) und (VI.) in eine einzige zusammenfallen. Dann erhält man also $24.8+24.16=3.12.16$ definitive Darstellungen für $4m$. Sind zwei Elemente Null, so enthält die Formel (IV.) zwei Quadrate, welche Null sind, während wieder die Formeln (V.) und (VI.) in eine einzige zusammenfallen, in welcher zwei Paare gleicher Quadrate vorkommen. Das giebt $12.4+6.16=3.48$ definitive Darstellungen.

Sind drei Elemente Null, so enthält die Formel (IV.) drei Quadrate, die Null sind, während (V.) und (VI.) sich auf eine einzige Formel reduciren, welche die Summe von vier gleichen Quadraten ist. Hier ist also die Anzahl der definitiven Darstellungen $4.2+16=24$. Man sieht, dass diese Zahlen genau dieselben sind, wie sie oben, unter denselben Voraussetzungen, für die Anzahl der definitiven Darstellungen von $2m$ gefunden

worden sind. Man überzeugt sich leicht, dass dasselbe auch stattfindet, wenn einer der übrigen oben besprochenen besonderen Fälle vorliegt, nämlich wenn zwei oder drei Elemente gleich und nicht Null sind, oder wenn ein Element Null ist und zwei der übrigen oder alle drei einander gleich sind.

6.

Man nehme nun an, dass aus der Grundform

$$m = p^2+q^2+r^2+s^2$$

der ungeraden Zahl m sich für die Zahl $2^\alpha.m$, wo α irgend eine ganze positive Zahl ist, die drei Grundformen

$$(A.)\quad \begin{cases} 2^\alpha.m = p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2, \\ 2^\alpha.m = p_2^2+q_2^2+r_2^2+s_2^2, \\ 2^\alpha.m = p_3^2+q_3^2+r_3^2+s_3^2 \end{cases}$$

ableiten lassen, welche bei besonderer (schon oben behandelter) Beschaffenheit der Elemente p, q, r, s sich auf zwei oder eine einzige reduciren können. Man nehme zugleich an, dass überhaupt jede Grundform von $2^\alpha.m$ aus einer Grundform von m abgeleitet werden kann und zwar so, dass zu jeder Grundform von m drei (in besonderen Fällen auf zwei oder eine sich reducirende) Grundformen $2^\alpha.m$ gehören. Dann hat man für $2^{\alpha+2}.m$ die Grundformen

$$\begin{aligned} 2^{\alpha+2}.m &= (2p_1)^2+(2q_1)^2+(2r_1)^2+(2s_1)^2, \\ 2^{\alpha+2}.m &= (2p_2)^2+(2q_2)^2+(2r_2)^2+(2s_2)^2, \\ 2^{\alpha+2}.m &= (2p_3)^2+(2q_3)^2+(2r_3)^2+(2s_3)^2, \end{aligned}$$

und es kann keine andere aus $m = p^2+q^2+r^2+s^2$ abzuleitende Grundform von $2^{\alpha+2}.m$ geben. Denn hat man

$$2^{\alpha+2}.m = a^2+b^2+c^2+d^2,$$

so müssen jedenfalls die Zahlen a, b, c, d gerade oder Null sein. Setzt man $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$, $d = 2u$, so sind mithin x, y, z, u ganze Zahlen oder Null, und man hat

$$2^{\alpha+2}.m = 2^2(x^2+y^2+z^2+u^2),$$

also

$$2^\alpha.m = x^2+y^2+z^2+u^2.$$

Stimmt nun diese Grundform für $2^\alpha.m$ nicht (abgesehen von der Anordnung der Quadrate) mit einer der Grundformen (*A.*) überein, so muss dieselbe,

nach der Voraussetzung, aus einer anderen Grundform für m abgeleitet sein, und dasselbe gilt mithin auch von der Darstellung von $2^{\alpha+2}.m$ durch $a^2+b^2+c^2+d^2$. Da mithin sämmtliche Grundformen für $2^{\alpha+2}.m$ gefunden werden, wenn man in allen Grundformen für $2^{\alpha}.m$ alle darin vorkommenden Quadrate mit 4 multiplicirt, so folgt, dass nicht bloss die Anzahl der Grundformen, sondern auch die Anzahl der definitiven Darstellungen für $2^{\alpha}.m$ und $2^{\alpha+2}.m$ dieselbe ist, wie auch die Elemente in den Grundformen für m beschaffen seien.

Setzt man ferner voraus, dass man aus der Grundform $m=p^2+q^2+r^2+s^2$ drei Grundformen für $2^{\alpha+1}.m$ ableiten kann (die sich wieder, unter den wiederholt erwähnten Verhältnissen auch auf zwei oder eine reduciren können), und dass überhaupt jede Grundform für $2^{\alpha+1}.m$ aus einer Grundform für m abgeleitet werden kann und zwar so, dass zu jeder Grundform für m drei Grundformen von $2^{\alpha+1}.m$ (die sich auf zwei oder eine reduciren können) gehören, so seien die drei Grundformen für $2^{\alpha+1}.m$, die sich aus $m=p^2+q^2+r^2+s^2$ ergeben:

$$2^{\alpha+1}.m = a^2+b^2+c^2+d^2,$$
$$2^{\alpha+1}.m = a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2,$$
$$2^{\alpha+1}.m = a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2.$$

Hieraus findet man wieder für $2^{\alpha+3}.m$ die drei Grundformen

$$2^{\alpha+3}.m = (2a)^2+(2b)^2+(2c)^2+(2d)^2,$$
$$2^{\alpha+3}.m = (2a_1)^2+(2b_1)^2+(2c_1)^2+(2d_1)^2,$$
$$2^{\alpha+3}.m = (2a_2)^2+(2b_2)^2+(2c_2)^2+(2d_2)^2,$$

indem man in den Grundformen für $2^{\alpha+1}.m$ jedes Quadrat mit 4 multiplicirt und beweist, wie oben, dass es keine andere zu der Grundform $m=p^2+q^2+r^2+s^2$ gehörende Grundform von $2^{\alpha+3}.m$ giebt, dass jede Grundform für $2^{\alpha+3}.m$ aus einer Grundform für $2^{\alpha+1}.m$ (also aus einer Grundform für m) abgeleitet werden kann, und zwar dass jeder Grundform für m drei Grundformen für $2^{\alpha+3}.m$ zugehören (die sich unter bestimmten Voraussetzungen auf zwei oder eine reduciren), so dass die Anzahl der definitiven Darstellungen von $2^{\alpha+1}.m$ und $2^{\alpha+3}.m$ dieselbe ist.

Da also, wenn die über $2^{\alpha}.m$ und $2^{\alpha+1}.m$ gemachten Voraussetzungen statt haben, dieselben auch bezüglich $2^{\alpha+2}.m$ und $2^{\alpha+3}.m$ gelten, so folgt daraus, durch Fortsetzung dieser Betrachtung, dass allgemein, wenn n eine ganze positive Zahl oder Null bedeutet, einerseits die Anzahl der definitiven

Darstellungen aller Zahlen von der Form $2^{\alpha+2n}$ und andererseits die Anzahl der definitiven Darstellungen aller Zahlen von der Form $2^{\alpha+2n+1}$ dieselbe ist.

Setzt man nun noch voraus, dass $2^{\alpha}.m$ und $2^{\alpha+1}.m$ dieselbe Anzahl definitiver Darstellungen haben, so folgt, dass überhaupt von $s=\alpha$ an die Anzahl der definitiven Darstellungen aller Zahlen $2^{s}.m$ dieselbe ist. Nun ist aber oben (§ 2 und 3) gezeigt worden, dass die in Beziehung auf $2^{\alpha}.m$ und $2^{\alpha+1}.m$ gemachten Voraussetzungen wirklich stattfinden, wenn $\alpha=1$ ist, und zugleich, dass die Anzahl der definitiven Darstellungen von $2m$ das Dreifache der definitiven Darstellungen von m, und zwar in *allen* Fällen, ist. Demnach ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass die Anzahl der definitiven Darstellungen aller Zahlen $2^{s}.m$ von $s=1$ an dieselbe und das Dreifache der definitiven Darstellungen von m ist.

7.

Zur genaueren Bestimmung der Anzahl der definitiven Darstellungen einer Zahl $2^{s}.m$ führen folgende Bemerkungen.

Ist m eine Zahl von der Form $4p+1$ und eine Grundform

$$m = a^2+b^2+c^2+d^2,$$

so müssen drei der Elemente gerade sein, das vierte aber ungerade. Dann ist eine der Grundformen von $2m$

$$2m = (a-b)^2+(a+b)^2+(c-d)^2+(c+d)^2.$$

Setzt man

$$a-b=a', \quad a+b=b', \quad c-d=c', \quad c+d=d',$$

mithin

$$2m = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2,$$

und nimmt man an, dass a, b, c die geraden Elemente sind, so sind a' und b' gerade, c' und d' ungerade, und man erhält für $4m$ die drei Grundformen

$$4m = (a'-b')^2+(a'+b')^2+(c'-d')^2+(c'+d')^2,$$
$$4m = (a'-c')^2+(a'+c')^2+(b'-d')^2+(b'+d')^2,$$
$$4m = (a'-d')^2+(a'+d')^2+(b'-c')^2+(b'+c')^2.$$

In der ersten dieser Formeln sind alle Quadrate gerade Zahlen, während in den zwei anderen alle Quadrate ungerade Zahlen sind, wobei zunächst vorausgesetzt wird, dass keines dieser Quadrate Null ist.

Ist m von der Form $4p+3$, und hat man wieder die Grundform $m = a^2+b^2+c^2+d^2$, so müssen nun drei der Zahlen a, b, c, d, ungerade sein, die vierte gerade. Seien a, b, c ungerade. Behalten a', b', c', d' ihre frühere Bedeutung, so hat man wieder

$$2m = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2,$$

und es sind wieder a' und b' gerade, c' und d' ungerade; man findet daher auch hier wieder, unter der vorher gemachten Voraussetzung, dass von den drei Grundformen für $4m$ eine nur gerade Quadrate enthält, die zwei anderen aber nur ungerade Quadrate enthalten.

Hieraus folgt, dass, abgesehen von den besonderen noch zu erörternden Fällen, aus jeder Grundform einer ungeraden Zahl m sich doppelt so viel Grundformen für $4m$ ergeben, welche nur ungerade Quadrate enthalten, als solche, welche aus geraden Quadraten bestehen. Da nun *Jacobi* bewiesen hat, dass die Anzahl der *primären* Darstellungen von $4m$, die nur ungerade Quadrate enthalten, der Summe der Factoren von m, welche durch φm bezeichnet wird, gleich ist, so erhält man aus den *gesammten* Grundformen für $4m$, welche ungerade Quadrate enthalten, zusammengenommen $16\varphi m$ definitive Darstellungen. Demnach ergeben sich aus den gesammten Grundformen mit geraden Quadraten $8\varphi m$ definitive Darstellungen. Und da jede Darstellung von $4m$ aus einer dieser zwei Arten von Grundformen abzuleiten ist, so folgt, dass $24\varphi m$ die Anzahl aller definitiven Darstellungen von $4m$ ausdrückt.

Es sind nun noch die besonderen Fälle zu betrachten, wenn die Voraussetzung, dass keines der in den Grundformen für $4m$ vorkommenden Quadrate Null ist, nicht mehr statt hat.

Ist $m = 4p+1$ und $a' = b'$, also $b = 0$, so hat man

$$m = 0+a^2+c^2+d^2.$$

Nun sind a und c gerade, d ungerade. Die drei Grundformen für $4m$ reduciren sich dann auf die zwei Formen

$$4m = 0+(2a_1)^2+(c'-d')^2+(c'+d')^2,$$
$$4m = (a'-c')^2+(a'+c')^2+(b'-d')^2+(b'+d')^2,$$

von welchen die erste (indem Null als gerade Zahl betrachtet wird) nur gerade, die zweite nur ungerade Quadrate enthält. Die Permutationszahl ist bei beiden Formen dieselbe, die Zeichenzahl ist aber bei der ersten 8, bei der zweiten 16; man erhält also wieder doppelt soviel definitive Darstellungen mit ungera-

den als mit geraden Quadraten. Ist $m = 4p+3$ und $c' = d'$, so ist $d = 0$, also

$$m = a^2+b^2+c^2+0.$$

Hier sind a, b, c ungerade, die drei Grundformen reduciren sich wieder auf zwei, von welchen die eine nur gerade, die andere nur ungerade Quadrate enthält, und das Resultat ist dasselbe wie im vorhergehenden Falle.

Sind $a' = 0$, $b' = 0$, also $a = 0$ und $b = 0$, so hat man

$$m = c^2+d^2,$$

was nur stattfinden kann, wenn $m = 4p+1$; dann gehen die drei Grundformen für $4m$ in die zwei Formen

$$4m = 0+0+(c'-d')^2+(c'+d')^2,$$
$$4m = c'^2+c'^2+d'^2+d'^2$$

über, wo wieder die erste nur gerade, die zweite nur ungerade Quadrate enthält. Aus der ersten Grundform erhält man die primären Darstellungen durch Multiplication mit 12, und die Zeichenzahl ist 4; dies giebt 48 definitive Darstellungen. Aus der zweiten ergeben sich sechs primäre Darstellungen, die Zeichenzahl ist 16; man erhält also $6.16 = 2.48$ definitive Darstellungen, also wieder die doppelte Anzahl der definitiven Darstellungen mit geraden Quadraten.

Sind $a = b = c = 0$, also $m = d^2$, so hat man für $4m$ die zwei Grundformen

$$4m = 0+0+0+(2d)^2,$$
$$4m = d^2+d^2+d^2+d^2.$$

Aus der ersten nur gerade Quadrate enthaltenden Form ergeben sich vier primäre Darstellungen, die Zeichenzahl ist 2, dies giebt acht definitive Darstellungen. Bei der zweiten nur ungerade Quadrate enthaltenden Form, welche nun zugleich die einzige primäre ist, ist die Zeichenzahl 16; demnach hat man 16 definitive Darstellungen, also auch hier doppelt so viel als Darstellungen mit geraden Quadraten. Durch das Vorhergehende ist also nachgewiesen, dass in *allen* Fällen die gesammte Anzahl der definitiven Darstellungen von $4m$, welche nur ungerade Quadrate enthalten, durch Multiplication mit 16 aus der gesammten Anzahl der primären Darstellungen mit ungeraden Quadraten erhalten wird. Da diese letztere Anzahl gleich φm ist, so ist die Anzahl der entsprechenden definitiven Darstellungen gleich $16\varphi m$. Zugleich ist nachgewiesen, dass die Hälfte dieser Anzahl der Anzahl

der definitiven Darstellungen mit geraden Quadraten gleich ist, also letztere gleich $8\varphi m$, und mithin die Anzahl aller definitiven Darstellungen von $4m$ durch $24\varphi m$ ausgedrückt wird. Da nun oben (§ 4) gezeigt worden ist, dass die Anzahl der definitiven Darstellungen aller Zahlen $2^s.m$ von $s=1$ an dieselbe und das Dreifache der definitiven Darstellungen von m ist, so folgt, dass die Anzahl der definitiven Darstellungen von $2^s.m$ durch $24\varphi m$, die der definitiven Darstellungen von m durch $8\varphi m$ ausgedrückt wird. Damit ist der im § 1 erwähnte *Jacobi*sche Satz vollständig bewiesen. Zugleich ergiebt sich hieraus der Satz: Die Anzahl der definitiven Darstellungen von m ist der Anzahl der definitiven Darstellungen von $2^s.m$, die nur gerade Quadrate enthalten, gleich, wenn m eine ungerade ganze Zahl ist.

8.

Sei noch immer $m=a^2+b^2+c^2+d^2$ eine Grundform für die ungerade Zahl m. Man setze zur Abkürzung $2m=n$. Dann hat man (abgesehen von den besonderen Fällen) für $2m$ die drei Grundformen (§ 3)

$$n = (a-b)^2+(a+b)^2+(c-d)^2+(c+d)^2,$$
$$n = (a-c)^2+(a+c)^2+(b-d)^2+(b+d)^2,$$
$$n = (a-d)^2+(a+d)^2+(b-c)^2+(b+c)^2.$$

Addirt man diese drei Ausdrücke und multiplicirt noch mit 24.16, so giebt $3.24.16n$ die Summe aller Quadrate, welche in den aus der Grundform $m=a^2+b^2+c^2+d^2$ abgeleiteten definitiven Darstellungen vorkommen. Bezeichnet man diese Summe durch s, so hat man demnach $s=3.24.16n$. Nimmt man nun an, dass die Anzahl der Grundformen von m durch G bezeichnet wird, so ist $Gs=3.24.16Gn$ die Summe aller Quadrate, welche in den sämmtlichen definitiven Darstellungen von n vorkommen; bezeichnet man die Anzahl dieser Darstellungen durch N, so hat man also

$$Nn=Gs=3.24.16Gn=n.24\varphi m$$

nach dem *Jacobi*schen Satze.

Ersetzt man nun in den drei Grundformen für n, welche sich aus der Grundform $m=a^2+b^2+c^2+d^2$ ergeben, die Quadrate durch die Biquadrate, so dass man die drei Ausdrücke

$$(a-b)^4+(a+b)^4+(c-d)^4+(c+d)^4,$$
$$(a-c)^4+(a+c)^4+(b-d)^4+(b+d)^4,$$
$$(a-d)^4+(a+d)^4+(b-c)^4+(b+c)^4$$

erhält, und addirt diese, so findet man, wenn man die Summe der Biquadrate der Zahlen, deren Quadrate in den Grundformen für n vorkommen, durch A bezeichnet:

$$A = 6[a^4+b^4+c^4+d^4+2(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)],$$

oder

$$A = 6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = 6m^2 = \frac{n}{2}\cdot 3n,$$

d. h. wenn man in den drei Grundformen für n, welche sich aus der Grundform $m = a^2+b^2+c^2+d^2$ ergeben, die Summe aller darin enthaltenen Quadrate mit $\frac{n}{2}$ multiplicirt, so erhält man die Summe der Biquadrate der Zahlen, deren Quadrate in diesen Grundformen vorkommen; multiplicirt man also noch mit 24.16, so giebt $24.16A$ den Werth der Summe der Biquadrate aller Zahlen, deren Quadrate in allen definitiven Darstellungen von n vorkommen, die sich aus $m = a^2+b^2+c^2+d^2$ ergeben. Setzt man $24.16.A = S$, so hat man mithin

$$S = 24.16\cdot\frac{n}{2}\cdot 3n = \frac{n}{2}s,$$

und wenn man auf beiden Seiten noch mit G multiplicirt, so drückt

$$\frac{n}{2}Gs = \frac{n^2N}{2}$$

die Summe der Biquadrate aller Zahlen aus, deren Quadrate in allen definitiven Darstellungen von n vorkommen, und man erhält diese Summe, indem man die Summe der Quadrate mit $\frac{n}{2}$ multiplicirt.

Dasselbe Resultat ergiebt sich aber auch, wenn einer der Ausnahmefälle stattfindet. Da nämlich die in diesen Fällen vorkommenden Aenderungen der Permutationszahl oder der Zeichenzahl, wenn man z. B. von $m = a^2+b^2+c^2+d^2$ ausgeht, nur von den Werthen der Zahlen $a-b$, $a+b$ u. s. w. abhängen, nicht aber von dem Grade, auf welchen sie erhoben sind, so bleiben sie bei der Erhebung auf die vierte Potenz dieselben wie bei der Erhebung auf die zweite. Dasselbe gilt auch für die Voraussetzung, dass die drei Grundformen für n sich auf zwei oder eine reduciren. Das erste würde z. B. der Fall sein, wenn $a = b$ wäre, also $m = 2a^2+c^2+d^2$, wo nur die zwei Grundformen

$$n = 0+(2a)^2+(c-d)^2+(c+d)^2,$$
$$n = (a-c)^2+(a+c)^2+(a-d)^2+(a+d)^2$$

vorhanden sind. Die Summe der Quadrate in allen definitiven Darstellungen, die aus der Grundform $m = a^2+b^2+c^2+d^2$ stammen, ist nun

$$s = 8.24(4a^2+2c^2+2d^2)+16.24(4a^2+2c^2+2d^2) = 24.24.n.$$

Nimmt man die Biquadrate statt der Quadrate, so erhält man

$$[0+(2a)^4+(c-d)^4+(c+d)^4]8.24+[(a-c)^4+(a+c)^4+(a-d)^4+(a+d)^4]16.24 \\ = 6.8.24[4a^4+c^4+d^4+4a^2c^2+4a^2d^2+2c^2d^2].$$

Dies ist also die Summe der vierten Potenzen aller Zahlen, deren Quadrate in den vorhergehenden definitiven Darstellungen vorkommen; man bezeichne sie wieder durch S. Nun ist $n^2 = 4m^2 = 4[4a^4+c^4+d^4+4a^2c^2+4a^2d^2+2c^2d^2]$, also wieder $S = 6.8.24\cdot\frac{n^2}{4} = \frac{n}{2}s$ und $\frac{n}{2}\cdot Gs = \frac{n^2N}{2}$.

Geht man nicht von m aus, sondern allgemeiner von $2^\alpha.m$, indem man eine Grundform dieser Zahl durch

$$2^\alpha.m = x^2+y^2+z^2+u^2$$

ausdrückt, so ergeben sich daraus (von den besonderen Fällen abgesehen) die drei Grundformen

$$\begin{aligned} 2^{\alpha+1}.m &= (x-y)^2+(x+y)^2+(z-u)^2+(z+u)^2, \\ &= (x-z)^2+(x+z)^2+(y-u)^2+(y+u)^2, \\ &= (x-u)^2+(x+u)^2+(y-z)^2+(y+z)^2, \end{aligned}$$

und wenn man die Summe der Biquadrate aller in diesen Quadraten vorkommenden Zahlen durch A bezeichnet, so findet man

$$A = 6(x^2+y^2+z^2+u^2) = 3.2^{2\alpha+1}.m^2,$$

also wenn man $2^{\alpha+1}.m = n$ setzt, $A = \frac{n}{2}\cdot 3n$. Man hat demnach für jedes α dieselbe Formel, wie sie vorher für $\alpha = 0$ gefunden wurde, und es folgt daraus auch hier, dass, wenn man durch ΣB^4 die Summe der Biquadrate aller Zahlen ausdrückt, deren Quadrate in sämmtlichen definitiven Darstellungen von $2^{\alpha+1}.m$ vorkommen, man $\Sigma B^4 = \frac{n^2N}{2}$ hat, und zwar hat N, die Anzahl der definitiven Darstellungen, denselben Werth wie früher, da diese Anzahl nach dem *Jacobi*schen Satze für alle geraden Zahlen von der Form $2^\alpha.m$ dieselbe ist.

Hiermit ist der *Liouville*sche Satz vollständig bewiesen, da in Beziehung auf die besonderen Fälle nur das oben Gesagte zu wiederholen wäre.

9.

An das Vorhergehende schliessen sich noch folgende Bemerkungen. Denkt man sich (wie in § 1) die verschiedenen definitiven Darstellungen von $2^\alpha . m = n$ in der Form

$$\begin{aligned} n &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2, \\ n &= a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ n &= a_N^2 + b_N^2 + c_N^2 + d_N^2, \end{aligned}$$

erhebt man jeden dieser Ausdrücke auf die zweite Potenz und nimmt die Summe, welche also gleich Nn^2 ist, so besteht diese Summe aus zwei Theilen, wovon der eine die Summe der Biquadrate aller hier vorkommenden Elemente ist und wie früher durch ΣB^4 bezeichnet werden soll, während der andere Theil die doppelte Summe der Combinationen der in jeder Darstellung vorkommenden Quadrate zu je zweien ist und durch $2\Sigma'$ bezeichnet werden soll. Man hat demnach $Nn^2 = \frac{Nn^2}{2} + 2\Sigma'$ oder

$$\Sigma' = \frac{Nn^2}{4},$$

wie schon *Liouville* gefunden hat.

Bildet man aus $n = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$ den Ausdruck

$$(a_1^2 + b_1^2)^2 + (a_1^2 + c_1^2)^2 + \cdots + (c_1^2 + d_1^2)^2,$$

verfährt ebenso mit allen übrigen definitiven Darstellungen von n, und nimmt die Summe aller dieser Ausdrücke, welche durch S' bezeichnet werde, so findet man $S' = 3\Sigma B^4 + 2\Sigma' = 2Nn^2$.

Würde man statt der Addition die Subtraction anwenden, so dass man $(a_1^2 - b_1^2)^2 + (a_1^2 - c_1^2)^2 + \cdots + (c_1^2 - d_1^2)^2$ u. s. w. hätte, so wäre die entsprechende Summe gleich Nn^2 also gleich der Summe der Quadrate aller definitiven Darstellungen.

Wie schon *Liouville* bemerkt hat, ist der Ausdruck

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

gleich Null, da alle Zahlen in demselben zugleich mit dem positiven und dem negativen Vorzeichen vorkommen. Erhebt man diesen Ausdruck ins Quadrat, so erhält man

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2 + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{N-1} a_N) = 0.$$

Nun ist

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_N^2 = \frac{nN}{4},$$

also

$$a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{N-1}a_N = -\frac{nN}{8}.$$

Ferner ist

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_N^2)^2 = \left(\frac{Nn}{4}\right)^2 = a_1^4+a_2^4+\cdots+a_N^4+2(a_1^2a_2^2+\cdots+a_{N-1}^2a_N^2),$$

also

$$a_1^2a_2^2+\cdots+a_{N-1}^2a_N^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{N^2n^2}{16}-\frac{n^2N}{8}\right) = \frac{n^2N}{16}\cdot\frac{N-2}{2},$$

und aus

$$(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{N-1}a_N)^2 = \frac{n^2N^2}{64}$$

folgt demnach, dass, wenn man die Ausdrücke

$$a_1a_2, \quad a_1a_3, \quad \ldots \quad a_{N-1}a_N$$

zu je zweien combinirt, die Summe dieser Combinationen den Werth

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{n^2N^2}{64}-\frac{n^2N}{16}\cdot\frac{N-2}{2}\right) = -\frac{n^2N}{32}\cdot\frac{N-4}{4}$$

hat.

Summirung der *Gauss*schen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$.

(Von *L. Kronecker*.)

Das *Cauchy*sche Theorem, wonach $\int f(x+yi)\,d(x+yi) = 0$ wird, wenn man die Integration über die Umgrenzung eines Gebiets erstreckt, innerhalb dessen die Function f und ihre erste Ableitung eindeutig und endlich ist, führt auf überraschend einfache Weise zur Lösung jenes berühmten Problems der Werthbestimmung der *Gauss*schen Reihen, und dies ist deshalb von besonderem Interesse, weil bisher eigentlich nur *zwei* verschiedene directe Methoden zur Summirung dieser Reihen für beliebige Zahlen n existirten, die *Gauss*sche[1]) und die *Dirichlet*sche[2]). Allerdings hat *Cauchy* noch zwei Methoden angegeben[3]); aber zwischen der ersten von diesen beiden und der *Dirichlet*schen findet, wie ich in meinem im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juli 1880 abgedruckten Aufsatze dargelegt habe, eine innere Uebereinstimmung statt, und die zweite *Cauchy*sche Methode führt ebenso wie diejenige, welche ich in meiner Notiz[4]) „Sur une formule de *Gauss*" entwickelt habe, *direct* nur zur Werthbestimmung der *Gauss*schen Reihen für den Fall, wo n Primzahl ist, zur *allgemeinen* also nur mittels des Reciprocitätsgesetzes, während dieses bekanntlich aus der allgemeinen Werthbestimmung folgt.

Gemäss dem *Cauchy*schen Theorem ist:

$$\text{(I.)}\qquad \int \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x+yi)^2}}{1-e^{2\pi i(x+yi)}}\,d(x+yi) = 0,$$

wenn vom Punkte $(0, -y_1)$ nach $(0, -y_0)$ in gerader Linie integrirt wird, alsdann um $(0, 0)$ als Mittelpunkt im Halbkreise, dessen Inneres links lassend, nach $(0, y_0)$, dann in gerader Linie von $(0, y_0)$ nach $(0, y_1)$, von da nach $(\frac{1}{2}n, y_1)$ und von da nach $(\frac{1}{2}n, y_0)$, alsdann um $(\frac{1}{2}n, 0)$ als Mittelpunkt im Halbkreise, dessen Inneres links lassend, nach $(\frac{1}{2}n, -y_0)$, ferner in gerader Linie von $(\frac{1}{2}n, -y_0)$ nach $(\frac{1}{2}n, -y_1)$ und von da nach $(0, -y_1)$, endlich um jeden der in der x-Axe liegenden Punkte $(k, 0)$, für welche k eine positive ganze Zahl und kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist, in einem Kreise mit dem Radius y_0, das Innere zur Linken lassend. Dabei wird y_0 und y_1 als positiv vorausgesetzt und $y_0 < \frac{1}{4}$. Lässt man nun y_0 zu Null hin abnehmen, so geht die Gleichung (I.) in folgende über:

$$\text{(II.)}\qquad \lim_{y_0=0} i\sum_{\alpha,\varepsilon}(-1)^\alpha \varepsilon \int_{\varepsilon y_0}^{\varepsilon y_1} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x_\alpha+yi)^2}}{1-e^{2\pi i(x_\alpha+yi)}}\,dy + \sum_{\varepsilon}\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2}n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x+\varepsilon y_1 i)^2}}{1-e^{2\pi i(x+\varepsilon y_1 i)}}\,dx - \tfrac{1}{2}\sum_h e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} = 0,$$

$$(\alpha = 0, 1;\ x_0 = 0,\ x_1 = \tfrac{1}{2}n;\ \varepsilon = +1, -1;\ h = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

---

[1]) „Summatio quarumdam serierum singularium." Commentationes soc. reg. scientiarum Gottingensis rec. Vol. I, 1811. *Gauss* Werke, Bd. II, S. 9. Vgl. auch *Gauss* Werke, Bd. II, S. 155.

[2]) „Ueber eine neue Anwendung bestimmter Integrale auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen" (Abhandlungen der Berliner Akademie von 1835, S. 391, und *G. Lejeune Dirichlets* Werke Bd. I, S. 237) ferner „Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies" (dieses Journal Bd. XVII, S. 57, und *G. Lejeune Dirichlets* Werke, Bd. I, S. 257), sowie § 9 der Abhandlung: „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres" (dieses Journal Bd. XXI, S. 134, und *G. Lejeune Dirichlets* Werke, Bd. I, S. 473).

[3]) „Méthode simple et nouvelle pour la détermination des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes". (Comptes Rendus T. X, p. 560; *Liouvilles* Journal, Jahrgang 1840, Bd. V, S. 154, Oeuvres complètes, Ire Série, T. V, p. 152).

[4]) *Liouvilles* Journal, Jahrgang 1856, Sér. II, Bd. I, S. 392.

und zwar ist der letzte der drei Theile auf der linken Seite gleich dem Gesammtresultat der Integration über die beiden Halbkreise und über die Kreise, da das Resultat der Integration um den ersten Halbkreis gleich $-\frac{1}{2}$ wird, um den zweiten aber gleich $-\frac{1}{2}$ oder gleich Null, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und um einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(k, 0)$ gleich $-e^{\frac{2k^2\pi i}{n}}$, also um sämmtliche Kreise gleich:

$$-\sum_k e^{\frac{2k^2\pi i}{n}} \quad \text{oder} \quad -\tfrac{1}{2}\sum_k e^{\frac{2k^2\pi i}{n}} - \tfrac{1}{2}\sum_k e^{\frac{2(n-k)^2\pi i}{n}} \qquad (0 < k < \tfrac{1}{2}n).$$

Wird in dem ersten Theile auf der linken Seite der Gleichung (II.) an Stelle der Integrationsvariabeln y eine neue Variable u mittelst der Substitution $y = \varepsilon u|\sqrt{n}|$ eingeführt, und im zweiten Theile, für den Fall $\varepsilon = -1$, die Integrationsvariable x mit $\frac{1}{2}n - x$ vertauscht, so resultirt die Gleichung:

$$\text{(III.)} \quad \lim_{y_0 = 0} |\sqrt{n}|(i + i^{1-n}) \int_{\frac{y_0}{|\sqrt{n}|}}^{\frac{y_1}{|\sqrt{n}|}} e^{-2u^2\pi i}\, du + \sum_{\alpha\ (\alpha = 0,\ 1)} i^{\alpha n} \int_0^{\frac{1}{2}n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x + y_1 i)^2}\, dx}{(-1)^{\alpha n} - e^{2\pi i(x + y_1 i)}} = \tfrac{1}{2}\sum_{h\ (h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1)} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}},$$

in welcher $|\sqrt{n}|$ nach *Weierstrass*scher Weise den absoluten Werth von $\sqrt{n}$ bezeichnet. Lässt man nunmehr y_1 ins Unendliche wachsen, so wird der zweite Theil des Ausdrucks auf der linken Seite gleich Null; denn der absolute Werth jedes der beiden Integrale, aus welchen dieser zweite Theil besteht, ist kleiner als $(1 + 2e^{-2\pi y_1}) \int_0^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{4\pi}{n} x y_1}\, dx$, sobald nur $2e^{-2\pi y_1} < 1$ ist. Die Gleichung (III.) geht daher in folgende über:

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} = 2|\sqrt{n}|(i + i^{1-n}) \int_0^{\infty} e^{-2u^2\pi i}\, du,$$

aus welcher, indem darin $n = 3$ oder $n = 4$ genommen wird, der Werth des Integrals auf der rechten Seite und sonach die Finalgleichung:

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} = \frac{i + i^{1-n}}{i + 1}|\sqrt{n}|$$

hervorgeht, welche die vollständige Summirung der *Gauss*schen Reihen enthält.

Da die Gleichung (II.) leicht aus der Formel (*A*.) in der schon aus dem Jahre 1814 stammenden *Cauchy*schen Abhandlung „Mémoire sur les intégrales définies“ (Oeuvres complètes, Ire Série, T. I, p. 338) abgeleitet werden kann und ganz unmittelbar aus der Formel (11.), p. 98 der „Exercices de Mathématiques“ vom Jahre 1826 (Oeuvres complètes, IIe Série, p. 128) hervorgeht, wenn darin für $f(x + yi)$ die in der obigen Gleichung (I.) unter dem Integralzeichen stehende Function von $x + yi$ genommen wird, so erscheint es auffallend — namentlich mit Rücksicht auf die Bemerkungen in der Einleitung zu der angeführten Abhandlung „Méthode simple et nouvelle etc.“ — dass *Cauchy* darin nicht von seinen erwähnten Formeln Gebrauch gemacht hat. Aber auch *Gauss*, der doch wenigstens gegen Ende des Jahres, in welchem die Abhandlung „Summatio quarumdam serierum singularium“ erschienen ist, das Theorem schon kannte[1]), mittels dessen oben die Summirung der Reihen ausgeführt worden ist, hat dasselbe, soviel ich weiss, niemals dazu benutzt.

[1]) „Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Bessel*“, S. 157.

Eine algebraische Untersuchung über Thetafunctionen von drei Argumenten.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

§ 1.

Für $\varrho = 3$ lässt sich eine Entwickelung durchführen, die der sehr ähnlich ist, welche in einem vorangehenden Aufsatz *) für $\varrho = 2$ gegeben wurde. Nur besteht der wesentliche Unterschied, dass wir hier die Argumente der Theta nicht als willkürlich veränderliche Grössen annehmen, sondern sie beschränken auf solche Werthe, für welche eine der 64 existirenden Functionen verschwindet. Dann können wir uns wieder die Aufgabe stellen, alle geraden *Abel*schen Functionen rational durch drei Veränderliche ξ, η, ζ auszudrücken, die einer algebraischen Gleichung genügen. Man erhält so zwar nur eine particuläre Lösung der zwischen den Theta bestehenden Relationen. Aber erstens ist es möglich, von einer solchen particulären Lösung durch das Additionstheorem zur allgemeinen überzugehen. Zweitens bietet die Untersuchung, auch wenn man das Problem nicht bis zu diesem Ziele verfolgt, einige interessante algebraische oder analytisch-geometrische Resultate. Es treten wieder zwei Flächen auf, von denen die eine der *Weddle*schen Fläche der Kegelspitzen, die andre der *Kummer*schen Fläche analog ist. Wir wollen zunächst einen Weg angeben, auf dem man direct zur Gleichung dieser zweiten Fläche gelangen kann.

Bei unbeschränkten Werthen der Argumente bestehen zwischen den Quadraten der Theta lineare Relationen, vermöge deren sich alle durch acht unter ihnen linear und homogen ausdrücken lassen. An Stelle dieser acht Grössen können wir auch lineare Verbindungen derselben setzen. Es sei Θ eine bestimmte von den 64 Functionen. Zu denjenigen Grössen, welche

*) Ueber die Beziehungen zwischen den sechzehn Thetafunctionen von zwei Variabeln. Dieses Journal Bd. 105, S. 233.

sich als lineare Aggregate der Θ_m^2 darstellen lassen, gehören dann auch die sechs folgenden:

$$\Theta^2 \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u^2}, \quad \Theta^2 \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u \partial u'}, \quad \ldots \quad \Theta^2 \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u''^2}.$$

Zu Θ^2 und den sechs Grössen dieser Reihe müssen wir noch eine achte, U, hinzufügen, um ein System zu erhalten, durch welches alle Functionen Θ_m^2 linear ausgedrückt werden können.

Die angegebene Darstellung muss auch gültig bleiben, wenn man $\Theta = 0$ setzt. Bezeichnet man die Differentialquotienten $\frac{\partial \Theta}{\partial u}, \frac{\partial \Theta}{\partial u'}, \frac{\partial \Theta}{\partial u''}$ mit A, B, C, so geht für $\Theta = 0$:

$$\Theta^2 \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u^2} \quad \text{in} \quad -A^2, \quad \Theta^2 \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u \partial u'} \quad \text{in} \quad -AB$$

über, u. s. f.; es zeigt sich also, dass jede Grösse Θ_m^2 darstellbar wird in der Form:

$$\Theta_m^2 = \alpha_m U + F_m(A, B, C),$$

wo α_m eine Constante, F_m einen homogenen quadratischen Ausdruck bedeutet. Setzt man nun

$$\frac{A}{C} = \lambda, \quad \frac{B}{C} = \mu, \quad \frac{U}{C^2} = \nu,$$

so werden alle Thetaquotienten als Quadratwurzeln rationaler Functionen von λ, μ, ν dargestellt, und wenn man diese Ausdrücke in eine der übrigen Theta-Relationen einführt, so erhält man in irrationaler Form die Gleichung der gesuchten Fläche.

§ 2.

Der Bezeichnung aller 64 Theta möge eine Hauptreihe

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots \quad \Theta_7$$

zu Grunde gelegt werden. Von den Zahlen 1 bis 7 haben wir alle Combinationen ungerader Ordnung zu bilden. Dadurch werden dann alle Theta bestimmt, und zwar ist Θ_m eine gerade oder ungerade Function, je nachdem die Ordnungszahl von m congruent -1 oder congruent $+1$ (mod. 4) ist. Der Einfachheit wegen ersetzen wir die Combinationen, deren Ordnungszahl grösser als 3 ist, durch die complementären von gerader Ordnung; es sind dann

$$(1.) \quad \Theta, \quad \Theta_{123}, \quad \Theta_{124}, \quad \ldots \quad \Theta_{567}$$

die 36 geraden, und

$$(2.) \quad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots \quad \Theta_7; \quad \Theta_{12}, \quad \ldots \quad \Theta_{67}$$

die 28 ungeraden Theta. Wir beschränken nun die Argumente durch die Gleichung:

$$(3.) \quad \Theta = 0.$$

Zur Aufstellung der Relationen verwenden wir den bekannten Satz, dass zwischen vier Producten von je zwei ungeraden Theta eine lineare Relation besteht, unter der Voraussetzung, dass alle vier Producte zu der gleichen Periode gehören. Eine solche Gleichung muss deshalb stattfinden zwischen

$$\Theta_{16}\Theta_{17}, \quad \Theta_{26}\Theta_{27}, \quad \Theta_{36}\Theta_{37}, \quad \Theta_6\Theta_7,$$

also auch zwischen:

$$\Theta_1\Theta_{167}, \quad \Theta_2\Theta_{267}, \quad \Theta_3\Theta_{367} \quad \text{und} \quad \Theta\Theta_{67};$$

denn das zweite System geht aus dem ersten hervor durch Vermehrung der Argumente um die Periode 7. Wenn also $\Theta = 0$ ist, so sind

$$\Theta_1\Theta_{167}, \quad \Theta_2\Theta_{267}, \quad \Theta_3\Theta_{367}$$

durch eine homogene lineare Gleichung verbunden. Nun ziehen wir denselben Schluss, wie in der anfangs citirten Arbeit, wo es sich um Functionen von zwei Argumenten handelte. Wir setzen:

$$\Theta_\alpha\Theta_\beta\Theta_\gamma\Theta_{\alpha\beta\gamma} = F_{\alpha\beta\gamma}.$$

Da immer

$$F_{\alpha\varkappa\lambda}, \quad F_{\beta\varkappa\lambda}, \quad F_{\gamma\varkappa\lambda}$$

einer linearen homogenen Gleichung genügen, wenn α, β, γ, $\varkappa$, λ irgend fünf der Zahlen 1 bis 7 bedeuten, so lassen sich alle 35 Producte $F_{\alpha\beta\gamma}$ als lineare Functionen von vier Grössen x, y, z, w darstellen, und es muss, wenn $\varkappa$ irgend eine bestimmte der sieben Zahlen bedeutet, ein festes Werthsystem

$$a_\varkappa, \quad b_\varkappa, \quad c_\varkappa, \quad d_\varkappa$$

geben, für welches alle funfzehn linearen Functionen $F_{\alpha\beta\varkappa}$ verschwinden. Nimmt man diese sieben festen Werthsysteme als gegeben an, so lässt sich $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$ als Gleichung derjenigen Ebene auffassen, welche durch die Punkte α, β, γ hindurchgeht. Die linearen Functionen $F_{\alpha\beta\gamma}$ sind hierdurch bestimmt bis auf constante Factoren.

Wir fassen diese sieben Werthsysteme hier als die Parameter der

Theorie auf*). Da mit ihnen jede lineare Transformation vorgenommen werden darf, so sind nur sechs von diesen 4.7 Grössen als wesentliche Parameter aufzufassen. Die Coordinaten der festen Punkte sind deshalb auch durch keine Gleichung verbunden, und speciell ist die Annahme auszuschliessen, dass vier der Punkte in einer Ebene oder sechs auf einem Kegel zweiten Grades liegen, dessen Spitze durch den siebenten Punkt gebildet wird.

§ 3.

Wir stellen das neue System auf:

$$\Theta_{13}\Theta_{24}, \quad \Theta_{23}\Theta_{14}, \quad \Theta_{6}\Theta_{57}, \quad \Theta_{5}\Theta_{67}.$$

Auch diese Grössen müssen durch eine lineare Gleichung verbunden sein. Davon gehen wir über zu folgendem System:

$$\Theta_{135}\Theta_{245}, \quad \Theta_{235}\Theta_{145}, \quad \Theta_{56}\Theta_{7}, \quad \Theta\Theta_{567}$$

durch Vermehrung der Argumente um die halbe Periode 5. Da $\Theta = 0$ ist, bekommen wir auf diese Weise eine Gleichung:

$$A\Theta_{135}\Theta_{245} + B\Theta_{235}\Theta_{145} = C\Theta_{56}\Theta_{7}.$$

Diese multipliciren wir mit

$$\Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4\Theta_5^2$$

und setzen

$$(1.) \qquad \Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4\Theta_5\Theta_6\Theta_7 = \Pi.$$

Dann folgt:

$$(2.) \qquad AF_{135}F_{245} + BF_{235}F_{145} = C.\Pi\cdot\frac{\Theta_5}{\Theta_6}\Theta_{56}.$$

Setzen wir:

$$(3.) \qquad \Pi\cdot\frac{\Theta_5\Theta_{56}}{\Theta_6} = G_{5,6},$$

so wird durch die Gleichung (2.) $G_{5,6}$ dargestellt als quadratische Function,

---

*) Es sind dieselben Parameter, welche Herr ***Frobenius*** in seinen Untersuchungen über die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung verwendet (dieses Journal Bd. 99). Mit den Coefficienten der linearen Anfangsglieder von $\Theta_1, \ldots \Theta_7$ hängen die Raumpunkte (1) bis (7) in folgender Weise zusammen. Es seien $u_1, u_2, \ldots u_7$ diese Anfangsglieder. Da es lineare homogene Functionen von drei Argumenten sind, so bestehen zwischen den Grössen u vier Gleichungen:

$$\sum_{\alpha=1}^{7}(A_\alpha u_\alpha) = 0, \quad \Sigma(B_\alpha u_\alpha) = 0, \quad \Sigma(C_\alpha u_\alpha) = 0, \quad \Sigma(D_\alpha u_\alpha) = 0,$$

und man kann A_α, B_α, C_α, D_α direct den Grössen a_α, b_α, c_α, d_α proportional annehmen.

In derselben Beziehung stehen für $\varrho = 2$ die Punkte 1 bis 6 zu den Anfangsgliedern der sechs ungeraden Thetafunctionen.

die im Punkte 5 von der zweiten Ordnung, und ausserdem in 1, 2, 3, 4 von der ersten Ordnung verschwindet. Ebenso könnten wir einen quadratischen Ausdruck für dieselbe Grösse finden, der auch im Punkte 5 von der zweiten Ordnung, und ausserdem in 1, 2, 3, 7 verschwindet. Offenbar müssen beide Ausdrücke identisch sein; $G_{5,6}$ ist also diejenige, bis auf einen constanten Factor bestimmte, quadratische Function von x, y, z, w, die in allen Hauptpunkten mit Ausnahme von (6) verschwindet, und zwar im Punkte (5) von der zweiten Ordnung. $G_{5,6} = 0$ ist die Gleichung eines Kegels zweiten Grades mit der Spitze in (5), der nicht durch (6) hindurchgeht, aber durch die übrigen Punkte.

Functionen dieser Art existiren 42, die man paarweise zusammenfassen kann. Dabei ist

$$(4.) \qquad G_{\alpha,\beta} G_{\beta,\alpha} = L_{\alpha\beta}$$

eine Function vierten Grades, die in allen sieben festen Punkten von der zweiten Ordnung verschwindet. Aus den Gleichungen:

$$(5.) \qquad \begin{cases} \Pi \cdot \dfrac{\Theta_\alpha}{\Theta_\beta} \Theta_{\alpha\beta} = G_{\alpha,\beta}, \\ \Pi \cdot \dfrac{\Theta_\beta}{\Theta_\alpha} \Theta_{\alpha\beta} = G_{\beta,\alpha} \end{cases}$$

folgt aber:

$$(6.) \qquad \Pi^2 . \Theta_{\alpha\beta}^2 = L_{\alpha\beta}.$$

So sind also zunächst alle Grössen $\Pi^2 . \Theta_m^2$ mit zweigliedrigem Index dargestellt als Functionen vierten Grades, die mit ihren ersten Ableitungen in den sieben Hauptpunkten verschwinden.

Ferner ergiebt sich aus den beiden Gleichungen (5.):

$$(7.) \qquad \frac{\Theta_\alpha^2}{\Theta_\beta^2} = \frac{G_{\alpha,\beta}}{G_{\beta,\alpha}}.$$

Aus dieser letzten Formel folgt, wenn α, β, γ irgend drei der Zahlen 1 bis 7 bedeuten:

$$(8.) \qquad G_{\alpha,\beta} G_{\beta,\gamma} G_{\gamma,\alpha} - G_{\beta,\alpha} G_{\gamma,\beta} G_{\alpha,\gamma} = 0.$$

Dies sind verschiedene Formen der algebraischen Gleichung, welche zwischen den Veränderlichen x, y, z, w besteht. Vermöge dieser Gleichung ist der Punkt (x, y, z, w) auf eine Fläche sechsten Grades mit sieben dreifachen Punkten beschränkt; denn der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (8.) verschwindet offenbar in allen Hauptpunkten von der dritten Ordnung.

§ 4.

Weiter betrachten wir die vier Producte:

$$\Theta_2\Theta_3, \quad \Theta_{12}\Theta_{13}, \quad \Theta_{42}\Theta_{43}, \quad \Theta_{52}\Theta_{53},$$

die ebenfalls den Voraussetzungen des Fundamentalsatzes genügen. Hieraus gehen, durch Vermehrung der Argumente um die halbe Periode 12, die Grössen hervor:

$$\Theta_1\Theta_{123}, \quad \Theta\Theta_{23}, \quad \Theta_{14}\Theta_{567}, \quad \Theta_{15}\Theta_{467}.$$

Daraus folgt, da $\Theta = 0$ ist, dass sich

$$\Theta_1\Theta_{123} \quad \text{durch} \quad \Theta_{14}\Theta_{567} \quad \text{und} \quad \Theta_{15}\Theta_{467}$$

ausdrücken lässt. — Nun ist

$$G_{4,1} = \Pi \cdot \frac{\Theta_4\Theta_{14}}{\Theta_1},$$

$$F_{567} = \Theta_5\Theta_6\Theta_7\Theta_{567}.$$

Folglich

$$G_{4,1}F_{567} = \frac{\Pi\Theta_4\Theta_5\Theta_6\Theta_7}{\Theta_1}\Theta_{14}\Theta_{567}.$$

Ebenso ist

$$G_{5,1}F_{467} = \frac{\Pi\Theta_4\Theta_5\Theta_6\Theta_7}{\Theta_1}\Theta_{15}\Theta_{467},$$

$$\Pi\Theta_4\Theta_5\Theta_6\Theta_7\Theta_{123} = \frac{\Pi\Theta_4\Theta_5\Theta_6\Theta_7}{\Theta_1}\Theta_1\Theta_{123}.$$

Da nun die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser drei Gleichungen durch eine lineare Gleichung verbunden sind, so folgt, dass sich das Product

$$\Pi\Theta_4\Theta_5\Theta_6\Theta_7\Theta_{123} = \Pi^2\frac{\Theta_{123}}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3}$$

linear durch $G_{4,1}F_{567}$ und $G_{5,1}F_{467}$ darstellen lässt. Beide Terme sind vom dritten Grade und werden Null von der zweiten Ordnung in den Punkten (4), (5), (6), (7), von der ersten in (2) und (3); die Summe aber muss, der Symmetrie wegen, auch im Punkte (1) verschwinden. Wir erhalten also:

$$\Pi^2 \cdot \frac{\Theta_{123}}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3} = H_{123},$$

wo H_{123} eine kubische Function bedeutet, die in den Punkten (1), (2), (3) von der ersten, in den vier übrigen von der zweiten Ordnung verschwindet. Dieselbe ist wieder durch die angegebenen Bedingungen bis auf einen constanten Factor bestimmt.

Aus den beiden Gleichungen:

$$(1.) \qquad \Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_{123} = F_{123},$$

$$(2.) \qquad \frac{\Pi^2.\Theta_{123}}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3} = H_{123}$$

folgt durch Multiplication:

$$(3.) \qquad \Pi^2.\Theta_{123}^2 = F_{123}H_{123} = L_{123};$$

es wird wieder $\Pi^2\Theta_m^2$ als zerfallende Function vierten Grades dargestellt, die in allen Hauptpunkten von der zweiten Ordnung verschwindet.

Aus denselben Gleichungen ergiebt sich durch Division:

$$(4.) \qquad \frac{\Pi^2}{\Theta_1^2\Theta_2^2\Theta_3^2} = \frac{H_{123}}{F_{123}}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{\Pi^2}{\Theta_1^2\Theta_2^2\Theta_4^2} = \frac{H_{124}}{F_{124}},$$

mithin:

$$(5.) \qquad \frac{\Theta_3^2}{\Theta_4^2} = \frac{F_{123}.H_{124}}{F_{124}H_{123}}.$$

Nach dem vorigen Paragraphen aber ist:

$$\frac{\Theta_3^2}{\Theta_4^2} = \frac{G_{3,4}}{G_{4,3}};$$

also erhalten wir:

$$(6.) \qquad G_{3,4}F_{124}H_{123} - G_{4,3}F_{123}H_{124} = 0.$$

Dies ist eine neue Form für die Gleichung der Fundamentalfläche, auf welche der Punkt (x, y, z, w) beschränkt ist. Während aus der ersten Form (Gleichung (8.), § 3) hervorgeht, dass die 21 Raumcurven vierter Ordnung auf dieser Fläche liegen, in denen die Kegelpaare $G_{\alpha,\beta} = 0$, $G_{\beta,\alpha} = 0$ zusammentreffen, so folgt hier, dass dieselbe Fläche auch die ebenen Curven dritten Grades enthält, in welchen die Flächen $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$, $H_{\alpha\beta\gamma} = 0$ sich schneiden.

§ 5.

Endlich benutzen wir die lineare Gleichung, welche zwischen

$$\Theta_6\Theta_7, \quad \Theta_{61}\Theta_{71}, \quad \Theta_{62}\Theta_{72}, \quad \Theta_{63}\Theta_{73}$$

besteht. Aus den Formeln:

$$G_{7,\alpha} = \frac{\Pi.\Theta_7\Theta_{7\alpha}}{\Theta_\alpha},$$

$$G_{\alpha,6} = \frac{\Pi.\Theta_\alpha\Theta_{6\alpha}}{\Theta_6}$$

folgt:

$$G_{7,a}G_{a,6} = \frac{\Pi^2.\Theta_7}{\Theta_6}\cdot\Theta_{7a}\Theta_{6a}.$$

Folglich existirt eine lineare Relation zwischen:

$$\Pi^2\Theta_7^2, \quad G_{1,6}G_{7,1}, \quad G_{2,6}G_{7,2}, \quad G_{3,6}G_{7,3}.$$

Hier zeigt sich, dass $\Pi^2\Theta_7^2$ dargestellt wird durch eine Function vierter Ordnung, L_7, die im Punkte (7) von der dritten Ordnung verschwindet. Denn der Punkt (7) ist ein Doppelpunkt der Fläche $G_{7,1}=0$, er liegt aber auch auf der Fläche $G_{1,6}=0$. Ausserdem wird der Ausdruck Null von der zweiten Ordnung in den übrigen Punkten; dies ist evident für die Punkte (1) bis (5) und muss wieder für den Punkt (6) aus der Symmetrie der Voraussetzungen geschlossen werden. Wir bezeichnen diese Function, welche wieder durch die angegebenen Bedingungen algebraisch bestimmt ist bis auf einen constanten Factor, als L_7:

$$(1.) \qquad \Pi^2\Theta_7^2 = L_7.$$

Es sind auf diese Weise 63 Functionen vierten Grades definirt, die alle, nebst ihren ersten Ableitungen, in den sieben Hauptpunkten verschwinden; nämlich 35+21 zerfallende:

$$G_{\alpha,\beta}G_{\beta,\alpha} = L_{\alpha\beta},$$
$$F_{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} = L_{\alpha\beta\gamma},$$

und sieben, L_α, welche nicht zerfallen, aber in einem Hauptpunkte von der dritten Ordnung verschwinden. Unter der Annahme, dass $\Theta=0$ ist, haben wir durch diese Ausdrücke die Quadrate der übrigen Thetafunctionen dargestellt:

$$(2.) \qquad \Pi^2.\Theta_m^2 = L_m.$$

Die linearen Relationen, welche zwischen den Quadraten der Theta bestehen, werden identisch erfüllt, sobald man für sie die gefundenen Ausdrücke einsetzt. Je neun Thetaquadrate, und, wenn man $\Theta=0$ setzt, schon je acht der übrigen, sind durch eine lineare Gleichung verbunden. Dasselbe gilt für die rationalen Ausdrücke L_m. Denn es sind sämmtlich Functionen vierten Grades, deren Coefficienten 4.7 Bedingungen genügen müssen; es giebt nur sieben linear unabhängige Functionen vierten Grades L, die in den sieben festen Punkten von der zweiten Ordnung verschwinden.

Zu den verschiedenen Formen der Fundamentalgleichung können wir noch diese hinzufügen:

$$(3.) \quad F_{123}F_{456}L_7 - H_{123}H_{456} = 0,$$

$$(4.) \quad G_{1,2}L_2 - G_{2,1}L_1 = 0.$$

Denn es ist

$$F_{123} = \Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_{123}, \quad F_{456} = \Theta_4\Theta_5\Theta_6\Theta_{456}, \quad L_7 = \Pi^2.\Theta_7^2;$$

folglich:

$$F_{123}F_{456}L_7 = \Pi^3.\Theta_7\Theta_{123}\Theta_{456}.$$

Ferner:

$$H_{123} = \frac{\Pi^2.\Theta_{123}}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3}, \quad H_{456} = \frac{\Pi^2.\Theta_{456}}{\Theta_4\Theta_5\Theta_6},$$

daher ist auch:

$$H_{123}H_{456} = \Pi^3.\Theta_7\Theta_{123}\Theta_{456}.$$

Die andere Formel ergiebt sich ebenso; da

$$G_{1,2} = \frac{\Pi.\Theta_1\Theta_{12}}{\Theta_2}, \quad L_2 = \Pi^2.\Theta_2^2$$

ist, so ist:

$$G_{1,2}L_2 = \Pi^3.\Theta_1\Theta_2\Theta_{12} = G_{2,1}L_1.$$

§ 6.

Unter den speciellen Curven, die auf der Fundamentalfläche liegen, wurden bereits erwähnt die ebenen Curven dritter Ordnung, in denen eine Ebene $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$ die zugehörige Fläche dritten Grades $H_{\alpha\beta\gamma} = 0$ schneidet, und die Schnittlinien der Kegelpaare $G_{\alpha,\beta} = 0$, $G_{\beta,\alpha} = 0$. Jede solche Curve ist Doppellinie einer zerfallenden Fläche $L_m = 0$; das entsprechende Θ_m verschwindet also in allen ihren Punkten, während die 62 übrigen Thetafunctionen von 0 verschiedene Werthe haben.

Es giebt aber eine zweite Gruppe von 28 speciellen Curven auf der Fläche, in denen eine grössere Anzahl von Thetafunctionen verschwindet; sodass wir den Schluss ziehen müssen, dass längs denselben die Argumente constant sind.

I. Von solcher Beschaffenheit ist erstens die gerade Linie, welche zwei Hauptpunkte mit einander verbindet. Betrachten wir z. B. die Verbindungslinie der Punkte (1) und (2), die wir λ_{12} nennen. Durch dieselbe gehen die Ebenen:

$$F_{123} = 0, \quad F_{124} = 0, \quad \ldots \quad F_{127} = 0;$$

also verschwinden in λ_{12} die Functionen

$$(1.) \quad L_{123}, \quad L_{124}, \quad \ldots \quad L_{127}.$$

Es verschwinden aber auch in derselben Linie die Functionen

$$(2.) \quad L_{345}, \quad L_{346}, \quad \ldots \quad L_{567},$$

deren Indices keines der beiden Elemente 1, 2 enthalten; denn wenn auch die Linie λ_{12} nicht der Ebene $F_{345} = 0$ angehört, so liegt sie doch auf der Fläche dritten Grades $H_{345} = 0$. Wir hatten nämlich in § 4 den Ausdruck H_{123} zusammengesetzt aus:

$$G_{4,1} F_{567} \quad \text{und} \quad G_{5,1} F_{467}.$$

Ebenso lässt sich H_{345} zusammensetzen aus

$$G_{6,4} F_{712} \quad \text{und} \quad G_{7,4} F_{612}.$$

Daraus folgt die ausgesprochene Behauptung. Die Fläche $H_{234} = 0$ aber geht nicht durch die Linie λ_{12}. Denn H_{234} kann aus

$$G_{6,4} F_{715} \quad \text{und} \quad G_{1,4} F_{567}$$

zusammengesetzt werden. Nun enthält zwar der Kegel $G_{1,4} = 0$ die Linie λ_{12}; denn seine Spitze ist der Punkt (1), und auf der Fläche liegt auch der Punkt (2), aber weder die Ebene $F_{715} = 0$ noch der Kegel $G_{6,4} = 0$ enthält diese Gerade. Wir sehen also: Von den Functionen $L_{\alpha\beta\gamma}$ verschwinden diejenigen in allen Punkten von λ_{12}, deren Index $\alpha\beta\gamma$ entweder keins der beiden Elemente 1, 2 oder beide enthält, während die übrigen in dieser Linie nicht verschwinden.

Weder $G_{1,2}$ noch $G_{2,1}$ verschwindet in λ_{12}. Dasselbe gilt von den Factoren von L_{34}. Aber die Flächen $G_{1,3} = 0$ und $G_{2,3} = 0$ enthalten diese Linie. Daraus geht hervor, dass von den Grössen $L_{\alpha\beta}$ die und nur die in der Linie λ_{12} verschwinden, deren Index $\alpha\beta$ das eine der beiden Elemente 1, 2 enthält, das andere aber nicht:

$$(3.) \quad L_{13}, \quad L_{14}, \quad \ldots \quad L_{17}; \quad L_{23}, \quad L_{24}, \quad \ldots \quad L_{27}.$$

Die Function L_3 zerfällt nicht. Zufolge § 5 lässt sich L_3 zusammensetzen aus

$$G_{3,1} G_{1,5}, \quad G_{3,2} G_{2,5}, \quad G_{3,4} G_{4,5}.$$

$G_{1,5}$ und $G_{2,5}$ werden 0 in der Linie λ_{12}, aber weder $G_{3,4}$ noch $G_{4,5}$; folglich liegt die Linie λ_{12} nicht auf der Fläche $L_3 = 0$.

Dagegen kann L_1 zusammengesetzt werden aus

$$G_{1,3} G_{3,6}, \quad G_{1,4} G_{4,6}, \quad G_{1,5} G_{5,6};$$

alle diese Terme verschwinden in λ_{12}, folglich auch L_1. Dasselbe gilt von L_2.

Fasst man diese einzelnen Resultate zusammen, so folgt:

Längs der Linie λ_{12} verschwinden alle Thetafunctionen, welche in ungerade übergehen, wenn man die Argumente um die halbe Periode 12 vermehrt. Man kann die Function Θ, welche in allen Punkten der Fläche 0 ist, auch hierzu rechnen; dann ist die Anzahl der Grössen Θ_m, welche in λ_{12} verschwinden, gleich 28. Da die Argumente nothwendig congruent 0 sein müssen, wenn alle ungeraden Thetafunctionen den Werth 0 haben, so folgt, dass die Argumente der Theta in λ_{12} constant, und zwar gleich der halben Periode 12 sind.

II. Es giebt aber noch sieben andere Linien auf der Fläche, welche dieselbe Eigenschaft besitzen, wie die 21 Geraden $\lambda_{\alpha\beta}$. Irgend sechs der sieben Hauptpunkte bestimmen eine Raumcurve dritter Ordnung. Wir nennen diese Curven $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_7$; sodass λ_1 diejenige ist, welche durch die Punkte (2) bis (7), aber nicht durch den Punkt (1) hindurchgeht. Nach einem bekannten Satz liegt die Raumcurve λ_1 auf allen Kegelflächen:

$$G_{2,1} = 0, \quad G_{3,1} = 0, \quad \ldots \quad G_{7,1} = 0,$$

die den Punkt (1) nicht enthalten, und nur auf diesen; also sind in ihr die Functionen

$$L_{12}, \quad L_{13}, \quad \ldots \quad L_{17} = 0,$$

während

$$L_{23}, \quad L_{24}, \quad \ldots \quad L_{67}$$

von 0 verschiedene Werthe haben.

Ferner liegt λ_1 auf der Fläche $H_{123} = 0$; denn es ist:

$$H_{123} = AG_{4,1}F_{567} + BG_{5,1}F_{467}.$$

Endlich gehört sie auch den Flächen $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ etc. an; denn es ist L_2 darstellbar in der Form:

$$L_2 = AG_{2,3}G_{3,1} + BG_{2,4}G_{4,1} + CG_{2,5}G_{5,1}.$$

Man sieht, dass in den Punkten der Linie λ_1 alle diejenigen Thetafunctionen verschwinden, welche durch Vermehrung der Argumente um die zum Index 1 gehörige halbe Periode in ungerade übergeführt werden. Daraus folgt, dass auch längs dieser Linien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_7$ die Argumente constant sind und zwar gleich den halben Perioden, welche denselben Index haben.

Sobald man also für die Argumente eine der 28 halben Perioden setzt, welche die Function Θ in eine ungerade überführen, so werden die

*Abel*schen Functionen

$$\frac{x}{w}, \quad \frac{y}{w}, \quad \frac{z}{w}$$

unbestimmt; einem solchen Werthsystem der Argumente entsprechen Punkte (x, y, z, w), die eine ganze Linie der Fläche erfüllen.

Dass den übrigen Perioden (123), (124) etc. keine derartigen Curven entsprechen, liegt daran, dass wir uns hier auf solche Werthsysteme beschränken müssen, wofür $\Theta = 0$ wird.

§ 7.

Wir sehen ab von der Gleichung, welche zwischen x, y, z, w besteht, und betrachten jetzt diese Grössen als unabhängige Veränderliche. Diejenigen homogenen ganzen Functionen vierten Grades, die in sämmtlichen Hauptpunkten von der zweiten Ordnung verschwinden, wollen wir allgemein als L-Functionen bezeichnen; zu ihnen gehören die 63 speciellen Ausdrücke L_α, $L_{\alpha\beta}$ und $L_{\alpha\beta\gamma}$, welche entweder zerfallen oder in einem Hauptpunkt von noch höherer Ordnung verschwinden. Zwischen je acht Grössen L besteht eine lineare Gleichung. Nun lassen sich aber sechs Grössen L, die offenbar linear unabhängig sind, in folgender Weise bilden. Wir stellen zunächst drei linear unabhängige Functionen zweiten Grades A, B, C auf, die in allen Hauptpunkten von der ersten Ordnung verschwinden; dann gehören die Quadrate und Producte derselben A^2, AB, AC etc. zu den Grössen L. Es muss aber ausser diesen sechs noch eine siebente existiren, die nicht als quadratische Function von A, B, C darstellbar ist. Bezeichnen wir eine solche mit U, so lässt sich dann jedes L ausdrücken in der Form:

$$(1.) \qquad L = \alpha U + F(A, B, C),$$

wo α eine Constante, F eine quadratische Function von A, B, C bedeutet.

Unter einer *eigentlichen* L-Function verstehen wir eine solche, in der der Coefficient α von 0 verschieden ist. Die Flächen zweiten Grades $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ haben ausser den sieben Hauptpunkten noch einen achten Punkt gemeinsam, dessen Coordinaten rational durch die sieben gegebenen bestimmt sind, und den wir als den Punkt (8) bezeichnen. Die uneigentlichen L-Functionen verschwinden auch in diesem Punkt, ebenfalls von der zweiten Ordnung. Wenn U im Restpunkt verschwände, so würde nach Formel (1.) auch jedes eigentliche L dort den Werth 0 haben. Betrachten wir aber die specielle Function $L_{12} = G_{1,2} G_{2,1}$. $G_{1,2} = 0$ ist die Gleichung

eines Kegels zweiten Grades, auf dem die Punkte (1), (3), (4), (5), (6), (7) liegen; enthielte die Fläche den Punkt (8), so müsste sie auch den Punkt (2) enthalten. Das ist nicht der Fall; folglich geht die Fläche nicht durch den Punkt (8). Dasselbe gilt von $G_{2,1}$. Mithin ist L_{12}, also auch U, im Punkt (8) von 0 verschieden.

Es geht hieraus hervor: Sobald eine Fläche vierten Grades, welche sieben Doppelpunkte in unabhängiger Lage besitzt, durch den zugehörigen achten Punkt hindurchgeht, ist dieser auch ein Doppelpunkt, und die Gleichung der Fläche darstellbar in der Form:

$$F(A, B, C) = 0.$$

Wir setzen:

$$(2.) \qquad \frac{A}{C} = \lambda, \quad \frac{B}{C} = \mu, \quad \frac{U}{C^2} = \nu.$$

Dies sind drei rationale Functionen von $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$. Umgekehrt sind diese letzteren Grössen algebraische Functionen von λ, μ, ν, und wir stellen uns die Aufgabe, die Art dieser Abhängigkeit genauer zu bestimmen. Dabei geben wir jetzt die homogene Darstellung auf, ohne deshalb die Bezeichnungen zu ändern; wir setzen die vierte Variable $w = 1$. Ferner denken wir uns die Function U so gewählt, dass sie im Punkt (8) den Werth 1 erhält; der Coefficient α in der Gleichung (1.) bedeutet dann den Werth von L im Punkt (8).

Die Grössen L lassen sich jetzt in folgender Weise darstellen:

$$(3.) \qquad L = C^2|\alpha.\nu + g(\lambda, \mu)|,$$

wo α constant, g eine ganze quadratische Function von λ, μ bedeutet, die aber nicht nothwendig homogen ist. Dabei sind λ, μ, ν selbst Quotienten specieller L-Functionen, wie leicht zu sehen ist.

§ 8.

Betrachtet man die Grössen λ, μ als Constanten und lässt nur ν variiren, so wird hierdurch der Punkt x, y, z beschränkt auf eine Raumcurve vierter Ordnung, die wir ϱ nennen wollen, die Schnittlinie der beiden Flächen zweiten Grades $A - \lambda C = 0$, $B - \mu C = 0$. Auf dieser Raumcurve liegt ausser den sieben Hauptpunkten auch der Punkt (8).

Wenn wir uns auf die Curve ϱ beschränken, so können wir x, y, z als elliptische Functionen vierten Grades einer Veränderlichen u auffassen,

die alle drei für dieselben vier Werthe von u unendlich gross werden. Die Variable u sei so definirt, dass im Punkt (8) $u = 0$ ist. Ferner seien u_1, u_2, ... u_7 die Werthe von u in den Hauptpunkten, und s ihre Summe; c dagegen sei die Summe der vier Werthe, wofür x, y, z unendlich gross werden. Es ist dann leicht zu sehen, dass s gleich oder congruent $2c$ ist. Denn betrachten wir C als Function von u, so ist diese vom achten Grade, sie wird für dieselben Werthe von u unendlich, wie x, y, z, aber von der zweiten Ordnung. Folglich muss auch die Summe der Werthe, wofür $C = 0$ wird, congruent $2c$ sein. Nun wird aber $C = 0$ für $u = 0, u_1, u_2, \ldots u_7$; folglich ist s gleich oder congruent $2c$, und wir können $s = 2c$ annehmen.

Die elliptische Function achten Grades, der A, B und C auf der Curve proportional werden, nennen wir $f(u)$; ihren constanten Factor normiren wir so, dass $f'(0) = 1$ ist. In dem Ausdrucke (3.) im vorigen Paragraphen wird jetzt $g(\lambda, \mu)$ eine Constante, dagegen ν eine elliptische Function von u. Zähler und Nenner werden für dieselben Werthe von u unendlich gross, und zwar von derselben Ordnung. Ausserdem verschwinden aber auch Zähler und Nenner von der zweiten Ordnung für die Werthe $u = u_1$, u_2, ... u_7; für $u = 0$ aber verschwindet der Nenner von der zweiten Ordnung, während der Zähler nicht verschwindet. Hieraus folgt, dass ν eine elliptische Function zweiten Grades ist, die nur für $u \equiv 0$ unendlich wird. Eine solche ist in der Form

$$\nu = \alpha\wp(u) + \beta$$

darstellbar, wo α und β Constanten, $\wp(u)$ die *Weierstrass*sche Grundfunction bedeutet.

Dadurch, dass wir λ, μ als constant angenommen haben, wurde der Punkt x, y, z auf eine Curve beschränkt. Halten wir ausserdem ν fest, so bekommen wir im Allgemeinen zwei Punkte dieser Curve. Denn ν ist durch eine lineare Gleichung mit $\wp(u)$ verbunden, zu einem Werthe von $\wp(u)$ aber gehören zwei Werthe, u und $-u$, und somit zwei Punkte der Curve. Nur wenn $\wp'(u) = 0$ wird, fallen diese beiden Punkte zusammen. *Es gehören also im Allgemeinen zu einem Werthsystem λ, μ, ν zwei Punkte (x, y, z) und (x', y', z').*

Zwei Punkte P und P', für welche λ, μ, ν dieselben Werthe haben, nennen wir entsprechende.

Mit dieser Definition ist die folgende gleichwerthig:

Zwei Punkte heissen entsprechende, wenn jede L-Function, die in dem einen verschwindet, auch in dem andern den Werth 0 annimmt.

Denn nehmen wir an, es seien L und L' zwei L-Functionen, von denen die erstere 0 wird im Punkte P, die andere nicht. Der Quotient beider $\frac{L}{L'}$ ist eine rationale Function λ, μ, ν; diese muss also der ersten Definition zufolge auch in P' verschwinden.

Gehen wir umgekehrt von der zweiten Definition aus und nennen λ_0, μ_0, ν_0 die Werthe von λ, μ, ν im Punkte P. Dann sind $C^2(\lambda-\lambda_0)$, $C^2(\mu-\mu_0)$, $C^2(\nu-\nu)$ specielle L-Functionen, die im Punkte P verschwinden. Folglich müssen diese auch in P' verschwinden. Es muss also auch dort $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\mu_0$, $\nu=\nu_0$ sein. Für $C=0$ wird der Schluss scheinbar illusorisch, aber man kann vermöge einfacher Transformationen C durch A und B ersetzen. Die Punkte (1) bis (8) sind allerdings Ausnahmestellen.

Nimmt man λ, μ, ν als gegeben an, so werden die beiden zugehörigen Punkte P und P' durch Auflösung einer quadratischen Gleichung gefunden. Indem wir nur λ, μ als fest betrachten, können wir x, y, z rational ausdrücken durch $\wp(u)$ und $\wp'(u)$. $\wp(u)$ ist aber eine lineare Function von ν, folglich $\wp'(u)$ die Quadratwurzel aus einer ganzen Function dritten Grades von ν. Wir werden also x, y, z rational durch λ, μ, ν und die Quadratwurzel aus einer ganzen Function dritten Grades von ν ausdrücken können, deren Coefficienten natürlich noch von λ und μ abhängen.

Von den beiden einander entsprechenden Punkten P und P' aber ist jeder eindeutig rational durch den andern bestimmt, und zwar ist die Transformation, durch die der eine aus dem andern hervorgeht, eine involutorische. Mehr geometrisch lässt sich die Transformation so definiren:

Man denke sich die Raumcurve ϱ, welche durch P und die sieben Hauptpunkte gelegt werden kann. Auf dieser liegt auch der Punkt (8). In (8) lege man die Tangente an die Curve, und durch diese irgend eine Ebene $E=0$. Die Ebene $E=0$ schneidet dann die Curve in zwei weiteren Punkten Q und Q'. Durch diese beiden Punkte und P werde jetzt eine zweite Ebene, $E'=0$, gelegt; nennt man P' den vierten Punkt, in welchem diese Ebene die Curve ϱ trifft, so ist P' der entsprechende Punkt von P.

Denn werden die beiden Ebenen $E=0$, $E'=0$ in der angegebenen Weise bestimmt, so ist der Quotient $\frac{E'}{E}$ eine rationale Function von x, y, z, welche auf der Curve ϱ nur im Punkte (8) unendlich wird, von der zweiten

Ordnung, und nur in P und P' verschwindet. Eine solche muss aber eine lineare Function von $\wp(u)$ oder, was dasselbe ist, von ν sein; folglich muss ν in beiden Punkten P und P' denselben Werth haben.

§ 9.

Sämmtliche L-Functionen werden auf der Curve ϱ elliptische Functionen von u, die sich aus $f^2(u)$ und $f^2(u)\,\wp(u)$ linear zusammensetzen. Die Function L_1 verschwindet für $u = u_1$ von der dritten Ordnung, während $f^2(u)$ nur von der zweiten Ordnung Null wird. Es ist also:

$$L_1 = l_1 f^2(u)(\wp(u)-\wp(u_1)),$$

wo l_1 eine Constante bedeutet, der Werth von L_1 im Punkte (8).

L_{12} besteht aus den Factoren $G_{1,2}$ und $G_{2,1}$. Der Quotient

$$\frac{G_{1,2}}{f(u)}$$

ist eine elliptische Function zweiten Grades, welche unendlich wird für $u=0$, $u=u_2$, und 0 für $u=u_1$; sie muss also ausserdem 0 werden für $u=u_2-u_1$. Ebenso ist

$$\frac{G_{2,1}}{f(u)} = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad u=0, \quad u=u_1, \\ 0 & \text{für} \quad u=u_2, \quad u=u_1-u_2. \end{cases}$$

Mithin ist

$$L_{12} = l_{12} f^2(u)|\wp(u)-\wp(u_1-u_2)|.$$

Endlich wird $F_{123}=0$ für $u=u_1$, u_2, u_3 und einen vierten Werth u'. Die Summe dieser vier Werthe muss $c=\frac{s}{2}$ sein; also verschwindet F_{123} auch für $u=\frac{s}{2}-u_1-u_2-u_3$. Da F_{123} ein Factor von L_{123} ist, so muss hierfür auch $L_{123}=0$ werden. Mithin ist

$$L_{123} = l_{123} f^2(u)\left\{\wp(u)-\wp\left(\frac{s}{2}-u_1-u_2-u_3\right)\right\}.$$

Noch symmetrischer lassen sich die drei Formeln darstellen, wenn man die Parameter etwas anders wählt. Es werde gesetzt:

$$u_\alpha = v_\alpha - v_0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 7),$$

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_7 = 0.$$

Durch diese acht Gleichungen sind die Grössen v vollständig bestimmt. Aus ihnen folgt:

$$s = v_1+v_2+\cdots+v_7-7v_0 = -8v_0,$$

$$\frac{s}{2}-u_1-u_2-u_3 = -v_0-v_1-v_2-v_3$$
$$= v_4+v_5+v_6+v_7.$$

Daher ist:

$$L_\alpha = l_\alpha f^2(u)(\wp(u)-\wp(v_\alpha-v_0)),$$
$$L_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta} f^2(u)(\wp(u)-\wp(v_\alpha-v_\beta)),$$
$$L_{\alpha\beta\gamma} = l_{\alpha\beta\gamma} f^2(u)(\wp(u)-\wp(v_\alpha+v_\beta+v_\gamma+v_0)).$$

l_m bedeutet den Werth von L_m im Punkt (8). Denkt man sich von den Thetafunctionen constante Factoren abgesondert:

$$\Theta_m = l_m\sigma_m(u, u', u'')$$

nach dem Princip, dass die Differenz zweier Functionen σ_m^2 ausdrückbar sein soll in der Form:

$$\sigma_m^2-\sigma_n^2 = \Theta^2\left(\alpha+\beta\frac{\partial^2\log\Theta}{\partial u^2}+\cdots+\varkappa\frac{\partial^2\log\Theta}{\partial u''^2}\right),$$

so würden in den letzten Gleichungen die Factoren l sämmtlich fortfallen; die Functionen L_m hätten im Punkt (8) alle den gleichen Werth.

Wir setzen:

$$G_{1,2} = c_{1,2}\Gamma_{1,2},$$

wo $c_{1,2}$ den Werth von $G_{1,2}$ im Punkt (8) bedeuten soll. $\Gamma_{1,2}$ ist dann eine quadratische Function von x, y, z von denselben Eigenschaften wie $G_{1,2}$, sie wird aber gleich 1 im Punkte (8). Betrachten wir sie, längs der Curve ϱ, als elliptische Function von u, und setzen:

$$\frac{\Gamma_{1,2}}{f(u)}\cdot\frac{\Gamma_{2,3}}{f(u)}\cdot\frac{\Gamma_{3,1}}{f(u)} = \varphi(u),$$
$$\frac{\Gamma_{2,1}}{f(u)}\cdot\frac{\Gamma_{3,2}}{f(u)}\cdot\frac{\Gamma_{1,3}}{f(u)} = \psi(u),$$

so sind $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ elliptische Functionen dritten Grades, die nur für $u\equiv 0$ unendlich werden. Denn es wird zwar der erste Factor von $\varphi(u)$ auch unendlich gross für $u = u_2$, für denselben Werth verschwindet aber der zweite Factor, u. s. f. Für kleine Werthe von u fängt die Entwicklung sowohl von $\varphi(u)$ als von $\psi(u)$ an mit $\frac{1}{u^3}$; $\varphi(u)$ wird aber 0 für die entgegengesetzten Werthe von u wie $\psi(u)$. Denn die Factoren von $\varphi(u)$ verschwinden ausser für u_1, u_2, u_3 noch für die drei Werthe $u_2-u_1, u_3-u_2, u_1-u_3$, während $\Gamma_{2,1}$ Null wird für $u = u_1-u_2$, $\Gamma_{3,2}$ für u_2-u_3, $\Gamma_{1,3}$ für $u = u_3-u_1$.

Hieraus folgt, dass

$$\psi(u) = -\varphi(-u)$$

ist. Mithin ist

$$\varphi(u)+\psi(u) = \varphi(u)-\varphi(-u)$$

eine ungerade Function von u, die nur für $u \equiv 0$ unendlich wird, und da ihre Entwickelung anfängt mit $\frac{2}{u^3}$, so muss sie mit $-\wp'(u)$ identisch sein. Für die Punkte der Curve ϱ gilt also die Gleichung

$$\Gamma_{1,2}\Gamma_{2,3}\Gamma_{3,1}+\Gamma_{2,1}\Gamma_{3,2}\Gamma_{1,3} = -f^3(u)\wp'(u).$$

Die rationale Function von x, y, z auf der linken Seite hängt scheinbar ab von den Indices 1, 2, 3, sodass man durch Vertauschung derselben mit den übrigen 35 der Form nach verschiedene Ausdrücke erhält. Aus der aufgestellten Gleichung geht aber hervor, dass alle diese Ausdrücke längs der Curve ϱ den gleichen Werth erhalten, und da man durch jeden Punkt des Raumes eine solche Curve legen kann, so müssen sie identisch sein.

Wir bezeichnen diese rationale Function mit 2T; sodass $\mathrm{T} = 1$ wird im Punkte (8). Ferner setzen wir:

$$\frac{\mathrm{T}}{C^3} = \tau.$$

τ unterscheidet sich dann auf der Curve ϱ nur um einen constanten Factor von $\wp'(u)$. Zu zwei entsprechenden Punkten P, P' gehören entgegengesetzte Werthe von u, also auch von τ. Wir haben also hier eine rationale Function von x, y, z aufgestellt, welche den entgegengesetzten Werth annimmt, wenn man den Punkt (x, y, z) durch den entsprechenden ersetzt. Es müssen sich daher x, y, z rational durch λ, μ, ν, τ, dagegen τ^2 rational durch λ, μ, ν ausdrücken lassen.

§ 10.

Dass $T = 0$ unsere Fundamentalgleichung ist, lässt sich jetzt in folgender Weise erkennen. Es war gesetzt worden:

$$(1.) \qquad \Gamma_{1,2}\Gamma_{2,3}\Gamma_{3,1}+\Gamma_{2,1}\Gamma_{3,2}\Gamma_{1,3} = 2\mathrm{T},$$

und die Fundamentalgleichung zwischen x, y, z war in § 3 in folgender Form aufgestellt worden:

$$(2.) \qquad G_{1,2}G_{2,3}G_{3,1}-G_{2,1}G_{3,2}G_{1,3} = 0;$$

$G_{\alpha,\beta}$ aber unterscheidet sich von $\Gamma_{\alpha,\beta}$ nur um einen constanten Factor. Be-

zeichnen wir mit T' den Ausdruck auf der linken Seite dieser zweiten Gleichung, so ist zu beweisen, dass T' und T sich nur um einen constanten Factor unterscheiden können.

Wir dividiren beide Ausdrücke durch C^3 und fassen die Quotienten

$$\frac{T}{C^3} = \tau, \quad \frac{T'}{C^3} = \tau'$$

als elliptische Functionen von u auf, indem wir λ, μ als constant betrachten. Beide Quotienten setzen sich linear zusammen aus den Grössen, die wir im vorigen Paragraphen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ genannt haben, und da $\varphi(u)+\psi(u) = -\wp'(u)$ ist, so kann man auch τ' aus $\wp'(u)$ und $\varphi(u)$ zusammensetzen:

$$\tau' = \alpha\wp'(u)+\beta\varphi(u).$$

$\varphi(u)$ ist eine elliptische Function dritten Grades, welche verschwindet für $u = u_2-u_1$, u_3-u_2, u_1-u_3; der Ausdruck τ' aber muss symmetrisch sein in Bezug auf alle Werthe $u_1, \ldots u_7$, die den sieben Hauptpunkten entsprechen. Das ist nur möglich, wenn $\beta = 0$ ist. Denn ebenso gut könnten wir τ' in der Form:

$$\tau' = \gamma\wp'(u)+\delta\varphi_1(u)$$

darstellen, wo $\varphi_1(u)$ verschwindet für $u = u_2-u_1$, u_4-u_2, u_1-u_4; es wäre dann identisch:

$$(\alpha-\gamma)\wp'(u)+\beta\varphi(u)-\delta\varphi_1(u) = 0,$$

und da $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ verschwinden für $u = u_2-u_1$, $\wp'(u)$ dagegen nicht, so müsste $\alpha-\gamma = 0$ sein. Dann müssen aber auch die Coefficienten β und δ Null sein. Mithin ist bis auf einen constanten Factor τ' mit τ identisch. ***Durch die Fundamentalgleichung wird also der Punkt*** (x, y, z) ***auf die Fläche der sich selbst entsprechenden Punkte beschränkt.***

§ 11.

Aehnlich, wie man den Punkt P', welcher einem gegebenen, P, entspricht, definiren kann als den neunten gemeinsamen Nullpunkt aller in P verschwindenden L-Functionen, so kann man die sich selbst entsprechenden Punkte auch definiren als diejenigen, in denen eine eigentliche L-Function von der zweiten Ordnung Null wird.

Es sei (x_0, y_0, z_0) eine willkürliche Stelle des Raumes. Wir bezeichnen sie als den Punkt (0). Es giebt dann zwei linear unabhängige Functionen zweiten Grades A, B, welche in den acht Punkten (0), (1), ... (7)

verschwinden. Jede quadratische Form derselben

$$kA^2+lAB+mB^2$$

stellt eine Function vierten Grades dar, welche in den acht gegebenen Punkten von der zweiten Ordnung verschwindet. Solange die Punkte (0) bis (8) nicht besonderen Bedingungen unterworfen sind, ist jede Function vierten Grades, die der angegebenen Forderung genügt, linear durch diese drei: A^2, AB und B^2 darstellbar. Denn die Differenz zwischen der Anzahl der Coefficienten einer Function vierten Grades $\frac{5.6.7}{1.2.3}$ und der Anzahl der Bedingungsgleichungen beträgt 3. Jede solche Function lässt sich in zwei Factoren zerlegen, welche linear in A und B, also quadratisch in x, y, z sind; man hat deshalb den Satz:

Jede Fläche vierten Grades mit acht Doppelpunkten zerfällt in zwei Flächen zweiten Grades, ausser wenn diese Doppelpunkte besonderen Bedingungen unterworfen sind.

Nehmen wir nun an, es existire eine Function vierten Grades, die in den acht Punkten von der zweiten Ordnung verschwindet und die nicht in quadratische Factoren zerfällt, so muss zwischen den acht Punkten eine Beziehung bestehen. Jedenfalls muss sich die Function, da sie zu den Grössen L gehört, in der Form

$$L = \alpha U+F(A, B, C)$$

darstellen lassen; wobei wir die drei quadratischen Functionen A, B, C so wählen können, dass A, B auch im Punkte (0) verschwinden, C dagegen nicht. Es muss dann die Function L nebst ihren drei Ableitungen im Punkte (0) verschwinden. In diesem Punkt müssen deshalb die vier Gleichungen bestehen:

$$\alpha\frac{\partial U}{\partial x}+F_1\frac{\partial A}{\partial x}+F_2\frac{\partial B}{\partial x}+F_3\frac{\partial C}{\partial x} = 0,$$

$$\alpha\frac{\partial U}{\partial y}+F_1\frac{\partial A}{\partial y}+F_2\frac{\partial B}{\partial y}+F_3\frac{\partial C}{\partial y} = 0,$$

$$\alpha\frac{\partial U}{\partial z}+F_1\frac{\partial A}{\partial z}+F_2\frac{\partial B}{\partial z}+F_3\frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

$$\alpha U+F = 0.$$

F_1, F_2, F_3 bedeuten die partiellen Ableitungen von F nach A, B, C. An die Stelle der letzten Gleichung können wir die folgende setzen:

$$2\alpha U+F_1A+F_2B+F_3C = 0.$$

Dann hat man ein System von vier homogenen linearen Gleichungen zwischen α, F_1, F_2, F_3.

Ist $\alpha = 0$, so folgt hieraus, dass im Punkt (0) auch F_1, F_2, F_3 verschwinden müssen. Es werden also gleichzeitig mit A und B alle drei Ableitungen von $F(A, B, C)$ gleich 0. Daraus folgt, dass C gar nicht in dem Ausdruck vorkommt. Das ist der Fall, den wir vorhin betrachtet haben, wo L zerfällt.

Ist aber α nicht 0, so muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} & 2U \\ \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial z} & A \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial z} & B \\ \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial z} & C \end{vmatrix},$$

im Punkte (0) verschwinden. Macht man die Ausdrücke homogen, indem man wieder die vierte Variable w einführt, so ist dies die Functionaldeterminante der vier Functionen U, A, B, C von x, y, z, w; sie ist zu gleicher Zeit das Product C^5 mit der Functionaldeterminante der drei Functionen λ, μ, ν von x, y, z.

Genügt der Punkt (0) dieser Gleichung sechsten Grades, so giebt es demnach eine eigentliche L-Function, welche an dieser Stelle von der zweiten Ordnung verschwindet. Nun denken wir uns die Curve ϱ, welche durch den Punkt (0) und die sieben Hauptpunkte hindurchgeht, und für diese wieder die Variable u eingeführt. Es sei u_0 der Werth von u im Punkt (0). Eine eigentliche L-Function, die im Punkt (0) verschwindet und im Punkt (8) den Werth 1 hat, geht dann über in die elliptische Function

$$L = f^2(u)(\wp(u) - \wp(u_0)).$$

Soll aber die Function L im Punkt (0) von der zweiten Ordnung verschwinden, so muss auch diese elliptische Function für $u = u_0$ unendlich klein von der zweiten Ordnung werden; daher muss

$$\wp'(u_0) = 0$$

sein. Hieraus geht hervor, dass die Functionaldeterminante von U, A, B, C mit der Function T identisch ist. Zugleich aber erkennen wir auf diese Weise,

dass die Relation $T = 0$ symmetrisch sein muss in Bezug auf alle acht Werthsysteme:

$$(x, y, z, w), \quad (a_1, b_1, c_1, d_1), \quad \ldots \quad (a_7, b_7, c_7, d_7);$$

sie stellt die Bedingung dar, unter welcher eine nicht zerfallende homogene Function vierten Grades von vier unabhängigen Veränderlichen existirt, die mit ihren ersten Ableitungen für diese acht Werthsysteme verschwindet.

§ 12.

Wir wissen, dass bei willkürlichen Werthen der Variabeln x, y, z, w das Quadrat des Quotienten

$$\frac{T}{C^3} = \tau$$

sich als ganze Function dritten Grades der Grösse ν darstellen lassen muss, deren Coefficienten nur von λ und μ abhängen. Die genauere Form dieses Ausdrucks lässt sich in folgender Weise feststellen.

T ist eine ganze Function sechsten Grades von x, y, z, w, die in den sieben Hauptpunkten von der dritten Ordnung verschwindet. T^2 ist vom zwölften Grade und verschwindet an den Stellen (1) bis (7) von der sechsten Ordnung. Die Anzahl der linear unabhängigen Functionen zwölften Grades, die in allen Hauptpunkten von der sechsten Ordnung verschwinden, ist:

$$\frac{13.14.15}{1.2.3} - 7\left(\frac{6.7.8}{1.2.3}\right) = 63.$$

Wir bilden nun folgenden Ausdruck, in dem jeder Term eine solche Function darstellt:

$$H = cT^2 + (F_1U + F_3)T + F_0U^3 + F_2U^2 + F_4U + F_6.$$

c und F_0 sollen Constanten sein, F_1, F_2 etc. ganze Functionen von A, B, C, deren Grad durch den Index bezeichnet wird. Ein solcher Ausdruck H enthält:

$$1+3+10+1+6+15+28 = 64$$

Coefficienten. Wir können deshalb, ohne sie sämmtlich gleich 0 zu setzen, die Coefficienten so bestimmen, dass die Function H identisch verschwindet. Jedenfalls muss dann c von 0 verschieden sein, weil weder zwischen U, A, B, C eine identische Gleichung besteht, noch T rational durch diese vier Grössen ausdrückbar ist.

Dividirt man diese identische Gleichung durch C^6, so verwandelt sie sich in eine Relation zwischen λ, μ, ν, τ:

$$c\tau^2+\tau(f_1\nu+f_3)+f_0\nu^3+f_2\nu^2+f_4\nu+f_6 = 0,$$

wo f_0, f_1, f_2 etc. ganze, aber nicht homogene Functionen von λ, μ bedeuten, deren Grad den angefügten Index nicht übersteigt.

Hier müssen nun, da τ^2 eine ganze Function dritten Grades von ν sein soll, die Coefficienten des mittleren Terms $\tau(f_1\nu+f_3)$ verschwinden. f_0 muss von 0 verschieden sein, und wir können

$$c = 1, \quad f_0 = -4$$

annehmen. Ausserdem aber können wir voraussetzen, dass f_2 fortfällt; dies ist deswegen erlaubt, weil wir zu U eine beliebige homogene quadratische Function von A, B, C hinzufügen dürfen. Die beiden identischen Gleichungen nehmen dann die Form an:

$$\mathrm{T}^2 = 4U^3-G_2U-G_3,$$

$$\tau^2 = 4\nu^3-g_2\nu-g_3,$$

wo G_2, G_3 homogene Functionen vierten und sechsten Grades von A, B, C; g_2, g_3 die entsprechenden nicht homogenen Functionen von λ, μ bedeuten.

§ 13.

Nimmt man die Variabeln x, y, z (oder x, y, z, w) durch die Gleichung $\mathrm{T} = 0$ verbunden an, so ist auch $\tau = 0$, und wir erhalten

$$\Phi(\lambda, \mu, \nu) = 4\nu^3-g_2\nu-g_3 = 0.$$

Während im Allgemeinen zu einem Werthsystem (λ, μ, ν) zwei Punkte (x, y, z) gehören, so definirt diese Gleichung $\Phi = 0$ die Gesammtheit aller (λ, μ, ν), denen nur je ein Punkt (x, y, z) entspricht. Wir können hier λ, μ, ν wieder als die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes auffassen. Dann stellt die Gleichung $\Phi = 0$ eine specielle Fläche sechsten Grades dar.

Jede von den 63 speciellen L-Functionen lässt sich ausdrücken in der Form:

$$L_m = l_m C^2(\nu-f_m(\lambda, \mu)),$$

wo $f_m(\lambda, \mu)$ eine nicht homogene quadratische Function von λ, μ bedeutet. Die Gleichungen

$$\nu-f_m(\lambda, \mu) = 0$$

stellen 63 besondere Flächen zweiten Grades dar, Paraboloide, die von den Parallelen zur ν-Axe nur einmal und stets im Endlichen getroffen werden; wir wollen sie — analog den singulären Tangentialebenen der *Kummer*schen Fläche — die singulären Paraboloide nennen.

Jedem Werthsystem der Argumente, welches die Gleichung $\Theta = 0$ erfüllt, entspricht ein Punkt der Fläche $\Phi = 0$. Zu diesen Werthsystemen gehören aber auch die Perioden mit ein- oder zweigliedrigem Index. Dadurch sind 28 besondere Punkte der Fläche:

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots \quad P_7, \quad P_{12}, \quad \ldots \quad P_{67}$$

definirt. In jedem solchen Punkte P_m verschwinden, abgesehen von der Function Θ, welche für die ganze Fläche Null ist, 27 Thetafunctionen, nämlich alle diejenigen Θ_n, welche bei Vermehrung der Argumente um die halbe Periode m in ungerade Functionen übergehen. Da nun allgemein

$$\Pi^2 . \Theta_m^2 = l_m C^2 (\nu - f_m(\lambda, \mu))$$

ist, also

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_p} = \text{Const.} \sqrt{\frac{\nu - f_m(\lambda, \mu)}{\nu - f_p(\lambda, \mu)}},$$

so folgt, dass in jedem Punkte P_m 27 Functionen

$$\nu - f_n(\lambda, \mu)$$

verschwinden; nämlich alle die, für welche Θ_{nm} eine ungerade Function ist. Durch jeden der 28 besonderen Punkte P gehen also 27 von den 63 singulären Paraboloiden.

Dagegen liegen auf jedem der 63 Paraboloide 12 Punkte P und zwar 6 Paare, soviel als es Zerlegungen eines Periodenindex in Indices zweier ungeraden Theta giebt. Denn der Gleichung $\nu - f_n = 0$ genügen alle Punkte P_m, für welche $nm = m'$ Index einer ungeraden Function ist.

§ 14.

Bildet man die Differenz

$$\Theta_1 \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \Theta \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} = Q,$$

und betrachtet u, u', u'' als willkürlich veränderliche Grössen, so verhält sich Q bei der Vermehrung der Argumente um ganze Perioden genau ebenso wie die zum Index 1 gehörigen Producte $P = \Theta_m \Theta_{m1}$, und es muss sich deshalb Q auch linear durch solche Producte ausdrücken lassen. Da Q

selbst eine gerade Function ist, so können auch nur gerade Functionen P bei dieser Darstellung zur Verwendung kommen. Ein vollständiges System von linear unabhängigen geraden Functionen $P = \Theta_m \Theta_{m1}$ ist z. B. folgendes:

$$\Theta_2\Theta_{12}, \quad \Theta_3\Theta_{13}, \quad \Theta_4\Theta_{14}, \quad \Theta_{234}\Theta_{567}.$$

Wir können also eine Gleichung aufstellen, in der auf der linken Seite die Function Q, rechts ein lineares Aggregat dieser vier Producte steht. In dieser Gleichung setzen wir $\Theta = 0$ und multipliciren sie mit

$$\Theta_2\Theta_3 \ldots \Theta_7 = \frac{\Pi}{\Theta_1}.$$

Da

$$\frac{\Pi.\Theta_2\Theta_{12}}{\Theta_1} = G_{2,1},$$

$$\frac{\Pi.\Theta_{234}\Theta_{567}}{\Theta_1} = F_{234}F_{567}$$

ist, so erhalten wir $\Pi\frac{\partial\Theta}{\partial u}$ dargestellt als ein lineares Aggregat der Grössen

$$G_{2,1}, \quad G_{3,1}, \quad G_{4,1}, \quad F_{234}F_{567}.$$

Dies sind sämmtlich quadratische Functionen von x, y, z, w, die in allen Hauptpunkten, mit Ausnahme der Stelle (1), verschwinden. Es ist aber klar, dass das ganze Aggregat auch im Punkte (1) den Werth 0 haben muss. Mithin lässt sich das Product $\Pi\frac{\partial\Theta}{\partial u}$ linear durch A, B, C darstellen. Dasselbe gilt von $\Pi\frac{\partial\Theta}{\partial u'}$, $\Pi\frac{\partial\Theta}{\partial u''}$, und wir können diese drei Grössen direct gleich A, B, C setzen:

$$\Pi\frac{\partial\Theta}{\partial u} = A, \quad \Pi\frac{\partial\Theta}{\partial u'} = B, \quad \Pi\frac{\partial\Theta}{\partial u''} = C.$$

Es folgt hieraus, dass die Differentiale der Argumente durch die Gleichung

$$A\,du + B\,du' + C\,du'' = 0,$$

oder:

$$\lambda\,du + \mu\,du' + du'' = 0$$

verbunden sind.

§ 15.

Wir haben jetzt noch zu beweisen, dass die 28 Punkte P_m Doppelpunkte der Fläche $\Phi = 0$ sind. Betrachten wir einen solchen Punkt P_m. In ihm werden die Argumente gleich einer halben Periode, und wir können setzen:

$$u = \omega_m + v, \quad u' = \omega'_m + v', \quad u'' = \omega''_m + v'',$$

wo v, v', v'' Variable bedeuten, die im Punkte P_m verschwinden. Sehen wir für den Augenblick v, v', v'' als unabhängige Veränderliche an, so ist $\Theta(u, u', u'')$ bis auf einen Exponentialfactor E mit der ungeraden Function $\Theta_m(v, v', v'')$ identisch; und wenn wir

$$\Theta(u, u', u'') = E\bar{\Theta}(v, v', v''),$$

allgemeiner für jeden beliebigen Index a:

$$\Theta_a(u, u', u'') = E\bar{\Theta}_a(v, v', v'')$$

setzen, so ist jetzt $\bar{\Theta}_a$ eine gerade oder ungerade Function von v, v', v'', je nachdem Θ_{am} eine gerade oder ungerade Function der ursprünglichen Argumente u, u', u'' ist.

Beschränken wir jetzt die Argumente durch die Bedingung

$$\Theta(u, u', u'') = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\bar{\Theta}(v, v', v'') = 0,$$

so ist:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} = E\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v}, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial u'} = E\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v'}, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial u''} = E\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v''};$$

daher:

$$A = \Pi E\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v}, \quad B = \Pi E\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v'}, \quad C = \Pi E\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v''}.$$

U liess sich in folgender Form darstellen:

$$U = \Pi^2\sum_n(f_n\Theta_n^2),$$

wo die f_n constante Coefficienten bedeuten.

Dafür bekommen wir jetzt:

$$U = \Pi^2E^2\Sigma f_n(\bar{\Theta}_n)^2.$$

Folglich ist

$$\lambda = \frac{A}{C} = \frac{\dfrac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v}}{\dfrac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v''}},$$

$$\mu = \frac{B}{C} = \frac{\dfrac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v'}}{\dfrac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v''}},$$

$$\nu = \frac{U}{C^2} = \frac{\Sigma f_n\bar{\Theta}_n^2}{\left(\dfrac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v''}\right)^2},$$

Die Ableitungen von $\bar{\Theta}$ sind gerade Functionen von v, v', v''. Wir nehmen an, was keine wesentliche Beschränkung ist, dass die Ableitung von $\bar{\Theta}$ nach v'', wenn v, v', v'' gleich 0 gesetzt werden, nicht verschwindet, sondern den Werth 1 erhält. Dann lässt sich vermöge der Gleichung $\bar{\Theta}(v, v', v'') = 0$ v'' als Potenzreihe der beiden unabhängigen Variabeln v und v' darstellen:

$$v'' = \mathfrak{P}(v, v'),$$

und zwar enthält diese Entwicklung nur die ungeraden Dimensionen, da ja auch in $\bar{\Theta}(v, v', v'')$ nur ungerade Dimensionen vorkommen. Es verschwindet also v'' gleichzeitig mit v und v'. Setzt man diesen Werth von v'' ein, so werden

$$\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v}, \quad \frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v'}, \quad \frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v''}, \quad \sum_n f_n \bar{\Theta}_n^2$$

reguläre Potenzreihen von v und v', die nur die geraden Dimensionen enthalten. Der Nenner $\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v''}$ wird 1 für $v = 0$, $v' = 0$; also werden λ, μ, ν selbst reguläre gerade Functionen von v und v'. Die constanten Anfangsglieder dieser Entwicklungen seien λ_0, μ_0, ν_0, die darauf folgenden quadratischen:

$$L(v, v'), \quad M(v, v'), \quad N(v, v');$$

dann wird durch die Potenzreihen:

$$\lambda = \lambda_0 + L(v, v') + \cdots,$$
$$\mu = \mu_0 + M(v, v') + \cdots,$$
$$\nu = \nu_0 + N(v, v') + \cdots$$

die Fläche $\Phi(\lambda, \mu, \nu) = 0$ in der Umgebung des Punktes P_m dargestellt.

Wir hatten die Thetaquadrate in folgender Weise ausgedrückt:

$$\Pi^2\Theta_a^2 = C^2 f_a(\lambda, \mu, \nu),$$

wo jedes f_a eine ganze rationale Function von λ, μ, ν ist. Danach ist auch:

$$\Pi^2 E^2 \bar{\Theta}_a^2 = C^2 f_a(\lambda, \mu, \nu);$$

mithin:

$$\left(\frac{\bar{\Theta}_a}{\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial v''}}\right)^2 = f_a(\lambda, \mu, \nu).$$

Wir fassen diese Formel ins Auge unter der Voraussetzung, dass $\bar{\Theta}_a$ eine der 27 von $\bar{\Theta}$ verschiedenen ungeraden Functionen ist. Das Anfangsglied in der Entwicklung des Ausdrucks auf der linken Seite nach Potenzen

von v und v' ist V_a^2, wenn V_a das lineare Anfangsglied in der Entwicklung von $\bar{\Theta}_a$ bezeichnet; der Nenner kommt nicht in Betracht, weil sein Anfangsglied 1 ist. Es muss also auch die Entwicklung von $f_a(\lambda, \mu, \nu)$ mit V_a^2 anfangen. Ordnen wir diesen rationalen Ausdruck zunächst nach Potenzen von $\lambda-\lambda_0$, $\mu-\mu_0$, $\nu-\nu_0$, wobei das constante Glied wegfällt:

$$f_a(\lambda, \mu, \nu) = c_a(\lambda-\lambda_0)+c_a'(\mu-\mu_0)+c_a''(\nu-\nu_0)+\cdots,$$

und setzen dann für $\lambda-\lambda_0$, $\mu-\mu_0$, $\nu-\nu_0$ die entsprechenden Entwicklungen ein, so erhält man als Anfangsglied von $f_a(\lambda, \mu, \nu)$:

$$c_a L(v, v')+c_a' M(v, v')+c_a'' N(v, v'),$$

und dies muss mit V_a^2 identisch sein.

Betrachten wir jetzt v, v', v'' als unabhängige Variable. Es sei W das lineare Anfangsglied in der Entwicklung der ungeraden Function $\bar{\Theta}$, W_a dasjenige von $\bar{\Theta}_a$. V_a ist dann offenbar diejenige lineare Function von v und v', auf welche die Function dreier Variabeln W_a durch die lineare Gleichung $W=0$ reducirt werden kann; somit ist W_a darstellbar als:

$$W_a = V_a+d_a W,$$

wo d_a eine Constante bedeutet. Für beliebige Werthe von v, v', v'' haben wir jetzt:

$$(W_a-d_a W)^2 = c_a L(v, v')+c_a' M(v, v')+c_a'' N(v, v').$$

Mithin ist W_a^2 selbst linear durch die sechs Grössen L, M, N, Wv, Wv', Wv'' ausdrückbar. Dies gilt von dem Quadrate des Anfangsglieds einer jeden ungeraden Function $\bar{\Theta}_a$.

Wir ziehen hieraus den Schluss, dass zwischen den drei quadratischen Functionen $L(v, v')$, $M(v, v')$, $N(v, v')$ keine lineare Gleichung besteht. Denn unter den Quadraten der ungeraden Theta sind sieben linear unabhängige; aus diesen lässt sich ein lineares Aggregat

$$\varphi = \sum_a k_a \bar{\Theta}_a^2$$

bilden, — die von Herrn *Frobenius* mit φ bezeichnete Function —, deren Entwicklung nach Potenzen von v, v', v'' nicht mit der zweiten, sondern mit der vierten Ordnung anfängt. Die Function φ ist durch diese Bedingung bis auf einen constanten Factor bestimmt. Das könnte offenbar nicht der Fall sein, wenn die Anfangsglieder der Functionen $\bar{\Theta}_a^2$ sich durch weniger

als sechs Grössen linear ausdrücken liessen. Zwischen L, M, N kann also keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen.

Nun denken wir uns die ganze Function sechsten Grades $\Phi(\lambda, \mu, \nu)$ nach aufsteigenden homogenen Functionen $\lambda-\lambda_0$, $\mu-\mu_0$, $\nu-\nu_0$ geordnet. Das Anfangsglied dieser Reihe sei $\psi(\lambda-\lambda_0, \mu-\mu_0, \nu-\nu_0)$. Da Φ identisch verschwindet, wenn man für $\lambda-\lambda_0$, $\mu-\mu_0$, $\nu-\nu_0$ die Entwicklungen:

$$\lambda-\lambda_0 = L+ \text{ etc.}, \quad \mu-\mu_0 = M+ \text{ etc.}, \quad \nu-\nu_0 = N+ \text{ etc.}$$

einsetzt, so muss das Anfangsglied ψ von Φ verschwinden, wenn für $\lambda-\lambda_0$, $\mu-\mu_0$, $\nu-\nu_0$ die Anfangsglieder L, M, N gesetzt werden; es muss identisch:

$$\psi(L, M, N) = 0$$

sein. Da aber eine lineare Gleichung zwischen L, M, N nicht besteht, so muss die homogene Function ψ mindestens quadratisch sein. Daher verschwindet für $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$ der Ausdruck Φ mit seinen drei ersten Ableitungen.

Hiermit ist bewiesen, dass die 28 Punkte P_m Doppelpunkte der Fläche sechsten Grades

$$4\nu^3 - g_2\nu - g_3 = 0$$

sind.

Ueber bedingt periodische Functionen eines beschränkt veränderlichen complexen Argumentes und Anwendungen derselben auf Mechanik.

Hierzu Figurentafel I.

(Von Herrn *Otto Staude* in Rostock.)

Die Umkehrung des „trigonometrischen Integrals“:

$$(1.) \qquad t = \int_a^z \frac{\gamma dz}{\pi\sqrt{(z-a)(b-z)}}$$

mit den Variabeln t und z und den reellen Constanten a, $b(>a)$ und $\gamma(\neq 0)$ wird, indem man

$$(2.) \qquad w = \int_a^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)}},$$

$$(3.) \qquad t = \frac{\gamma w}{\pi}, \quad w = \frac{\pi t}{\gamma}$$

setzt, durch die Formeln:

$$(4.) \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos w, \quad \sqrt{(z-a)(b-z)} = \frac{b-a}{2}\sin w$$

ausgeführt, deren letztere sich auch in die Bestandtheile:

$$(4.) \qquad \sqrt{z-a} = \sqrt{b-a}.\sin\frac{w}{2}, \quad \sqrt{b-z} = \sqrt{b-a}.\cos\frac{w}{2}$$

auflösen lässt. Ist daher eine Function der reellen Variabeln z:

$$(5.) \qquad E(z, \sqrt{z-a}, \sqrt{b-z}) = G(t)$$

innerhalb des begrenzten Intervalles:

$$(6.) \qquad a < z < b$$

eine eindeutige, endliche und stetige Function ihrer drei Argumente z, $\sqrt{z-a}$, $\sqrt{b-z}$, so ist dieselbe als Function von t für alle reellen Werthe von t eindeutig, endlich und stetig, überdies periodisch mit der Periode 4γ.

Diese Eigenschaft bleibt der in Rede stehenden Function unter gewissen Bedingungen erhalten, wenn man die Gleichung (1.) durch die Gleichung

$$(7.) \qquad t = \int_a^z \frac{g(z)dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)f(z)}}$$

ersetzt und mit $g(z)$ und $f(z)$ in dem Intervalle (6.) eindeutige, endliche und stetige Functionen von z bezeichnet. Man kann dabei unter Einführung einer neuen Variabeln w die Gleichung (7.) in die beiden Gleichungen:

$$(8.) \qquad w = \int_a^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)}},$$

$$(9.) \qquad t = \int_0^w h(w)dw = \psi(w)$$

auflösen, indem man, die Substitution (4.) durch eckige Klammern bezeichnend, $h(w)$ durch die Formel:

$$(10.) \qquad \left[\frac{g(z)}{\sqrt{f(z)}}\right] = h(w)$$

bestimmt.

Die erwähnten Bedingungen bestehen darin, dass $f(z)$ in dem Intervalle (6.) beständig positiv und von 0 verschieden ist, und die unter (10.) in eckige Klammern geschlossene Function von z, unter $\sqrt{f(z)}$ den positiven Werth der Quadratwurzel verstanden, daselbst nicht 0 wird und einen beständig positiven oder beständig negativen reellen Werth behält. Das Functionsverhältniss (9.) zwischen t und w stimmt nämlich unter diesen Bedingungen mit dem in (3.) angegebenen darin überein, dass es *wechselseitig eindeutig* und *wechselseitig vollständig* ist, wenn mit dem letzteren Ausdrucke kurz bezeichnet werden darf, dass, wenn die eine der beiden Variabeln t und w sich von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegt, die andere ebenfalls alle reellen Werthe in der einen oder anderen Richtung durchläuft. Man kann diese Eigenschaften sehr einfach geometrisch ausdrücken, indem man die durch die Gleichung (9.) in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem w, t in der Ebene dargestellte Curve betrachtet. Die Curve wird, ebenso wie die gegen das Coordinatensystem schräg verlaufende gerade Linie (3.), von jeder horizontalen und verticalen Geraden je immer in einem und nur in einem Punkte geschnitten.

Unter diesen, mit Rücksicht auf das Folgende (vgl. § 3) ausführlich erläuterten Bedingungen ist alsdann $G(t)$ eine für alle reellen Werthe von

t eindeutige, endliche und stetige Function von t mit der Periode:

$$(11.) \qquad 4\omega = 4\int_a^b \frac{g(z)dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)f(z)}}.$$

Diese Function kann durch die *Fourier*sche Reihe:

$$(12.) \qquad E(z, \sqrt{z-a}, \sqrt{b-z}) = G(t) = A_0 + 2\sum_1^\infty{}_n \left\{ A_n \cos n\frac{\pi t}{2\omega} + B_n \sin n\frac{\pi t}{2\omega} \right\}$$

dargestellt werden, für deren Coefficienten man mit:

$$(13.) \qquad [E(z, \sqrt{z-a}, \sqrt{b-z})] = H(w)$$

die Ausdrücke hat:

$$(14.) \qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int_0^{4\pi} H(w)h(w)\cos n\frac{\pi\psi(w)}{2\omega}\,dw, \\ B_n = \dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int_0^{4\pi} H(w)h(w)\sin n\frac{\pi\psi(w)}{2\omega}\,dw. \end{cases}$$

Unter Beibehaltung der bisherigen Voraussetzungen mögen jetzt in der Gleichung (7.)

$$t = r + is, \quad z = x + iy$$

als complexe Variable betrachtet werden, und mag dementsprechend auch $w = u + iv$ eine complexe Variable sein. Es sollen ferner $g(z)$ und $f(z)$ in einem die Punkte a und b einschliessenden Bereiche $\mathfrak{A}$ (vgl. Fig. 1) der Ebene des complexen Argumentes z eindeutige und endliche analytische Functionen von z sein, und soll daselbst weder $f(z)$ noch $g(z)$ verschwinden, während das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{f(z)}$ durch die Bedingung bestimmt bleibt, dass ihr Werth für reelles z in den vorhin durch die doppeltgestrichene Wurzel bezeichneten Werth übergeht. Auch die Function E soll innerhalb des Gebietes $\mathfrak{A}$ eine eindeutige und endliche analytische Function der drei Argumente z, $\sqrt{z-a}$, $\sqrt{b-z}$ sein.

Alsdann ist $G(t)$ nicht nur für reelle, sondern für alle complexen Werthe innerhalb des Horizontalstreifens $\mathfrak{S}$: $-\infty < r < +\infty$, $-s_0 < s < +s_0$ der t-Ebene (vgl. Fig. 2), wo s_0 einen hinreichend kleinen von 0 verschiedenen Werth hat, eine eindeutige, endliche und mit 4ω periodische analytische Function von t. ***Innerhalb dieses Horizontalstreifens wird die Function $G(t)$ wiederum durch die Reihe*** (12.) ***dargestellt, welche in diesem Umfange unbedingt und gleichmässig convergent ist.***

Mit diesen Resultaten, welche, bei unwesentlichen Abänderungen, einer

Abhandlung von Hrn. *Weierstrass**) *entnommen sind, ist ein für die Darstellung der Bewegungsvorgänge in der analytischen Mechanik wichtiger Gesichtspunkt gewonnen.* Sollen nämlich die Bestimmungsstücke der Lage eines in Bewegung begriffenen Punktes, starren Körpers oder eines allgemeineren Punktsystems als Functionen der Zeit dargestellt werden, so ist es die Aufgabe der analytischen Mechanik, für jede dieser Functionen *je eine einzige analytische Darstellungsform zu finden, welche für die ganze Dauer der Bewegung gültig ist.* Ist es daher für die Mechanik einerseits nicht erforderlich, solche analytische Darstellungsformen zu besitzen, welche für *alle complexen* Werthe der Zeit t gleichmässig gelten **), so dürfte es andererseits zur Feststellung des analytischen Charakters jener Darstellungsformen zweckmässig sein, die bezüglichen Untersuchungen *über die reelle Axe hinaus auf einen diese Axe umschliessenden Horizontalstreifen der Ebene des complexen Argumentes* $t = r + is$ *(vgl. Fig. 2) auszudehnen.*

Auf diese Weise sind in der erwähnten Abhandlung von Hrn. *Weierstrass* die vorhin charakterisirten Functionen $G(t)$ entstanden, welche innerhalb eines hinreichend schmalen Horizontalstreifens der t-Ebene eindeutige, endliche und *reell periodische* analytische Functionen sind und im Besonderen zur Darstellung der einfachsten Form stabiler Bewegungen, der *unbedingt periodischen Bewegungen,* dienen.

Im Folgenden soll eine weitere Klasse solcher Functionen von t untersucht werden, welche in einem hinreichend schmalen Horizontalstreifen der t-Ebene eindeutige und endliche *einfach bedingt periodische* analytische Functionen von t sind und für die Darstellung einer entsprechenden Form stabiler Bewegungen, der *einfach bedingt periodischen Bewegungen,* gebraucht werden.

Kapitel I.

Theorie der bedingt periodischen Functionen.

§ 1.

Die Elementarform der bedingt periodischen Functionen.

Um die letztgenannten Functionen einzuführen, kann man, nach Analogie mit dem Ausgangspunkte der vorstehenden Einleitung, von den folgen-

*) Vgl. *Weierstrass,* Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen, Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1866, S. 97.

**) Vgl. *Dziobek,* Die mathematischen Theorien der Planetenbewegung, Leipzig 1888, S. 297.

den Integralgleichungen zwischen vier Veränderlichen t_1, t_2 und z_1, z_2 ausgehen:

$$(1.)\quad \begin{cases} t_1 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{\gamma_{11} dz_1}{\pi\sqrt{(z_1-a_1)(b_1-z_1)}} + \int_{a_2}^{z_2} \frac{\gamma_{12} dz_2}{\pi\sqrt{(z_2-a_2)(b_2-z_2)}}, \\ t_2 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{\gamma_{21} dz_1}{\pi\sqrt{(z_1-a_1)(b_1-z_1)}} + \int_{a_2}^{z_2} \frac{\gamma_{22} dz_2}{\pi\sqrt{(z_2-a_2)(b_2-z_2)}}, \end{cases}$$

in welchen a_1, $b_1(>a_1)$; a_2, $b_2(>a_2)$; γ_{11}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{22} reelle Constanten und:

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{21}\gamma_{12} \neq 0$$

sein soll. Indem man jetzt:

$$(2.)\quad w_1 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1-a_1)(b_1-z_1)}}, \quad w_2 = \int_{a_2}^{z_2} \frac{dz_2}{\sqrt{(z_2-a_2)(b_2-z_2)}}$$

setzt und somit:

$$(3.)\quad \begin{cases} t_1 = \frac{1}{\pi}(\gamma_{11}w_1 + \gamma_{12}w_2), \quad w_1 = \frac{\pi}{\gamma}(\gamma_{22}t_1 - \gamma_{12}t_2), \\ t_2 = \frac{1}{\pi}(\gamma_{21}w_1 + \gamma_{22}w_2), \quad w_2 = \frac{\pi}{\gamma}(-\gamma_{21}t_1 + \gamma_{11}t_2), \end{cases}$$

erhält, kann man als Elemente der Umkehrung der Integralsummen (1.) die folgenden Formeln ($\beta = 1, 2$) bezeichnen:

$$(4.)\quad \begin{cases} z_\beta = \frac{a_\beta + b_\beta}{2} + \frac{a_\beta - b_\beta}{2}\cos w_\beta, \quad \sqrt{z_\beta - a_\beta} = \sqrt{b_\beta - a_\beta}.\sin\frac{w_\beta}{2}, \\ \sqrt{b_\beta - z_\beta} = \sqrt{b_\beta - a_\beta}.\cos\frac{w_\beta}{2}. \end{cases}$$

Ist nun eine Function:

$$(5.)\quad E(z_1, z_2, \sqrt{z_1-a_1}, \sqrt{b_1-z_1}, \sqrt{z_2-a_2}, \sqrt{b_2-z_2}) = G(t_1, t_2)$$

innerhalb der Intervalle:

$$(6.)\quad a_1 < z_1 < b_1, \quad a_2 < z_2 < b_2$$

eine eindeutige, endliche und stetige Function ihrer sechs Argumente z_1, z_2, $\sqrt{z_1-a_1}$, $\sqrt{b_1-z_1}$, $\sqrt{z_2-a_2}$, $\sqrt{b_2-z_2}$, so ist dieselbe als Function von t_1, t_2 eine für alle reellen Werthe von t_1, t_2 eindeutige, endliche und stetige Function, überdies doppelt periodisch mit den beiden Periodenpaaren $(4\gamma_{11}, 4\gamma_{21})$ und $(4\gamma_{12}, 4\gamma_{22})$.

Eine solche von den trigonometrischen Functionen sinus und cosinus der Argumente $\frac{w_1}{2}$, $\frac{w_2}{2}$ eindeutig abhängende Function $G(t_1, t_2)$, geht nun mit $t_1 = 0$, $t_2 = t$ in eine eindeutige Function der sinus und cosinus von:

$$\frac{w_1}{2} = -\frac{\pi\gamma_{12}}{2\gamma}t, \quad \frac{w_2}{2} = \frac{\pi\gamma_{11}}{2\gamma}t$$

über, welche als Function $g(t)$ der einen reellen Variabeln t im Allgemeinen nicht mehr periodisch ist, aber unter der Bedingung:

$$m_1\gamma_{11}+m_2\gamma_{12} = 0$$

mit irgend zwei positiven oder negativen ganzen Zahlen m_1, m_2 die Periode:

$$4T = 4(m_1\gamma_{21}+m_2\gamma_{22})$$

erhält, indem dann:

$$\frac{w_1}{2} = \frac{m_1\pi}{2T}t, \quad \frac{w_2}{2} = \frac{m_2\pi}{2T}t$$

wird. Die Function $g(t)$ ist also eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige, bedingt periodische Function von t.

§ 2.

Die verallgemeinerte Form des Umkehrproblems der bedingt periodischen Functionen.

Die angegebenen Eigenschaften bleiben der Function $G(t_1, t_2)$ unter gewissen Bedingungen erhalten, wenn die Gleichungen (1.) ersetzt werden durch die Gleichungen:

$$(7.)\quad \begin{cases} t_1 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{g_{11}(z_1)dz_1}{\sqrt{(z_1-a_1)(b_1-z_1)f_{11}(z_1)}} + \int_{a_2}^{z_2} \frac{g_{12}(z_2)dz_2}{\sqrt{(z_2-a_2)(b_2-z_2)f_{12}(z_2)}}, \\ t_2 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{g_{21}(z_1)dz_1}{\sqrt{(z_1-a_1)(b_1-z_1)f_{21}(z_1)}} + \int_{a_2}^{z_2} \frac{g_{22}(z_2)dz_2}{\sqrt{(z_2-a_2)(b_2-z_2)f_{22}(z_2)}}, \end{cases}$$

wo unter $g_{\alpha\beta}(z_\beta)$, $f_{\alpha\beta}(z_\beta)$ $(\alpha = 1, 2;\ \beta = 1, 2)$ in den Intervallen (6.) eindeutige, endliche und stetige Functionen von z_β verstanden werden. Man kann zunächst mit Einführung der früheren Variabeln w_1, w_2 aus (2.) den vorliegenden Ansatz in folgender Weise zerlegen:

$$(8.)\quad w_1 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1-a_1)(b_1-z_1)}}, \quad w_2 = \int_{a_2}^{z_2} \frac{dz_2}{\sqrt{(z_2-a_2)(b_2-z_2)}},$$

$$(9.)\quad \begin{cases} t_1 = \int_0^{w_1} h_{11}(w_1)dw_1 + \int_0^{w_2} h_{12}(w_2)dw_2 = \psi_{11}(w_1)+\psi_{12}(w_2) = \psi_1(w_1,\ w_2), \\ t_2 = \int_0^{w_1} h_{21}(w_1)dw_1 + \int_0^{w_2} h_{22}(w_2)dw_2 = \psi_{21}(w_1)+\psi_{22}(w_2) = \psi_2(w_1,\ w_2), \end{cases}$$

wenn man, die Substitution (4.) durch eckige Klammern bezeichnend, $h_{\alpha\beta}(w_\beta)$

durch die Gleichung:

$$(10.) \qquad \left[\frac{g_{\alpha\beta}(z_\beta)}{\sqrt{f_{\alpha\beta}(z_\beta)}}\right] = h_{\alpha\beta}(w_\beta)$$

bestimmt.

§ 3.

Die Bedingungen der Eindeutigkeit der Umkehrfunctionen im reellen Gebiet.

Die erwähnten Bedingungen, welche ich bereits früher abgeleitet habe *), mögen hier nur ihrer Bedeutung nach wiederum kurz charakterisirt werden. Sie lauten folgendermassen:

I. Die Functionen $f_{\alpha\beta}(z_\beta)$ sollen für alle den Ungleichungen (6.) genügenden Werthe von z_β beständig positiv und von 0 verschieden sein, worauf man durch die zweimal gestrichene Wurzel in (10.) den positiven Werth von $\sqrt{f_{\alpha\beta}(z_\beta)}$ bezeichne. Die Functionen $g_{\alpha\beta}(z_\beta)$ sollen in demselben Umfange niemals ihr Vorzeichen wechseln, können jedoch verschwinden, soweit dadurch nicht die folgende Bedingung II verletzt wird.

II. Die Determinante:

$$(11.) \qquad D(z_1, z_2) = \frac{g_{11}(z_1)}{\sqrt{f_{11}(z_1)}}\frac{g_{22}(z_2)}{\sqrt{f_{22}(z_2)}} - \frac{g_{21}(z_1)}{\sqrt{f_{21}(z_1)}}\frac{g_{12}(z_2)}{\sqrt{f_{12}(z_2)}}$$

soll für alle in den Intervallen (6.) gelegenen Werthe von z_1, z_2 beständig positiv oder beständig negativ und niemals 0 sein.

Da z_1, z_2 in den unter (6.) angegebenen Grenzen bleiben, welche reellen Werthe auch w_1, w_2 annehmen, so übertragen sich diese Bedingungen auf die betreffenden Functionen von w_1, w_2 in folgender Form:

I. Die Function $h_{\alpha\beta}(w_\beta)$ ist für alle reellen Werthe von w_1, w_2 eine eindeutige und endliche, überdies gerade und mit 2π periodische Function von w_β und kann für reelle Werthe w_β niemals ihr Vorzeichen wechseln.

II. Die Determinante:

$$(12.) \qquad h(w_1, w_2) = h_{11}(w_1)h_{22}(w_2) - h_{21}(w_1)h_{12}(w_2)$$

ist für alle reellen Werthe von w_1, w_2 beständig positiv oder beständig negativ und niemals gleich 0.

Die Bedeutung dieser Bedingungen ist die, dass das Functionsverhältniss zwischen w_1, w_2 und t_1, t_2, wie es in (9.) definirt wird, und wie es umgekehrt durch:

$$(13.) \qquad w_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \quad w_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$$

*) Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 29, S. 168.

bezeichnet werde, mit dem durch (3.) bestimmten darin übereinkommt, dass es ***wechselseitig eindeutig und wechselseitig vollständig*** ist; wobei mit dem letzteren Ausdrucke kurz bezeichnet wird, dass, wenn eines der beiden Grössenpaare w_1, w_2 und t_1, t_2 alle reellen Werthepaare durchläuft, dies auch von dem anderen gilt. Ueberdies bestehen wegen der Periodicität der Functionen $h_{\alpha\beta}(w_\beta)$, wenn:

$$(14.) \qquad 2\omega_{\alpha\beta} = \int_0^{2\pi} h_{\alpha\beta}(w_\beta)\,dw_\beta = 2\int_0^{\pi} h_{\alpha\beta}(w_\beta)\,dw_\beta = 2\psi_{\alpha\beta}(\pi)$$

gesetzt wird, die Beziehungen:

$$(15.) \qquad \begin{cases} \psi_\alpha(w_1+2\pi,\ w_2) &= \psi_\alpha(w_1,\ w_2)+2\omega_{\alpha 1}, \\ \psi_\alpha(w_1,\ w_2+2\pi) &= \psi_\alpha(w_1,\ w_2)+2\omega_{\alpha 2}, \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$(16.) \qquad \begin{cases} \varphi_1(t_1+2\omega_{11},\ t_2+2\omega_{21}) &= \varphi_1(t_1,\ t_2)+2\pi, \\ \varphi_2(t_1+2\omega_{11},\ t_2+2\omega_{21}) &= \varphi_2(t_1,\ t_2), \\ \varphi_1(t_1+2\omega_{12},\ t_2+2\omega_{22}) &= \varphi_1(t_1,\ t_2), \\ \varphi_2(t_1+2\omega_{12},\ t_2+2\omega_{22}) &= \varphi_2(t_1,\ t_2)+2\pi. \end{cases}$$

Geometrisch kann dieser Charakter des Functionsverhältnisses (9.) an der durch dasselbe bewirkten Abbildung zweier Ebenen mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen w_1, w_2 und t_1, t_2 auf einander übersehen werden. Man zerlege zu dem Ende die w_1w_2-Ebene durch horizontale und verticale Gerade (vgl. Fig. 3) in Quadrate von der Seitenlänge 2π, deren eines, das Fundamentalquadrat, mit den Ecken 0, 0; 2π, 0; 0, 2π; 2π, 2π sich vom Coordinatenanfangspunkt aus an die Coordinatenaxen anlehnt. Man fixire ferner in der t_1t_2-Ebene die Punkte 0, 0; $2\omega_{11}$, $2\omega_{21}$; $2\omega_{12}$, $2\omega_{22}$; $2\omega_{11}+2\omega_{12}$, $2\omega_{21}+2\omega_{22}$, welche den Ecken des Fundamentalquadrats der w_1w_2-Ebene entsprechen. Auf ein krummliniges Parallelogramm mit jenen Ecken wird das letztgenannte Quadrat abgebildet. An dieses krummlinige Parallelogramm, als Fundamentalparallelogramm der t_1t_2-Ebene, schliessen sich congruente Parallelogramme als Bilder der übrigen Quadrate der w_1w_2-Ebene an, welche die ganze t_1t_2-Ebene (vgl. Fig. 4) einfach und lückenlos überdecken. Den unbegrenzten Horizontal- und Verticallinien der w_1w_2-Ebene entsprechen ebenfalls beiderseits unbegrenzte Curvenzüge C_1 und C_2 der t_1t_2-Ebene, welche überall eine Tangente haben und sich derart über die Ebene ausbreiten, dass durch jeden Punkt der Ebene immer eine und nur eine Curve jeder der beiden Arten C_1 und C_2 hindurchgeht. Der Charakter der Abbildung

ist also in dieser Beziehung derselbe, wie bei dem Functionsverhältniss (3.), wo die Curven der $t_1 t_2$-Ebene gerade Linien und die Ecken des Fundamentalparallelogramms 0, 0; $2\gamma_{11}$, $2\gamma_{21}$; $2\gamma_{12}$, $2\gamma_{22}$; $2\gamma_{11}+2\gamma_{12}$, $2\gamma_{21}+2\gamma_{22}$ sind.

§ 4.

Die Darstellung der bedingt periodischen Functionen im reellen Gebiet.

Sind die in § 3 erläuterten Bedingungen erfüllt, so ist $G(t_1, t_2)$ eine für alle reellen Werthe von t_1, t_2 eindeutige, endliche und stetige Function von t_1, t_2 mit den Periodenpaaren $(2\varepsilon_1\omega_{11}, 2\varepsilon_1\omega_{21})$ und $(2\varepsilon_2\omega_{12}, 2\varepsilon_2\omega_{22})$, wo ε_1 und ε_2 beide 1 bedeuten, wenn die Function E in (5.) ihre vier letzten Argumente nicht oder nur in den Productverbindungen $\sqrt{z_1-a_1}\sqrt{b_1-z_1}$, $\sqrt{z_2-a_2}\sqrt{b_2-z_2}$ enthält, wo dagegen ε_1 und ε_2 beziehungsweise den Werth 2 erhalten, wenn die Argumente $\sqrt{z_1-a_1}$, $\sqrt{b_1-z_1}$ und $\sqrt{z_2-a_2}$, $\sqrt{b_2-z_2}$ einzeln vertreten sind.

Um alsdann zur Darstellung der Function durch die zweifach unendliche trigonometrische Reihe zu gelangen, setzt man:

$$(17.)\quad \tau_1 = \frac{\pi}{\varepsilon_1\omega}(\omega_{22}t_1-\omega_{12}t_2),\quad \tau_2 = \frac{\pi}{\varepsilon_2\omega}(-\omega_{21}t_1+\omega_{11}t_2),\quad \omega = \omega_{11}\omega_{22}-\omega_{21}\omega_{12},$$

worauf umgekehrt:

$$(17.)\quad t_1 = \frac{1}{\pi}(\varepsilon_1\omega_{11}\tau_1+\varepsilon_2\omega_{12}\tau_2),\quad t_2 = \frac{1}{\pi}(\varepsilon_1\omega_{21}\tau_1+\varepsilon_2\omega_{22}\tau_2)$$

wird, und die Function $G(t_1, t_2)$ übergeht in die Function $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$, welche die Periodeneigenschaften:

$$(18.)\quad \Gamma(\tau_1+2\pi,\ \tau_2) = \Gamma(\tau_1,\ \tau_2),\quad \Gamma(\tau_1,\ \tau_2+2\pi) = \Gamma(\tau_1,\ \tau_2)$$

erhält. Es ist daher nach den Sätzen über die *Fourier*sche Reihe mit zwei Veränderlichen: *)

$$(19.)\quad \begin{cases} \Gamma(\tau_1,\ \tau_2) = \frac{1}{4}A_{00}+\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_{n_1}(A_{n_10}\cos n_1\tau_1+B_{n_10}\sin n_1\tau_1) \\ \qquad +\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_{n_2}(A_{0n_2}\cos n_2\tau_2+C_{0n_2}\sin n_2\tau_2) \\ \qquad +\sum_1^\infty{}_{n_1}\sum_1^\infty{}_{n_2}(A_{n_1n_2}\cos n_1\tau_1.\cos n_2\tau_2+B_{n_1n_2}\sin n_1\tau_1.\cos n_2\tau_2 \\ \qquad\qquad +C_{n_1n_2}\cos n_1\tau_1.\sin n_2\tau_2+D_{n_1n_2}\sin n_1\tau_1\sin n_2\tau_2), \end{cases}$$

*) Vgl. ***Ascoli,*** Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica, Atti della R. Accademia dei Lincei, ser. III, vol. 4 (1879); Sulle serie trigonometriche a due variabili, ebd. vol. 8 (1880).

wo die Coefficienten in folgende Gestalt versetzt werden können:

$$(20.)\quad \begin{cases} A_{n_1 n_2} = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(\tau_1,\ \tau_2)\cos n_1\tau_1 \cos n_2\tau_2\, d\tau_1 d\tau_2 \\ \quad = \dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\omega}\displaystyle\int_0^{2\varepsilon_1\pi}\int_0^{2\varepsilon_2\pi} H(w_1,\ w_2)h(w_1,\ w_2)\cos\Big(n_1\frac{\pi}{\varepsilon_1\omega}\Psi_1(w_1,\ w_2)\Big) \\ \qquad\qquad \times\cos\Big(n_2\frac{\pi}{\varepsilon_2\omega}\Psi_2(w_1,\ w_2)\Big)\,dw_1 dw_2 \end{cases}$$

u. s. w. mit:

$$\Psi_1(w_1,\ w_2) = \ \ \omega_{22}\psi_1(w_1,\ w_2) - \omega_{12}\psi_2(w_1,\ w_2),$$
$$\Psi_2(w_1,\ w_2) = -\omega_{21}\psi_1(w_1,\ w_2) + \omega_{11}\psi_2(w_1,\ w_2),$$
$$H(w_1,\ w_2) = [E(z_1,\ z_2,\ \sqrt{z_1-a_1},\ \sqrt{b_1-z_1},\ \sqrt{z_2-a_2},\ \sqrt{b_2-z_2})].$$

Setzt man jetzt, wie in § 1:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = t,$$

so wird die durch die Reihe (19.) dargestellte Function $G(0, t) = g(t)$ eine bedingt periodische Function von t. Sie erhält die Periode:

$$T = 2\varepsilon_1 m_1\omega_{21} + 2\varepsilon_2 m_2\omega_{22},$$

wenn mit zwei positiven oder negativen ganzen Zahlen m_1, m_2 die Bedingung erfüllt ist:

$$0 = 2\varepsilon_1 m_1\omega_{11} + 2\varepsilon_2 m_2\omega_{12}.$$

§ 5.

Einführung einer beschränkten complexen Veränderlichkeit der verschiedenen Variabeln.

Während bisher die Variabeln w_1, w_2; t_1, t_2; τ_1, τ_2 im *reellen* Gebiete unbeschränkt und z_1, z_2 im *reellen* Gebiete in den Intervallen (6.) beschränkt veränderlich waren, soll jetzt mit $\beta = 1, 2$:

$$z_\beta = x_\beta + iy_\beta, \quad w_\beta = u_\beta + iv_\beta, \quad t_\beta = r_\beta + is_\beta, \quad \tau_\beta = \varrho_\beta + i\sigma_\beta$$

gesetzt werden. Was nun zuerst die complexen Veränderlichen z_β angeht, so sollen dieselben innerhalb eines die Punkte a_β und b_β umschliessenden, einfach zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{A}_\beta$ (vgl. Fig. 5) ihrer beiderseitigen Ebenen betrachtet werden. Die Functionen $g_{a\beta}(z_\beta)$ und $f_{a\beta}(z_\beta)$, welche längs der reellen Axe der z_β-Ebene von a_β bis b_β die frühere Bedeutung behalten und den früheren Bedingungen genügen, sollen jetzt innerhalb des Gebietes $\mathfrak{A}_\beta$ eindeutige analytische Functionen des complexen Argumentes z_β sein, die daselbst nicht ∞ werden. Es sei ferner $f_{a\beta}(z_\beta)$ innerhalb des Gebietes

$\mathfrak{A}_\beta$ nirgends 0 und bezeichne $\sqrt{f_{\alpha\beta}(z_\beta)}$ den alsdann eindeutig bestimmten Werth der Quadratwurzel aus $f_{\alpha\beta}(z_\beta)$, der auf der rellen Axe zwischen a_β und b_β in den früher so bezeichneten reellen Werth übergeht. Weiter soll die Determinante $D(z_1, z_2)$ auch für die jetzt in Betracht kommenden Gebiete $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nirgends 0 werden.

Die zu bestimmende Function (5.) endlich soll innerhalb der genannten Gebiete eine eindeutige analytische Function ihrer sechs Argumente sein, die daselbst immer endlich bleibt.

Durch das Functionsverhältniss (4.) wird nun eine Abbildung der Ebene w_β auf die Ebene z_β bewirkt (vgl. Fig. 6). Das Rechteck der w_β-Ebene mit den Ecken 0, 2π, $2\pi+v_\beta^0 i$, $v_\beta^0 i$, wo v_β^0 eine positive Constante bedeutet, und ebenso das Rechteck mit den Ecken 0, 2π, $2\pi-v_\beta^0 i$, $-v_\beta^0 i$ werden dabei je auf die Fläche der Ellipse $\mathfrak{E}_\beta$ der z_β-Ebene:

$$\frac{\left(x_\beta-\frac{a_\beta+b_\beta}{2}\right)^2}{\left(\frac{a_\beta-b_\beta}{2}\cos i v_\beta^0\right)^2}+\frac{y_\beta^2}{\left(\frac{a_\beta-b_\beta}{2}\,\frac{\sin i v_\beta^0}{i}\right)^2}=1$$

mit den Brennpunkten a_β und b_β abgebildet *). Ferner wird der ganze Horizontalstreifen ($\mathfrak{S}_\beta$): $-\infty<u_\beta<+\infty$, $-v_\beta^0<v_\beta<v_\beta^0$ der w_β-Ebene mit allen seinen oberhalb und unterhalb der reellen Axe gelegenen Rechtecken von der Horizontaldimension 2π auf das Innere derselben Ellipse abgebildet. Jedem Punkte des Streifens $\mathfrak{S}_\beta$ entspricht ein und nur ein Punkt innerhalb der Ellipse $\mathfrak{E}_\beta$.

Die Breite des Streifens $\mathfrak{S}_\beta$ in der w_β-Ebene und die Dimensionen der Ellipse $\mathfrak{E}_\beta$ in der z_β-Ebene sind durch den Werth v_β^0 charakterisirt. Mit $v_\beta^0=0$ reducirt sich jener auf die reelle Axe und diese auf das reelle Axenstück zwischen a_β und b_β.

§ 6.

Die complexen Variabeln t_β in den Horizontalstreifen der w_β-Ebenen.

Den weiteren Betrachtungen wird nun die Voraussetzung zu Grunde gelegt, dass die positiven reellen Grössen v_β^0 so klein seien, dass die Ellipsen der z_β-Ebenen (vgl. Fig. 5) ganz innerhalb der betreffenden Gebiete $\mathfrak{A}_\beta$ liegen. Solange dann w_β in dem Horizontalstreifen $\mathfrak{S}_\beta$ bleibt, bewegt sich z_β im Inneren der ihm entsprechenden Ellipse $\mathfrak{E}_\beta$. Es ist also der Aus-

*) Vgl. *Weierstrass*, a. a. O. S. 103.

druck (10.) als Function $h_{\alpha\beta}(w_\beta)$ von w_β innerhalb des Streifens $\mathfrak{S}_\beta$ eine eindeutige und endliche analytische Function, da er als Function von z_β innerhalb des Gebietes $\mathfrak{A}_\beta$ den Voraussetzungen gemäss diese Eigenschaft hat. Ueberdies ist $h_{\alpha\beta}(w_\beta)$ im gleichen Umfange gerade und mit der Periode 2π periodisch. In Folge dieser Eigenschaften *) kann $h_{\alpha\beta}(w_\beta)$ innerhalb des Streifens $\mathfrak{S}_\beta$ in die daselbst unbedingt und gleichmässig convergente trigonometrische Reihe:

$$(21.) \qquad h_{\alpha\beta}(w_\beta) = A_0^{\alpha\beta} + 2A_1^{\alpha\beta}\cos w_\beta + 2A_2^{\alpha\beta}\cos 2w_\beta + 2A_3^{\alpha\beta}\cos 3w_\beta + \cdots$$

entwickelt werden, wo die Coefficienten:

$$A_n^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_{\alpha\beta}(w_\beta)\cos n w_\beta \, dw_\beta,$$

da das Integral auf der reellen Axe genommen werden kann, reelle Werthe haben.

Durch Integration dieser Reihe zwischen den Grenzen 0 und w_β nach w_β ergiebt sich:

$$(22.) \qquad \psi_{\alpha\beta}(w_\beta) = A_0^{\alpha\beta} w_\beta + 2A_1^{\alpha\beta}\sin w_\beta + 2A_2^{\alpha\beta}\frac{\sin 2w_\beta}{2} + 2A_3^{\alpha\beta}\frac{\sin 3w_\beta}{3} + \cdots,$$

gleichfalls gültig innerhalb des Streifens $\mathfrak{S}_\beta$. Dabei hat man mit Hinblick auf (14.) für den ersten Coefficienten die Gleichung:

$$(23.) \qquad \omega_{\alpha\beta} = A_0^{\alpha\beta}\pi,$$

woraus weiter folgt, dass auch für die hier in Frage kommenden complexen Werthe von w_β:

$$(24.) \qquad \psi_{\alpha\beta}(w_\beta + 2\pi) = \psi_{\alpha\beta}(w_\beta) + 2\omega_{\alpha\beta}.$$

Es sind hiernach die durch die Integralsummen (9.) definirten Functionen $t_\alpha = \psi_\alpha(w_1, w_2)$ für alle complexen Werthe von w_1, w_2 innerhalb der Streifen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ der betreffenden Ebenen eindeutige und endliche analytische Functionen von w_1, w_2, für welche in gleichem Umfange die Eigenschaften (15.) bestehen. Um die Werthepaare zu überblicken, welche innerhalb der Streifen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ die Variabeln t_1, t_2 annehmen, betrachte man die reellen und imaginären Theile der Variabeln getrennt. Setzt man zu dem Ende mit Hinblick auf (9.):

$$(25.) \qquad \psi_{\alpha\beta}(w_\beta) = r_{\alpha\beta} + i s_{\alpha\beta},$$

---

*) Vgl. ***Briot et Bouquet,*** Théorie des fonctions elliptiques, 2ième éd., Paris 1875, S. 161.

so hat man:

$$(26.)\quad \begin{cases} r_\alpha = r_{\alpha 1} + r_{\alpha 2}, & \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u_\beta} = \dfrac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial u_\beta}, & \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial v_\beta} = \dfrac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial v_\beta}, \\ s_\alpha = s_{\alpha 1} + s_{\alpha 2}, & \dfrac{\partial s_\alpha}{\partial u_\beta} = \dfrac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial u_\beta}, & \dfrac{\partial s_\alpha}{\partial v_\beta} = \dfrac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial v_\beta}. \end{cases}$$

Durch Zerlegung der Reihe (22.) in reellen und imaginären Theil folgt aber:

$$(27.)\quad \begin{cases} r_{\alpha\beta} = A_0^{\alpha\beta} u_\beta + 2A_1^{\alpha\beta} \cos v_\beta i \sin u_\beta + 2A_2^{\alpha\beta} \cos 2v_\beta i \dfrac{\sin 2u_\beta}{2} \\ \qquad\qquad + 2A_3^{\alpha\beta} \cos 3v_\beta i \dfrac{\sin 3u_\beta}{3} + \cdots, \\ s_{\alpha\beta} = A_0^{\alpha\beta} v_\beta + 2A_1^{\alpha\beta} \dfrac{\sin v_\beta i}{i} \cos u_\beta + 2A_2^{\alpha\beta} \dfrac{\sin 2v_\beta i}{i} \dfrac{\cos 2u_\beta}{2} \\ \qquad\qquad + 2A_3^{\alpha\beta} \dfrac{\sin 3v_\beta i}{i} \dfrac{\cos 3u_\beta}{3} + \cdots \end{cases}$$

und hieraus durch Differentiation:

$$(28.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial u_\beta} = \dfrac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial v_\beta} = A_0^{\alpha\beta} + 2A_1^{\alpha\beta} \cos v_\beta i \cos u_\beta + 2A_2^{\alpha\beta} \cos 2v_\beta i \cos 2u_\beta \\ \qquad\qquad + 2A_3^{\alpha\beta} \cos 3v_\beta i \cos 3u_\beta + \cdots, \\ \dfrac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial v_\beta} = -\dfrac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial u_\beta} = 2A_1^{\alpha\beta} \dfrac{\sin v_\beta i}{i} \sin u_\beta + 2A_2^{\alpha\beta} \dfrac{\sin 2v_\beta i}{i} \sin 2u_\beta \\ \qquad\qquad + 2A_3^{\alpha\beta} \dfrac{\sin 3v_\beta i}{i} \sin 3u_\beta + \cdots. \end{cases}$$

Es ist daher im Besonderen, wenn man durch Einschliessen in runde Klammern die Substitution $v_1 = 0,\ v_2 = 0$ bezeichnet:

$$(29.)\quad (r_\alpha) = \psi_\alpha(u_1,\ u_2), \quad (s_\alpha) = 0,$$

$$(30.)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u_\beta}\right) = \left(\dfrac{\partial s_\alpha}{\partial v_\beta}\right) = h_{\alpha\beta}(u_\beta), \quad \left(\dfrac{\partial r_\alpha}{\partial v_\beta}\right) = -\left(\dfrac{\partial s_\alpha}{\partial u_\beta}\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial r_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial r_2}{\partial u_2} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial r_2}{\partial u_1}\right) = \left(\dfrac{\partial s_1}{\partial v_1}\dfrac{\partial s_2}{\partial v_2} - \dfrac{\partial s_1}{\partial v_2}\dfrac{\partial s_2}{\partial v_1}\right) = h(u_1 u_2). \end{cases}$$

Setzt man endlich:

$$(31.)\quad \Delta(u_1 u_2 v_1 v_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial r_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial r_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial r_1}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial r_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial r_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial r_2}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial s_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial s_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial s_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial s_1}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial s_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial s_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial s_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial s_2}{\partial v_2} \end{vmatrix},$$

so wird:

$$(32.)\quad (\Delta(u_1 u_2 v_1 v_2)) = h^2(u_1 u_2).$$

In Folge der Stetigkeit der Functionen r und s_β wird nun nach (29.), bei hinreichend kleinem Werthe von v_β'', auch s_β innerhalb der Streifen $\mathfrak{S}_\beta$ der w_β-Ebenen seinem absoluten Betrage nach eine kleine Zahl s_β^1 nicht überschreiten, während r_α, welche Werthe auch die Variabeln v_1, v_2 innerhalb der ihnen vorgeschriebenen Grenzen haben mögen, ebenso wie nach § 3 $\psi_\alpha(u_1, u_2)$, alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

Somit liegen die Werthe, welche die Variable t_β innerhalb der Streifen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ der Ebenen w_1, w_2 annimmt, innerhalb eines gewissen Horizontalstreifens: $-\infty < r_\beta < +\infty$, $-s_\beta^1 < s_\beta < +s_\beta^1$ der Ebene t_β (vgl. Fig. 7).

§ 7.

Die complexen Variabeln w_β in den Horizontalstreifen der t_β-Ebenen.

Dass umgekehrt, wenn dieser letztere Streifen hinreichend verschmälert, also etwa in einen Streifen $\mathfrak{T}_\beta$: $-\infty < r_\beta < +\infty$, $-s_\beta'' < s_\beta < +s_\beta$ (vgl. Fig. 7) übergeführt wird, jeder Werthcombination t_1, t_2 innerhalb der Streifen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ stets ein Werth w_β innerhalb des Streifens $\mathfrak{S}_\beta$ entspricht und nur ein solcher, folgt aus der Verbindung zweier Momente: erstens der Stetigkeit der Functionen r_α und s_α und ihrer Differentialquotienten und zweitens der in § 3 erörterten wechselseitigen Eindeutigkeit und Vollständigkeit des Functionsverhältnisses zwischen w_1, w_2 und t_1, t_2 im reellen Gebiete.

Die Differentialgleichungen zwischen r_1, r_2, s_1, s_2 und u_1, u_2, v_1, v_2:

$$(33.)\quad \begin{cases} dr_1 = \frac{\partial r_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial r_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial r_1}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial r_1}{\partial v_2} dv_2, \\ dr_2 = \frac{\partial r_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial r_2}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial r_2}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial r_2}{\partial v_2} dv_2, \\ ds_1 = \frac{\partial s_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial s_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial s_1}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial s_1}{\partial v_2} dv_2, \\ ds_2 = \frac{\partial s_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial s_2}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial s_2}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial s_2}{\partial v_2} dv_2 \end{cases}$$

reduciren sich nämlich für $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ nach (30.) auf:

$$(34.)\quad \begin{cases} dr_1 = h_{11}(u_1) du_1 + h_{12}(u_2) du_2, \\ dr_2 = h_{21}(u_1) du_1 + h_{22}(u_2) du_2, \end{cases}$$

$$(35.)\quad \begin{cases} ds_1 = h_{11}(u_1) dv_1 + h_{12}(u_2) dv_2, \\ ds_2 = h_{21}(u_1) dv_1 + h_{22}(u_2) dv_2 \end{cases}$$

und werden, bei der Stetigkeit der Differentialquotienten von r_α und s_α, für hinreichend kleine Werthe von v_1, v_2, von dieser Form beliebig wenig abweichen. Die Gleichungen (34.) und (35.) sind aber je dieselben, wie die

im reellen Gebiete zwischen t_1, t_2 und w_1, w_2 nach (9.) bestehenden Gleichungen, sodass für kleine Werthe von v_1, v_2 ebenso wie dort folgt, dass die Variabeln u_1, u_2, bezüglich v_1, v_2 eindeutig von r_1, r_2 und s_1, s_2 abhängen. Da nun ferner nach (29.) die Werthepaare $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ und $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ zusammengehören, so geht aus (35.) hervor, dass für hinreichend kleine Werthe von s_1, s_2 auch v_1, v_2 beliebig klein werden und auch zu jedem Werthsystem s_1, s_2 ein entsprechendes Werthsystem v_1, v_2 gehört. Man kann daher jedenfalls zwei von 0 verschiedene Grössen s_1^0, s_2^0 derart bestimmen, dass die Variabeln u_1, u_2, v_1, v_2 von den Variabeln r_1, r_2, s_1, s_2 in dem betreffenden Umfange eindeutig abhängen und zugleich v_β innerhalb der Grenzen $-v_\beta^0$ und $+v_\beta^0$ bleibt.

Aus diesem Verhalten der reellen und imaginären Theile der complexen Variabeln w_1, w_2 und t_1, t_2, deren wechselseitiges analytisches Functionsverhältniss durch die Gleichungen (9.) definirt ist, geht aber hervor, dass w_1, w_2 innerhalb gewisser Horizontalstreifen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ der Ebenen t_1, t_2 von hinreichend kleiner, aber nicht verschwindender Breite eindeutige und endliche analytische Functionen von t_1, t_2 sind, deren Werthe den Horizontalstreifen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ der Ebenen w_1, w_2 angehören. Damit folgt für die unter (5.) eingeführte Function:

Die Function $E(z_1, z_2, \sqrt{z_1 - a_1}, \sqrt{b_1 - z_1}, \sqrt{z_2 - a_2}, \sqrt{b_2 - z_2})$ ***ist innerhalb zweier Horizontalstreifen*** $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ ***der Ebenen der complexen Variabeln*** t_1, t_2 ***(vgl. Fig. 7) eine eindeutige und endliche analytische Function*** $G(t_1, t_2)$ ***der Argumente*** t_1, t_2 ***mit den beiden Periodenpaaren*** $(2\varepsilon_1\omega_{11}, 2\varepsilon_1\omega_{21})$ ***und*** $(2\varepsilon_2\omega_{12}, 2\varepsilon_2\omega_{22})$. ***Die beiden Horizontalstreifen*** $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ ***sind durch die Ungleichungen:***

$$-\infty < r_\alpha < +\infty, \quad -s_\alpha^0 < s_\alpha < +s_\alpha^0$$

bestimmt, wo $\alpha = 1, 2$ ***und*** s_1^0, s_2^0 ***zwei hinreichend kleine, aber von*** 0 ***verschiedene positive Grössen bedeuten.***

§ 8.

Darstellung der Function $G(t_1, t_2)$ im complexen Gebiete.

Die Trennung der reellen und imaginären Theile der Substitutionen (17.) giebt die Gleichungen:

$$r_1 = \frac{1}{\pi}(\varepsilon_1\omega_{11}\varrho_1 + \varepsilon_2\omega_{12}\varrho_2), \quad s_1 = \frac{1}{\pi}(\varepsilon_1\omega_{11}\sigma_1 + \varepsilon_2\omega_{12}\sigma_2),$$

$$r_2 = \frac{1}{\pi}(\varepsilon_1\omega_{21}\varrho_1 + \varepsilon_2\omega_{22}\varrho_2), \quad s_2 = \frac{1}{\pi}(\varepsilon_1\omega_{21}\sigma_1 + \varepsilon_2\omega_{22}\sigma_2).$$

Deutet man diese durch die Abbildung einer Ebene r_1, r_2 auf eine Ebene ϱ_1, ϱ_2, respective einer Ebene s_1, s_2 auf eine Ebene σ_1, σ_2, während r_1, r_2 unbeschränkt reell veränderlich, s_1, s_2 aber an die Ungleichungen $-s_\alpha^0 < s_\alpha < s_\alpha^0$ gebunden sind, so wird die ganze $r_1 r_2$-Ebene auf die ganze $\varrho_1\varrho_2$-Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet erscheinen, das Rechteck der $s_1 s_2$-Ebene aber mit den vier Ecken $\pm s_1^0$, $\pm s_2^0$ (vgl. Fig. 8) auf ein Parallelogramm der $\sigma_1\sigma_2$-Ebene (vgl. Fig. 9) mit dem Coordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt. Das letztere hat, da ω von 0 verschieden ist, einen niemals verschwindenden Flächeninhalt; man kann ihm daher stets ein Rechteck, etwa mit den vier Ecken $\pm\sigma_1^0$, $\pm\sigma_2^0$ einbeschreiben, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind. Allen Werthepaaren σ_1, σ_2, welche danach den Bedingungen $-\sigma_\alpha^0 < \sigma_\alpha < +\sigma_\alpha^0$ mit $\alpha = 1, 2$ genügen, entsprechen dann Werthepaare s_1, s_2, für welche $-s_\alpha^0 < s_\alpha < +s_\alpha^0$ ist. Beschränkt man daher die complexen Variabeln τ_1, τ_2 auf die Horizontalstreifen T_β: $-\infty < \varrho_\beta < +\infty$, $-\sigma_\beta^0 < \sigma_\beta < +\sigma_\beta^0$ ihrer bezüglichen Ebenen (vgl. Fig. 10), so werden allen Werthepaaren τ_1, τ_2 innerhalb der Streifen T_1, T_2 Werthepaare t_1, t_2 innerhalb der Streifen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ (vgl. Fig. 7) entsprechen.

Die Function $E(z_1, z_2, \sqrt{z_1 - a_1}, \sqrt{b_1 - z_1}, \sqrt{z_2 - a_2}, \sqrt{b_2 - z_2})$ ***ist daher innerhalb der beiden Horizontalstreifen*** T_1, T_2 ***der Ebenen der complexen Variabeln*** τ_1, τ_2 ***eine eindeutige und endliche analytische Function*** $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ ***der Argumente*** τ_1, τ_2 ***und in Bezug auf jede derselben periodisch mit der Periode*** 2π.

Nach dem auf zwei complexe Variable ausgedehnten *Laurent*schen Theorem *) ist daher die Function durch die zweifach unendliche trigonometrische Reihe (19.) darstellbar, welche jetzt als Potenzreihe mit den Elementen $e^{\tau_1 i}$, $e^{\tau_2 i}$ in dem Umfange der beiden Horizontalstreifen T_1 und T_2 unbedingt und gleichmässig convergirt. Die Integrale für die Coefficienten:

$$A_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma(\tau_1, \tau_2) \cos n_1 \tau_1 \cos n_2 \tau_2 \, d\tau_1 \, d\tau_2$$

u. s. w. können auf reellen Wegen der Ebenen τ_1, τ_2 berechnet und, gleich den unter (20.) angegebenen Coefficienten, mit denen sie identisch sind, durch Einführung der Variabeln w_1, w_2 als Integrationsvariable in die dortige zweite Form transformirt werden.

Geht man jetzt wieder auf die Variabeln t_1, t_2 zurück, so erkennt

*) Welches durch analoge Betrachtungen, wie die bei ***Briot et Bouquet,*** a. a. O. S. 163 ff., angestellten, bewiesen werden kann. Vgl. auch ***Weierstrass,*** Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin 1886, S. 160.

man durch Umkehrung des in Fig. 8 und Fig. 9 erläuterten Verfahrens, dass man auch in den Ebenen t_1, t_2 wiederum gewisse Horizontalstreifen construiren kann von derselben Art wie die Streifen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, nur im Allgemeinen schmäler, dergestalt, dass allen Werthen t_1, t_2 innerhalb derselben Werthe τ_1, τ_2 innerhalb der Streifen T_1, T_2 entsprechen.

Damit aber ist die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe (19.) ***für alle complexen Werthe t_1, t_2 innerhalb zweier hinreichend schmaler Horizontalstreifen der Ebenen der complexen Argumente t_1, t_2 bewiesen, welche die reellen Axen beider Ebenen vollständig umschliessen.***

Setzt man schliesslich $t_1 = 0$, $t_2 = t$, ***so stellt die Reihe*** (19.) ***die bedingt periodische Function $g(t)$*** (vgl. § 4) ***dar und ist innerhalb eines Horizontalstreifens der Ebene des complexen Argumentes t von hinreichend kleiner, aber nicht verschwindender Breite, der die ganze reelle Axe einschliesst,*** (vgl. Fig. 2) ***unbedingt und gleichmässig convergent.***

In speciellen Fällen kann die zweifach unendliche trigonometrische Reihe (19.) auch in eine einfach unendliche, gewöhnliche oder aus gewöhnlichen trigonometrischen Reihen zusammengesetzte Reihe übergehen (vgl. § 11).

Kapitel II.

Anwendungen der bedingt periodischen Functionen in der Mechanik.

§ 9.

Die Centralbewegungen mit Kräftefunction.

Bedeuten x, y gewöhnliche und r, ϑ Polarcoordinaten der Ebene, sodass $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, so lauten bekanntlich *) die Integralgleichungen der Bewegung eines Punktes von der Masse 1 unter Einfluss einer von r eindeutig abhängenden Kräftefunction $U(r)$ in ihrer gebräuchlichen Form:

$$(1.)\qquad \vartheta = \int_{r_0}^{r} \frac{k\,dr}{r\sqrt{V(r)}}, \quad t = \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{V(r)}}, \quad V(r) = 2(U(r)+h)r^2 - k^2.$$

Dabei ist $r = r_0$, $\vartheta = 0$ als Anfangsort des bewegten Punktes zur Zeit $t = 0$ gedacht und bedeuten h und k Integrationsconstanten. Mit $\sin\vartheta = \sqrt{v}$ kann man diesen Gleichungen die folgende Gestalt geben:

---

*) Vgl. ***Schell,*** Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Leipzig 1880, Bd. I, S. 376.

$$(2.) \qquad x = r\sqrt{1-v}, \quad y = r\sqrt{v},$$

$$(3.) \qquad \begin{cases} -\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{r_0}^r \frac{k\,dr}{r\sqrt{V(r)}} = 0, \\ \int_{r_0}^r \frac{r\,dr}{\sqrt{V(r)}} = t. \end{cases}$$

Nimmt man nun an, dass r_0 und r_1 zwei der Grösse nach aufeinanderfolgende Nullpunkte der Function $V(r)$, beide von positivem reellen Werthe seien, und dass mit:

$$(4.) \qquad V(r) = (r-r_0)(r_1-r)v(r), \quad 0 < r_0 < r_1,$$

$v(r)$ innerhalb der Grenzen r_0 und r_1 nicht 0 und ∞ wird und immer positiv bleibt, so erfüllen die Gleichungen (3.) zwischen v, r und t im Allgemeinen die Bedingungen der §§ 3 und 5 und sind somit die Coordinaten x, y in der in den §§ 4 und 8 erörterten Weise darstellbar. Für die Grössen $\omega_{\alpha\beta}$ in § 3, 14 hat man:

$$(5.) \qquad \begin{cases} \omega_{11} = -\int_0^1 \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} = -\frac{\pi}{2}, & \omega_{12} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{k\,dr}{r\sqrt{V(r)}}, \\ \omega_{21} = 0, & \omega_{22} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{V(r)}} \end{cases}$$

und für ε_1 und ε_2 respective 2 und 1 (vgl. § 4). Unter der Bedingung:

$$(6.) \qquad m_1\pi - m_2\omega_{12} = 0$$

geht daher die Bewegung in eine periodische mit der Periode

$$T = 2m_2\omega_{22}$$

über.

Da die Stabilität der Bewegung im Allgemeinen von den Werthen der Integrationsconstanten h und k abhängt, so ist die über $V(r)$ gemachte Voraussetzung nicht nothwendig erfüllt. Indessen überzeugt man sich leicht*), dass *die bedingt periodische Bewegung als Normalform der stabilen Centralbewegung mit einer Kräftefunction zu betrachten ist.* Wenn überdies die Gleichung $V(r)$ mehrere Paare positiver aufeinanderfolgender Nullpunkte r_0, r_1 hat, für welche jedesmal die Bedingungen für $v(r)$ erfüllt sind, so

*) Vgl. die Note: „Das System der Wendeflächen bei gewissen Bewegungen eines Punktes in einer Ebene oder auf einer Rotationsfläche", Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat, Bd. 8, S. 399.

kann die betrachtete Bewegung mehrere bedingt periodische Zweige haben *). Ausserdem aber können *asymptotische* und *instabile* Zweige auftreten **).

Für die *Newton*sche Kräftefunction $U = \frac{\mu}{r}$ und für die Kräftefunction $U = -\frac{1}{2}\mu r^2$ tritt bei stabiler Bewegungsform der besondere Fall ein, dass beziehungsweise:

$$\omega_{12} = \pi, \quad \omega_{12} = \frac{\pi}{2}$$

wird, und daher die Bedingung (6.) stets erfüllt ist. Es sind daher x und y unbedingt periodische Functionen der Zeit, beide mit derselben Periode, sodass die Bahncurven geschlossene Curven werden. Wie *Bertrand* gezeigt hat ***), sind unter den hier betrachteten Centralbewegungen die beiden mit den Kräftefunctionen $U = \frac{\mu}{r}$, $U = -\frac{1}{2}\mu r^2$ die einzigen mit unbedingt geschlossenen Bahnen.

§ 10.

Bewegungen auf einer Rotationsfläche unter Einfluss einer Kräftefunction.

Ein materieller Punkt m von der Masse 1 bewege sich auf der Rotationsfläche:

$$(1.) \qquad \sqrt{x^2+y^2} = f(z)$$

unter Einfluss der von z und $r = \sqrt{x^2+y^2}$ eindeutig abhängenden Kräftefunction $U(r, z)$. Die Punkte der Rotationsfläche können mit einem Parameter v in der Form:

$$(2.) \qquad x = f(z)\sqrt{1-v}, \quad y = f(z)\sqrt{v}, \quad z = z$$

ausgedrückt werden, und die Integralgleichungen der Bewegung des betrachteten Punktes m lauten:

$$(3.) \quad \begin{cases} -\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{z_0}^z \frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}.dz}{f(z)\sqrt{R(z)}} = 0, \\ \int_{z_0}^z \frac{f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}.dz}{\sqrt{R(z)}} = t, \\ R(z) = 2\{U(f(z), z)+h\}f^2(z)-k^2, \end{cases}$$

*) Vgl. die Note: Ueber verzweigte Bewegungen, ebd., S. 336.

**) Vgl. *Legoux,* Sur les trajectoires décrites sous l'influence d'une force centrale, Nouvelles annales de mathématiques, 2ième série, t. 19, 1880. *Korteweg,* Sur les trajectoires décrites sous l'influence d'une force centrale, Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, t. 19, 1884; Sur la stabilité des trajectoires planes périodiques, ebd. t. 21, 1887.

***) Vgl. *Bertrand,* Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. 77, S. 849. *Darboux,* Note XIV zu *Despeyrous,* Cours de mécanique, t. II, Paris 1886.

wo $z = z_0$, $v = 0$ der Anfangsort des bewegten Punktes zur Zeit $t = 0$, h und k aber Integrationsconstanten sind. Ich habe bei einer anderen Gelegenheit *) ausführlich dargethan, dass auch *die Normalform der stabilen Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche unter Einfluss einer Kräftefunction von der Form $U(r, z)$ die bedingt periodische Bewegung ist.* Für diese Normalform werden also die Coordinaten x, y, z als Functionen der Zeit durch die trigonometrischen Reihen der §§ 4 und 8 dargestellt.

§ 11.

Reduction der zweifach unendlichen trigonometrischen Reihen auf einfach unendliche in den § 9 und § 10 aufgeführten Beispielen.

Die Integralgleichungen § 9 (3.) und § 10 (3.) zeigen im Vergleiche zu den allgemeinen Integralgleichungen in § 2 (7.) die Besonderheit, dass in der zweiten Gleichung das eine Integral fehlt. Dieser Umstand hat zur Folge, dass die zweifach unendlichen trigonometrischen Reihen der allgemeinen Theorie sich in den genannten besonderen Fällen auf einfach unendliche Reihen reduciren, ohne dass aber der Charakter der bedingten Periodicität dabei verloren geht. Dies soll an dem Beispiel des § 10 erläutert werden. Es wird zu dem Ende:

$$R(z) = 2\{U(f(z),\ z)+h\}f^2(z)-k^2 = (z-z_0)(z_1-z)r(z)$$

angenommen, wo $r(z)$ zwischen z_0 und $z_1 (> z_0)$ nicht mehr verschwinden soll. Um alsdann die allgemeine Theorie der §§ 2 und 4 anzuwenden, hat man zu setzen (§ 2 (7.); § 1 (5.)):

$$z_1 = v, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad f_{11} = f_{21} = 1, \quad g_{11} = -\tfrac{1}{2}, \quad g_{12} = \frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}}{f(z)},$$

$$z_2 = z, \quad a_2 = z_0, \quad b_2 = z_1, \quad f_{12} = f_{22} = r(z), \quad g_{21} = 0, \quad g_{22} = f(z)\sqrt{1+f'^2(z)},$$

$$E(z_1,\ z_2,\ \sqrt{z_1-a_1},\ \sqrt{b_1-z_1}) = E(v,\ z,\ \sqrt{v},\ \sqrt{1-v})$$

der Reihe nach

$$= f(z)\sqrt{1-v},\quad f(z)\sqrt{v},\quad z.$$

Für die Constanten $\omega_{\alpha\beta}$ ergiebt sich hiernächst (§ 3 (14.)):

$$\omega_{11} = -\frac{\pi}{2}, \quad \omega_{12} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}.dz}{f(z)\sqrt{R(z)}},$$

$$\omega_{21} = 0, \qquad \omega_{22} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}.dz}{\sqrt{R(z)}},$$

$$\omega = \omega_{11}\omega_{22}-\omega_{21}\omega_{12} = -\frac{\pi}{2}\omega_{22}.$$

*) Vgl. Acta mathematica, Bd. 11, S. 303.

Mittelst der Substitutionen (§ 1 (4.)):

$$v = \tfrac{1}{2}(1-\cos w_1) = \sin^2\frac{w_1}{2}, \quad z = \frac{z_0+z_1}{2} + \frac{z_0-z_1}{2}\cos w_2,$$

deren letztere durch eckige Klammer angedeutet werde, erhält man (§ 2 (10.)):

$$h_{11}(w_1) = -\tfrac{1}{2}, \quad h_{12}(w_2) = \Big[\frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}}{f(z)\sqrt{r(z)}}\Big],$$

$$h_{21}(w_1) = 0, \qquad h_{22}(w_2) = \Big[\frac{f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}}{\sqrt{r(z)}}\Big]$$

und (§ 3 (12.)):

$$h(w_1, w_2) = -\tfrac{1}{2}\Big[\frac{f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}}{\sqrt{r(z)}}\Big] = -\tfrac{1}{2}h_{22}(w_2).$$

Die Integralsummen ψ_1 und ψ_2 nehmen die Gestalt an (§ 2 (9.)):

$$\psi_1(w_1, w_2) = -\int_0^{w_1}\tfrac{1}{2}dw_1 + \int_0^{w_2} h_{12}(w_2)dw_2 = -\frac{w_1}{2} + \psi_{12}(w_2),$$

$$\psi_2(w_1, w_2) = \int_0^{w_2} h_{22}(w_2)dw_2 = \psi_{22}(w_2),$$

wo ψ_{12} und ψ_{22} Functionen von w_2 allein sind. Hiernach erhalten die Argumente der sinus und cosinus in den Coefficientenintegralen (§ 4 (20.)) die Form:

$$\frac{\pi}{\omega}\Psi_1(w_1, w_2) = -\frac{2}{\omega_{22}}\Big\{\omega_{22}\Big(-\frac{w_1}{2} + \psi_{12}(w_2)\Big) - \omega_{12}\psi_{22}(w_2)\Big\}$$

$$= w_1 - 2\,\frac{\omega_{22}\psi_{12}(w_2) - \omega_{12}\psi_{22}(w_2)}{\omega_{22}},$$

$$\frac{\pi}{\omega}\Psi_2(w_1, w_2) = \frac{\pi}{\omega_{22}}\psi_{22}(w_2).$$

Mit den Abkürzungen:

$$\frac{\omega_{22}\psi_{12}(w_2) - \omega_{12}\psi_{22}(w_2)}{\omega_{22}} = \varphi_1(w_2), \quad \frac{\pi\psi_{22}(w_2)}{\omega_{22}} = \varphi_2(w_2)$$

wird daher:

$$\frac{\pi}{\varepsilon_1\omega}\Psi_1(w_1, w_2) = \frac{w_1}{\varepsilon_1} - \frac{2\varphi_1(w_2)}{\varepsilon_1}, \quad \frac{\pi}{\varepsilon_2\omega}\Psi_2(w_1, w_2) = \frac{\varphi_2(w_2)}{\varepsilon_2}.$$

Im vorliegenden Falle ist nun für die drei zu bestimmenden Functionen E beziehungsweise:

$$\varepsilon_1 = 2, \ \varepsilon_2 = 1; \quad \varepsilon_1 = 2, \ \varepsilon_2 = 1; \quad \varepsilon_1 = 1, \ \varepsilon_2 = 1;$$

und ferner mit der Abkürzung:

$$[f(z)] = \varphi(w_2)$$

beziehungsweise (§ 4, zu (20.)):

$$\text{(I.)}\quad H(w_1, w_2) = \varphi(w_2).\cos\frac{w_1}{2}; \qquad \text{(II.)}\quad H(w_1, w_2) = \varphi(w_2).\sin\frac{w_1}{2};$$

$$\text{(III.)}\quad H(w_1, w_2) = \frac{z_0+z_1}{2} + \frac{z_0-z_1}{2}\cos w_2 = z(w_2).$$

Hiermit ergiebt sich in den drei Fällen für den Coefficienten $A_{n_1n_2}$ bezüglich (§ 4 (20.)) die Formel:

$$\text{(I.)}\quad A_{n_1n_2} = -\frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(w_2)\tfrac{1}{2}h_{22}(w_2)\cos\frac{w_1}{2}\cos\Big[n_1\Big(\frac{w_1}{2}-\varphi_1(w_2)\Big)\Big] \times\cos[n_2\varphi_2(w_2)]\,dw_1\,dw_2,$$

$$\text{(II.)}\quad A_{n_1n_2} = -\frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(w_2)\tfrac{1}{2}h_{22}(w_2)\sin\frac{w_1}{2}\cos\Big[n_1\Big(\frac{w_1}{2}-\varphi_1(w_2)\Big)\Big] \times\cos[n_2\varphi_2(w_2)]\,dw_1\,dw_2,$$

$$\text{(III.)}\quad A_{n_1n_2} = -\frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}z(w_2)\tfrac{1}{2}h_{22}(w_2)\cos[n_1(w_1-2\varphi_1(w_2))] \times\cos[n_2\varphi_2(w_2)]\,dw_1\,dw_2,$$

und ergeben sich analoge Formeln für $B_{n_1n_2}$, $C_{n_1n_2}$, $D_{n_1n_2}$. In allen Fällen lassen sich aber die Integrationen nach w_1 unmittelbar ausführen. Man findet nämlich:

$$\int_0^{4\pi}\tfrac{1}{2}\cos\frac{w_1}{2}\cos\Big[n_1\Big(\frac{w_1}{2}-\varphi_1(w_2)\Big)\Big]dw_1 = \int_0^{2\pi}\cos w_1.\cos[n_1(w_1-\varphi_1(w_2))]\,dw_1$$

$$= \cos[n_1\varphi_1(w_2)]\int_0^{2\pi}\cos w_1.\cos n_1w_1.dw_1 + \sin[n_1\varphi_1(w_2)]\int_0^{2\pi}\cos w_1.\sin n_1w_1.dw_1$$

$$= \pi\cos\varphi_1(w_2) \quad \text{für} \quad n_1 = 1; \quad = 0 \quad \text{für} \quad n_1 \neq 1.$$

$$\int_0^{4\pi}\tfrac{1}{2}\sin\frac{w_1}{2}\cos\Big[n_1\Big(\frac{w_1}{2}-\varphi_1(w_2)\Big)\Big]dw_1 = \int_0^{2\pi}\sin w_1.\cos[n_1(w_1-\varphi_1(w_2))]\,dw_1$$

$$= \cos[n_1\varphi_1(w_2)]\int_0^{2\pi}\sin w_1.\cos n_1w_1.dw_1 + \sin[n_1\varphi_1(w_2)]\int_0^{2\pi}\sin w_1.\sin n_1w_1.dw_1$$

$$= \pi\sin\varphi_1(w_2) \quad \text{für} \quad n_1 = 1; \quad = 0 \quad \text{für} \quad n_1 \neq 1.$$

$$\int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}\cos\Big[n_1\Big(\frac{w_1}{2}-2\varphi_1(w_2)\Big)\Big]dw_1 = \pi \quad \text{für} \quad n_1 = 0; \quad = 0 \quad \text{für} \quad n_1 \neq 0.$$

Nach Ausführung der Integrationen nach w_1 auch in den Formeln für $B_{n_1n_2}$, $C_{n_1n_2}$, $D_{n_1n_2}$ bleiben daher in den drei Fällen die folgenden Werthe der Coefficienten zurück:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} A_{1n_2} = -\dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\cos\varphi_1(w_2)\cos n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ B_{1n_2} = \dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\sin\varphi_1(w_2)\cos n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ C_{1n_2} = -\dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\cos\varphi_1(w_2)\sin n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ D_{1n_2} = \dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\sin\varphi_1(w_2)\sin n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \end{cases}$$

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} A_{1n_2} = -\dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\sin\varphi_1(w_2)\cos n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ B_{1n_2} = -\dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\cos\varphi_1(w_2)\cos n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ C_{1n_2} = -\dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\sin\varphi_1(w_2)\sin n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ D_{1n_2} = -\dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\cos\varphi_1(w_2)\sin n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \end{cases}$$

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} A_{0n_2} = -\dfrac{\pi}{\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} z(w_2)h_{22}(w_2)\cos n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ C_{0n_2} = -\dfrac{\pi}{\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} z(w_2)h_{22}(w_2)\sin n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2. \end{cases}$$

Alle in diesen Formeln nicht aufgeführten Coefficienten haben den Werth 0; aber auch die angegebenen Coefficienten lassen sich noch reduciren. Man schliesst nämlich aus:

$$h_{a2}(2\pi - w_2) = h_{a2}(w_2) \quad \text{und} \quad \psi_{a2}(2\pi) = 2\omega_{a2}$$

zuerst, dass

$$\psi_{12}(2\pi - w_2) = 2\omega_{12} - \psi_{12}(w_2), \quad \psi_{22}(2\pi - w_2) = 2\omega_{22} - \psi_{22}(w_2)$$

und hierauf aus den Definitionsgleichungen von φ_1 und φ_2:

$$\varphi_1(2\pi - w_2) = -\varphi_1(w_2), \quad \varphi_2(2\pi - w_2) = 2\pi - \varphi_2(w_2);$$

daneben ist:

$$\varphi(2\pi - w_2) = \varphi(w_2), \quad h_{22}(2\pi - w_2) = h_{22}(w_2).$$

Da nun, wenn allgemein $F(w_2)$ die Function unter den Integralen (I.), (II.), (III.) bezeichnet:

$$\int_0^{2\pi} F(w_2)\,dw_2 = \int_0^{\pi} \{F(w_2) + F(2\pi - w_2)\}\,dw_2,$$

so stellen sich die nicht verschwindenden Coefficienten $A_{n_1 n_2}$ u. s. w. also dar:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} A_{1n_2} = \dfrac{2}{\omega_{22}}\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\cos\varphi_1(w_2)\cos n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ D_{1n_2} = -\dfrac{2}{\omega_{22}}\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\sin\varphi_1(w_2)\sin n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \end{cases}$$

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} B_{1n_2} = \dfrac{2}{\omega_{22}}\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\cos\varphi_1(w_2)\cos n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \\ C_{1n_2} = \dfrac{2}{\omega_{22}}\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(w_2)h_{22}(w_2)\sin\varphi_1(w_2)\sin n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2, \end{cases}$$

$$\text{(III.)}\quad A_{0n_2} = \frac{4}{\omega_{22}}\int_0^{\pi} z(w_2)h_{22}(w_2)\cos n_2\varphi_2(w_2)\,dw_2.$$

Die trigonometrische Reihe (19.) nimmt nun zuerst mit $t_1 = 0$ und $t_2 = t$ und:

$$\tau_1 = -\frac{\pi\omega_{12}t}{\varepsilon_1\omega} = \frac{2\omega_{12}t}{\varepsilon_1\omega_{22}}, \quad \tau_2 = \frac{\pi\omega_{11}t}{\varepsilon_2\omega} = \frac{\pi t}{\omega_{22}}$$

die Form an:

$$\begin{aligned} g(t) = {} & \tfrac{1}{4}A_{00} + \tfrac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}_{n_1}\left(A_{n_10}\cos\frac{2n_1\omega_{12}t}{\varepsilon_1\omega_{22}} + B_{n_10}\sin\frac{2n_1\omega_{12}t}{\varepsilon_1\omega_{22}}\right) \\ & + \tfrac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}_{n_2}\left(A_{0n_2}\cos\frac{n_2\pi t}{\omega_{22}} + C_{0n_2}\sin\frac{n_2\pi t}{\omega_{22}}\right) + \sum_1^{\infty}{}_{n_1}\sum_1^{\infty}{}_{n_2}\left(A_{n_1n_2}\cos\frac{2n_1\omega_{12}t}{\varepsilon_1\omega_{22}}\cos\frac{n_2\pi t}{\omega_{22}}\right. \\ & \left. + B_{n_1n_2}\sin\frac{2n_1\omega_{12}t}{\varepsilon_1\omega_{22}}\cos\frac{n_2\pi t}{\omega_{22}} + C_{n_1n_2}\cos\frac{2n_1\omega_{12}t}{\varepsilon_1\omega_{22}}\sin\frac{n_2\pi t}{\omega_{22}} + D_{n_1n_2}\sin\frac{2n_1\omega_{12}t}{\varepsilon_1\omega_{22}}\sin\frac{n_2\pi t}{\omega_{22}}\right). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die gefundenen Werthe der Coefficienten und die Werthe von ε_1 wird somit:

$$\begin{aligned} x &= \cos\frac{\omega_{12}t}{\omega_{22}}\left\{\tfrac{1}{2}A_{10} + \sum_1^{\infty}{}_{n_2}A_{1n_2}\cos n_2\frac{\pi t}{\omega_{22}}\right\} + \sin\frac{\omega_{12}t}{\omega_{22}}\cdot\sum_1^{\infty}{}_{n_2}D_{1n_2}\sin n_2\frac{\pi t}{\omega_{22}}, \\ y &= \sin\frac{\omega_{12}t}{\omega_{22}}\left\{\tfrac{1}{2}B_{10} + \sum_1^{\infty}{}_{n_2}B_{1n_2}\cos n_2\frac{\pi t}{\omega_{22}}\right\} + \cos\frac{\omega_{12}t}{\omega_{22}}\cdot\sum_1^{\infty}{}_{n_2}C_{1n_2}\sin n_2\frac{\pi t}{\omega_{22}}, \\ z &= \tfrac{1}{4}A_{00} + \tfrac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}_{n_2}A_{0n_2}\cos n_2\frac{\pi t}{\omega_{22}}. \end{aligned}$$

In etwas veränderter Bezeichnungsweise hat man also für die Coordinaten des bewegten Punktes die Formeln:

$$\begin{cases} x = \cos\dfrac{\omega_{12}t}{\omega_{22}}\left\{A_0 + 2\displaystyle\sum_1^{\infty}{}_n A_n\cos n\frac{\pi t}{\omega_{22}}\right\} - \sin\dfrac{\omega_{12}t}{\omega_{22}}\cdot 2\displaystyle\sum_1^{\infty}{}_n B_n\sin n\frac{\pi t}{\omega_{22}}, \\ y = \sin\dfrac{\omega_{12}t}{\omega_{22}}\left\{A_0 + 2\displaystyle\sum_1^{\infty}{}_n A_n\cos n\frac{\pi t}{\omega_{22}}\right\} + \cos\dfrac{\omega_{12}t}{\omega_{22}}\cdot 2\displaystyle\sum_1^{\infty}{}_n B_n\sin n\frac{\pi t}{\omega_{22}}, \\ z = C_0 + 2\displaystyle\sum_1^{\infty}{}_n C_n\cos n\frac{\pi t}{\omega_{22}}, \end{cases}$$

wo die Coefficienten die Werthe haben:

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{1}{\omega_{22}} \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(w_2) h_{22}(w_2) \cos\varphi_1(w_2) \cos n_2\varphi_2(w_2)\, dw_2, \\ B_n = \dfrac{1}{\omega_{22}} \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(w_2) h_{22}(w_2) \sin\varphi_1(w_2) \sin n_2\varphi_2(w_2)\, dw_2, \\ C_n = \dfrac{1}{\omega_{22}} \displaystyle\int_0^{\pi} z(w_2) h_{22}(w_2) \cos n_2\varphi_2(w_2)\, dw_2. \end{cases}$$

Die Coordinate z ist unbedingt periodisch mit der Periode $2\omega_{22}$, während x und y erst unter der Bedingung $m_2\omega_{12} = m_1\pi$ die Periode $2m_2\omega_{22}$ erhalten. Die Entwicklung von z ergiebt sich direct auch aus der Abhandlung von Herrn *Weierstrass:* Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen *).

Die hier für die Bewegungen des § 10 entwickelte Reduction der zweifach unendlichen trigonometrischen Reihen auf einfach unendliche bedingt periodische Reihen tritt ebenso auch für die Centralbewegungen des § 9 ein. Dagegen findet sie für die in § 12 folgenden Beispiele im Allgemeinen nicht mehr statt.

§ 12.

Die *Jacobi-Liouville*schen Bewegungen auf einer Fläche.

Von *Liouville* ist folgender Satz bewiesen worden **):

In krummlinigen Coordinaten u, v auf einer Fläche habe das Quadrat des Linienelementes die Form:

$$(1.) \qquad ds^2 = E(u, v)\{m(u)du^2 + n(v)dv^2\},$$

und es bewege sich auf der Fläche ein Punkt unter Einfluss der Kräftefunction $S(u, v)$. Wenn alsdann SE und E die Formen haben:

$$(2.) \qquad E = \tfrac{1}{2}\varphi_0(u) - \tfrac{1}{2}\psi_0(v), \quad ES = \tfrac{1}{2}\varphi_1(u) - \tfrac{1}{2}\psi_1(v),$$

so sind die Integralgleichungen der Bewegung mit zwei Integrationsconstanten h und k:

$$(3.) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\sqrt{m(u)}.du}{2\sqrt{\varphi_1(u) + h\varphi_0(u) - k}} - \int \frac{\sqrt{n(v)}.dv}{2\sqrt{k - \psi_1(v) - h\psi_0(v)}} = 0, \\ \displaystyle\int \frac{\varphi_0(u)\sqrt{m(u)}.du}{2\sqrt{\varphi_1(u) + h\varphi_0(u) - k}} + \int \frac{\psi_0(v)\sqrt{n(v)}.dv}{2\sqrt{k - \psi_1(v) - h\psi_0(v)}} = t. \end{cases}$$

*) A. a. O. S. 101; es ist dort nur in der Formel für B_n durch einen Druckfehler der Factor $\dfrac{1}{\omega}$ ausgefallen.

**) Vgl. *Liouville,* Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer, Journal de mathématiques, I. série, t. XI (1846); t. XII (1847).

Auch hier sind unter entsprechenden Voraussetzungen die Bedingungen der Theorie der vorstehenden Paragraphen erfüllt, und erhält man die gewöhnlichen Raumcoordinaten x, y, z als bedingt periodische Functionen der Zeit durch zweifach unendliche trigonometrische Reihen dargestellt.

Die Gleichungen (3.) sind ein specieller Fall der allgemeinen von *Jacobi* in der Form:

$$\int\left\{\frac{\partial p_1}{\partial a}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a}dq_2\right\} = b,$$

$$\int\left\{\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial \alpha}dq_2\right\} = \tau-t$$

angegebenen *) Integralgleichungen, an welche *Jacobi* ähnliche Folgerungen geknüpft hat **), wie die von *Liouville* erhaltenen.

Hierher gehört die Trägheitsbewegung eines Punktes auf dem Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{\alpha-\lambda_0}+\frac{y^2}{\beta-\lambda_0}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda_0} = 1;$$

die Coordinaten x, y, z des Punktes drücken sich dabei durch die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν, wie folgt, aus:

$$x=\frac{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\alpha-\nu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}},\quad y=\frac{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}},\quad z=\frac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}},$$

wo:

$$-\infty<\lambda_0<\gamma<\mu<\mu_0<\beta<\nu<\alpha,$$

während zwischen μ, ν, t die Gleichungen bestehen:

$$\int_\gamma^\mu\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int_\beta^\nu\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = 0,$$

$$\int_\gamma^\mu\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int_\beta^\nu\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = ct,$$

in welchen mit $\varrho=\mu$, ν:

$$r(\varrho) = (\alpha-\varrho)(\beta-\varrho)(\gamma-\varrho)(\mu_0-\varrho)(\lambda_0-\varrho).$$

Ueberdies ist $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\gamma$, $\nu=\beta$ der Anfangsort, c die constante Geschwindigkeit des bewegten Punktes und μ_0 der Parameter der von der Bahncurve berührten Krümmungscurve. Nach der Theorie des Kapitels I

---

*) Vgl. *Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von *Clebsch*, S. 175, S. 514.

**) ebd. S. 219.

lassen sich die Coordinaten x, y, z des Punktes als Functionen der Zeit t durch die zweifach unendliche trigonometrische Reihe (19.) darstellen *).

Hierher gehören ferner: die Bewegung eines Punktes auf dem Ellipsoid unter Einfluss einer der Entfernung vom Centrum des Ellipsoides direct proportionalen Kraft, die Bewegung eines schweren Punktes auf einem Paraboloid **), die von *C. Neumann* mit Hilfe der ultraelliptischen Functionen behandelte Bewegung eines Punktes auf einer Kugelfläche ***) und andere.

§ 13.

Bewegungen eines starren Körpers.

Unter die Gruppe der bedingt periodischen Bewegungen zählen die Normalformen der bekanntesten und nach den mannigfaltigsten Richtungen untersuchten Bewegungen eines starren Körpers. Für einige derselben mag hier die Zurückführung auf die oben behandelte Form des Umkehrproblems der bedingt periodischen Functionen gezeigt werden.

1. *Die sphärische Trägheitsbewegung.* Bezeichnen A, B, C $(A<B<C)$ die Hauptträgheitsmomente und p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit nach den drei Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Drehungspunkt, so hat man die Differentialgleichungen:

$$A\frac{dp}{dt}-(B-C)qr = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt}-(C-A)rp = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt}-(A-B)pq = 0.$$

Man erhält hieraus zuerst mit Hilfe der beiden Integrale:

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2 = h^2,$$
$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2 = k^2,$$

wo h^2 und k^2 Integrationsconstanten bedeuten, die Beziehung zwischen der neuen Variabeln:

---

*) Die von *Weierstrass* in den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1861 gegebene Parameterdarstellung der Punkte der geodätischen Linie durch hyperelliptische Functionen giebt nicht unmittelbar die Abhängigkeit der Coordinaten von der Zeit t.

**) Vgl. *De Saint-Germain,* Mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde, Journal de mathématiques, III. Ser., Bd. 3, S. 401 (1877).

***) Vgl. *C. Neumann,* De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticarum classem revocatur, Journal für Mathematik, Bd. 56, S. 46.

$$p^2+q^2+r^2 = u$$

und der Zeit t in der Form *):

$$dt = \frac{du}{2\sqrt{(u-a)(b-u)(u-c)}},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$a = \frac{(B+C)h^2-k^2}{BC}, \quad b = \frac{(C+A)h^2-k^2}{CA}, \quad c = \frac{(A+B)h^2-k^2}{AB}.$$

Andererseits drücken sich p, q, r durch die neue Variable u, wie folgt, aus:

$$p = A\sqrt{u-a}, \quad q = B\sqrt{b-u}, \quad r = \Gamma\sqrt{u-c}$$

mit:

$$A^2 = \frac{BC}{(B-A)(C-A)}, \quad B^2 = \frac{-CA}{(C-B)(A-B)}, \quad \Gamma^2 = \frac{AB}{(A-C)(B-C)};$$

es wird der Kürze wegen nur der Fall $c < a < b$ ins Auge gefasst, in welchem sich u zwischen a und b bewegt.

Man bezeichne jetzt die drei Richtungscosinus jeder der Hauptträgheitsaxen ξ, η, ζ des Körpers gegen die Axen x, y, z des festen Coordinatensystems — beide Coordinatensysteme durch den Drehungspunkt gelegt — bezüglich mit a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 und wähle als z-Axe die Normale der invariabeln Ebene, sodass:

$$c_1 = \frac{Ap}{k}, \quad c_2 = \frac{Bq}{k}, \quad c_3 = \frac{Cr}{k}.$$

Man drücke ferner die neun Richtungscosinus durch die *Euler*schen Winkel φ, χ, ψ aus in der Weise:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\chi, & a_2 &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\chi,\\
b_1 &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\chi, & b_2 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\chi,\\
c_1 &= \sin\psi\sin\chi, & c_2 &= \cos\psi\sin\chi,\\
a_3 &= \sin\varphi\sin\chi, & b_3 &= -\cos\varphi\sin\chi, \quad c_3 = \cos\chi,
\end{aligned}$$

und leite zwischen φ und u die Differentialgleichung ab:

$$d\varphi = \frac{k}{C}\frac{D-u}{E-u}\frac{du}{2\sqrt{(u-a)(b-u)(u-c)}},$$

wo D und E durch die Gleichungen definirt werden:

$$\begin{aligned}
ABCD &= (C-A)(C-B)h^2 + ABCc,\\
ABC^2E &= (C-A)(C-B)h^2 + ABC^2c.
\end{aligned}$$

Setzt man endlich noch $v = \sin^2\varphi$, so erhält man zur Lösung des Rotationsproblems die folgenden Gleichungen:

*) Vgl. *Schell*, a. a. O. Bd. II, S. 434 ff.

$$-\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_a^u \frac{1}{2}\frac{k}{C}\frac{D-u}{E-u}\frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)(u-c)}} = 0,$$

$$\int_a^u \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)(u-c)}} = t,$$

$$a_1 = \frac{BB\sqrt{b-u}\sqrt{1-v}}{R(u)} - \frac{ACA\Gamma\sqrt{u-a}\sqrt{\overline{u-c}}\sqrt{v}}{kR(u)},$$

$$b_1 = \frac{BB\sqrt{b-u}\sqrt{v}}{R(u)} + \frac{ACA\Gamma\sqrt{u-a}\sqrt{\overline{u-c}}\sqrt{1-v}}{kR(u)},$$

$$c_1 = \frac{AA\sqrt{u-a}}{k},$$

$$a_2 = -\frac{AA\sqrt{u-a}\sqrt{1-v}}{R(u)} - \frac{BCB\Gamma\sqrt{b-u}\sqrt{\overline{u-c}}\sqrt{v}}{kR(u)},$$

$$b_2 = -\frac{AA\sqrt{u-a}\sqrt{v}}{R(u)} + \frac{BCB\Gamma\sqrt{b-u}\sqrt{\overline{u-c}}\sqrt{1-v}}{kR(u)},$$

$$c_2 = \frac{BB\sqrt{b-u}}{k},$$

$$a_3 = \frac{R(u)\sqrt{v}}{k}, \quad b_3 = \frac{R(u)\sqrt{1-v}}{k}, \quad c_3 = \frac{C\Gamma\sqrt{u-c}}{k},$$

$$R(u) = \sqrt{A^2A^2(u-a)+B^2B^2(b-u)}.$$

Die doppelt gestrichenen Wurzeln bedeuten die positiven Werthe der betreffenden, im Umfange der Variabilität von u niemals 0 oder ∞ werdenden Quadratwurzeln. Es sind also die neun Richtungscosinus innerhalb der Grenzen $0 < v < 1$, $a < u < b$ eindeutige und endliche analytische Functionen von u, v, $\sqrt{u-a}$, $\sqrt{b-u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{1-v}$. Ferner wird $\frac{D-u}{E-u}$ niemals 0 oder ∞ und bleibt immer positiv. Sieht man also von den besonderen Fällen ab, wo eine der Hauptträgheitsaxen des Körpers in die invariable Linie fällt, *so sind die neun Richtungscosinus bedingt periodische Functionen der Zeit t,* welche der allgemeinen Theorie des Kapitels I unterliegen *), mit einer Reduction der zweifach unendlichen trigonometrischen Reihen wie in § 11.

Mit $A = B$ hat man *ein Beispiel für die Elementarform der bedingt periodischen Functionen* in § 1. Man erhält in diesem Falle als Bestandtheile der zu bestimmenden Ausdrücke:

---

*) Schon von Herrn *Kronecker* („Zur Theorie der elliptischen Functionen", Monatsberichte der Berliner Akademie 1881, S. 1165) ist darauf hingewiesen worden, dass die von *Jacobi* beim vorliegenden Problem gegebenen Formeln zweifach unendliche trigonometrische Reihen sind.

$$\sqrt{v} = \sin\frac{kt}{A}, \quad \sqrt{1-v} = \cos\frac{kt}{A}; \quad \sqrt{u} = \sin\frac{(A-C)r_0 t}{A}, \quad \sqrt{1-u} = \cos\frac{(A-C)r_0 t}{A}$$

und als Bedingung der Periodicität (§ 1, Ende):

$$m_1 - m_2\frac{k}{(A-C)r_0} = 0.$$

2. ***Die Bewegung eines Kreisels auf festem Stativ.*** Für die Bewegung eines schweren homogenen Rotationskörpers, der in einem Punkte der Rotationsaxe festgehalten wird, hat man, um die Coordinaten x, y, z eines in der Entfernung ζ vom Unterstützungspunkte befindlichen Punktes der Rotationsaxe als Functionen der Zeit zu bestimmen, die Relationen

$$x = \zeta\sqrt{1-u^2}\sqrt{v}, \quad y = -\zeta\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v}, \quad z = -\zeta u,$$

$$-\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{u_0}^u \frac{Cr_0}{\sqrt{2MAgh}} \frac{(u-u_0)\,du}{(1-u^2)\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)(u-u_2)}} = 0,$$

$$\int_{u_0}^u \sqrt{\frac{A}{2Mgh}} \frac{du}{\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)(u-u_2)}} = t.$$

Hier bedeuten A und C die Hauptträgheitsmomente, M die Masse des Körpers, g die Beschleunigung der Schwere, h die Entfernung des Unterstützungspunktes vom Schwerpunkt, r_0 die Winkelgeschwindigkeit um die Rotationsaxe, endlich u_0, u_1, u_2 Constanten, welche der Bedingung genügen:

$$u_2 < -1 < u_0 < u_1 < 1.$$

Es sind also x, y, z einfach bedingt periodische Functionen der Zeit t. Wollte man auch die ausserhalb der geometrischen Rotationsaxe des Kreisels gelegenen Punkte x, y, z desselben in Betracht ziehen, so würde man auf zweifach bedingt periodische Functionen *) geführt werden.

3. ***Die Bewegung eines Kreisels auf horizontaler Ebene*** **). Nimmt man die xy-Ebene eines festen Coordinatensystems als horizontale Ebene an, auf welcher die Spitze eines homogenen schweren Rotationskörpers sich bewegt, und setzt man voraus, dass der Schwerpunkt des Körpers zur Zeit $t = 0$ ohne translatorische Geschwindigkeit in der z-Axe sich befinde ***), so erhält man zur Darstellung der Bewegung eines Punktes x, y, z der geometrischen Rotationsaxe des Körpers die Formeln:

---

*) Vgl. Acta mathematica, Bd. 10, S. 197.

**) Vgl. *Poisson,* Traité de mécanique, 2. éd. t. II, S. 216.

***) Vgl. *Greenhill,* On the motion of a top, Quarterly Journal of Mathematics, vol. 15, S. 176.

$$x = \zeta\sqrt{1-u^2}\sqrt{v}, \quad y = -\zeta\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v}, \quad z = -(h+\zeta)u,$$

$$-\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{u_0}^u \frac{\sqrt{c}\sqrt{(1+a)-au^2}.(u-u_0)du}{(1-u^2)\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)(u-u_2)}} = 0,$$

$$\int_{u_0}^u \frac{\sqrt{(1+a)-au^2}.du}{\sqrt{b}\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)(u-u_2)}} = t,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$a = \frac{Mh^2}{A}, \quad b = \frac{2Mgh}{A}, \quad c = \frac{C^2r_0^2}{4AMgh}$$

und ζ, A, C, M, g, h, r_0 die vorige Bedeutung haben, auch wiederum $u_2 < -1 < u_0 < u_1 < 1$ ist. Es sind also auch bei dieser Kreiselbewegung *die Coordinaten eines Punktes der Kreiselaxe eindeutige bedingt periodische Functionen der Zeit, deren Reihenentwicklungen sich wie in § 11 vereinfachen.*

Den vorstehenden Beispielen bedingt periodischer Bewegungen eines Punktes oder starren Körpers würden sich noch weitere anschliessen lassen*), von deren Aufzählung an dieser Stelle Abstand genommen werden soll. Einige von den hierher gehörigen Bewegungsvorgängen führen bekanntlich auf elliptische **) und hyperelliptische Functionen, und müssen alsdann die hier gegebenen trigonometrischen Reihen mit den auf Grund der Theorie der genannten Functionen abgeleiteten trigonometrischen Entwicklungen derselben Art identisch sein ***). Dagegen ist die Anwendbarkeit der elliptischen und hyperelliptischen Functionen auf die genannten Bewegungsvorgänge von weit beschränkterem Umfange als die der allgemeineren bedingt periodischen Functionen. Zugleich wird mit der Einführung der letzteren der Versuch gemacht, *einen gemeinsamen analytischen Ausdruck für alle diejenigen Bewegungsformen herzustellen,* welche in ihren geometrisch und mechanisch bedeutsamen Eigenschaften übereinstimmen und an die Klasse der periodischen Bewegungen als nächst höhere Klasse stabiler Bewegungen sich anschliessen.

*) Vgl. z. B. noch *Hess,* Ueber das Problem der Rotation, Mathematische Annalen, Bd. 20. *Russell,* On the occurrence of higher transcendents in certain mechanical problems, Messenger of Mathematics, new series, vol. 7 (1877) und vol. 8 (1879); Note on the integration of the higher transcendents which occur in certain mechanical problems, ebd. Bd. 9 (1880).

**) Vgl. beispielsweise die Anwendung der *Weierstrass*schen Function $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ bei *Maggi,* Sull' integrazione delle equazioni differenziali del pendolo conico, R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Rendiconti, Ser. II, vol. 17, 1884.

***) Man vgl. die Convergenz der trigonometrischen Entwicklungen elliptischer Functionen *innerhalb eines Streifens* der Argumentenebene, *Königsberger,* Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, 1. Th., S. 409.

Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen stellt sich als Hauptaufgabe die Erkenntniss der Eigenschaften einer beliebigen Gattung, d. h. die Untersuchung desjenigen Zahlen- und Formenreiches, welches durch alle rationalen Functionen einer Wurzel einer vorgelegten algebraischen Gleichung bestimmt ist. Die ersten und einfachsten hier sich darbietenden Fragen betreffen die vollständige Darstellung aller *ganzen* algebraischen Grössen, d. h. derjenigen, welche durch eine irreductible ganzzahlige Gleichung definirt sind, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes gleich Eins ist, ferner die Bestimmung der Discriminante der Gattung, oder, was dasselbe ist, die Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers aller ihrer Gleichungsdiscriminanten, endlich die Zerlegung einer beliebigen rationalen Function in ihre innerhalb der Gattung unzerlegbaren Factoren. Alle diese Fragen sind in Herrn *Kummer*s bekannten Arbeiten für die Kreistheilungsgleichungen, hierauf von den Herren *Dedekind* und *Weber* für alle Gleichungen mit Zahlencoefficienten und für die algebraischen Functionen einer Variablen aufgestellt und gelöst worden, und sie sind in dem allgemeinsten Falle in den „Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen“ von Herrn *Kronecker* mit einer Vollständigkeit und Einheitlichkeit behandelt worden, welche die Hinzufügung von Wesentlichem ausschliesst.

Der nächste Schritt, welcher in dieser Theorie zu thun ist, betrifft die Frage nach der *Composition* zweier Gattungen $\mathfrak{G}_1$ und G_1, d. h. die genaue Untersuchung derjenigen Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$, welche alle algebraischen Grössen sowohl von $\mathfrak{G}_1$ als auch von G_1 enthält. Diese Frage scheint bisher noch nicht allgemein untersucht worden zu sein, obwohl sie für die Theorie und besonders auch für ihre Anwendungen etwa dieselbe Wichtig-

keit besitzt, wie für die elementare Zahlentheorie die Untersuchung der zusammengesetzten Zahlen. Aber wie sich hier die ganze Aufgabe lösen lässt, sobald die analogen Fragen für die Primzahlen untersucht sind, so führt die Benutzung der vorher erwähnten Hülfsmittel auch bei der Composition der Gattungen zur Lösung der allgemeinsten hier auftretenden Probleme.

In dieser Arbeit soll der Anfang dazu gemacht werden. In ihr wird zunächst aus den Fundamentalsystemen zweier beliebigen Gattungen $\mathfrak{G}_1$ und G_1 ein solches für die aus ihnen componirte Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ in dem Falle gebildet, dass die Ordnung der einen sich nicht reducirt, sobald die andere dem Rationalitätsbereiche adjungirt wird, in dem Falle also, dass die Ordnung der componirten Gattung gleich dem Producte der Ordnungszahlen der sie erzeugenden Gattungen ist. Damit ist dann die Möglichkeit gegeben, alle ganzen algebraischen Formen einer aus zwei anderen componirten Gattung darzustellen und zu untersuchen, sobald dieselbe Aufgabe für jene beiden Gattungen gelöst ist. Mit Hülfe dieses Resultates ist es dann möglich, die Discriminante der componirten Gattung a priori zu bestimmen, sobald man die entsprechenden Fragen für die beiden componirenden Gattungen gelöst hat.

In einer zweiten demnächst erscheinenden Arbeit wird die Zerlegung einer irreductiblen rationalen Function für die componirte Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ aus denjenigen für die beiden Gattungen $\mathfrak{G}_1$ und G_1 hergeleitet, und in einer dritten Abhandlung endlich sollen die hier behandelten Fragen in dem allgemeinsten Falle gelöst werden, dass sich die Ordnung der einen Gattung unter Adjunction der anderen erniedrigt.

I.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gattung $m$ter Ordnung; es soll zunächst untersucht werden, wie oft ein beliebiger Primdivisor P des natürlichen Rationalitätsbereiches $(\Re, \Re', \ldots)$ in ihrer Discriminante enthalten ist. Die Lösung dieser Aufgabe gestaltet sich dann besonders einfach, wenn man für die Darstellung der Zahlen von $\mathfrak{G}$ ein *Fundamentalsystem für den Modul P*, d. h. ein System von m so gewählten Formen:

$$(1.) \qquad \xi_{11}, \quad \xi_{12}, \quad \ldots \quad \xi_{1m}$$

zu Grunde legt, dass eine Congruenz:

$$(2.) \qquad u_1\xi_{11}+u_2\xi_{12}+\cdots+u_m\xi_{1m} \equiv 0 \pmod{P},$$

deren Coefficienten u_1, u_2, ... u_m rational und ganz sein sollen, nur dann bestehen kann, wenn alle Coefficienten den Divisor P enthalten. Da nämlich ein solches Fundamentalsystem in ein absolutes durch eine den Divisor P nicht enthaltende Substitution übergeht, so wird seine Discriminante

$$(3.) \qquad D^2 = |\xi_{hk}|^2 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots m)$$

diesen Modul ebenso oft als jene enthalten, und es kann daher diese der Untersuchung zu Grunde gelegt werden.

Zu einem solchen Fundamentalsysteme gelangt man nun leicht auf die folgende Weise: Man denke sich P innerhalb $\mathfrak{G}$ in seine Primdivisoren zerlegt, und zwar sei:

$$P \sim P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \ldots P_h^{\delta_h};$$

ferner mögen die Zahlen

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \ldots \quad \varkappa_h$$

die Ordnungszahlen der h nicht äquivalenten Divisoren $P_1, \ldots P_h$ bezeichnen, d. h. es sei:

$$N_{\mathfrak{G}} P_i \sim P^{\varkappa_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots h).$$

Es sei nun P_0 irgend einer dieser h verbundenen Divisoren, $\varkappa$ seine Ordnungszahl, δ sein Exponent, ferner seien die $\varkappa$ Formen:

$$\xi_{11}, \quad \xi_{12}, \quad \ldots \quad \xi_{1\varkappa}$$

in dem oben für P charakterisirten Sinne ein Fundamentalsystem für P_0, dann bilden die $\varkappa\delta$ Formen:

$$(4.) \qquad \frac{P}{P_0^{\delta-r}} \cdot \xi_{1s} \qquad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \ldots \delta-1 \\ s = 1, 2, \ldots \varkappa \end{pmatrix}$$

für den Divisor P_0^{δ} in demselben Sinne ein Fundamentalsystem, dessen Elemente einen jeden zu P_0 nicht äquivalenten Divisor ebenso oft als P enthalten. Denkt man sich also für eine jede der in P enthaltenen h Divisorenpotenzen $P_1^{\delta_1}, \ldots P_h^{\delta_h}$ ein eben solches Fundamentalsystem gebildet, so werden dessen $\varkappa_1\delta_1+\cdots+\varkappa_h\delta_h = m$ Elemente zusammen ein Fundamentalsystem für P bilden, und dieses ist es, welches der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt werden soll.

Bildet man jetzt die zu den $\varkappa\delta$ Formen (4.) conjugirten:

$$(5.) \qquad \frac{P}{P_{0,q}^{\delta-r}} \xi_{qs} \qquad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \ldots \delta-1 \\ s = 1, 2, \ldots \varkappa \\ q = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix},$$

wo für den Augenblick $P_{0,1}$ an Stelle von P_0 geschrieben ist und wo

$P_{01}, \ldots P_{0m}$ die m zu P_0 conjugirten Formen bedeuten, und betrachtet man zunächst nur diese $\varkappa\delta$ Verticalreihen der Determinante $|\xi_{hk}|$ in (3.), so erkennt man ohne Weiteres, dass die durch ein bestimmtes Indexsystem (r, s) charakterisirten conjugirten Formen, welche also in einer und derselben Colonne stehen, den Divisor:

$$(5^a.) \qquad \wp_r \sim \left(\frac{P}{P_{01}^{\delta-r}}, \ \ldots \ \frac{P}{P_{0m}^{\delta-r}}\right)$$

enthalten, denn dieser ist ja der grösste gemeinsame Theiler aller Coefficienten $\frac{P}{P_{0i}^{\delta-r}}$. Derselbe Theiler wird also auch nothwendig in der Quadratwurzel aus der Gattungsdiscriminante enthalten sein. Aus den $\varkappa\delta$ Verticalreihen der Matrix (5.) wird daher in derselben Weise das Divisorenproduct:

$$(6.) \qquad \pi \sim \prod_{s=1}^{\varkappa} \prod_{r=0}^{\delta-1} \wp_r = \prod_{r=0}^{\delta-1} \wp_r^{\varkappa} = \prod_{r=0}^{\delta-1} \left(\frac{P}{P_{01}^{\delta-r}}, \ \ldots \ \frac{P}{P_{0m}^{\delta-r}}\right)^{\varkappa}$$

herausgehoben werden können. Der Werth desselben lässt sich leicht mittels der allgemeinen Bemerkung bestimmen, dass aus der Aequivalenz:

$$M \sim (M_1, \ M_2, \ \ldots)$$

für ein jedes ganzzahlige t die andere:

$$M^t \sim (M_1^t, \ M_2^t, \ \ldots)$$

gefolgert werden kann, wie in einer späteren Arbeit eingehend dargelegt werden soll. Erhebt man also die Aequivalenz (6.) zur δten Potenz, so ergiebt sich hiernach:

$$\pi^\delta \sim \left[\prod_{r=0}^{\delta-1} \left(\frac{P}{P_{01}^{\delta-r}}, \ \ldots \ \frac{P}{P_{0m}^{\delta-r}}\right)^\delta\right]^{\varkappa} \sim \prod_{r=0}^{\delta-1} \left(\frac{P^\delta}{P_{01}^{\delta(\delta-r)}}, \ \ldots \ \frac{P^\delta}{P_{0m}^{\delta(\delta-r)}}\right)^{\varkappa}$$

oder, wenn man aus jedem Factor P^r herauszieht:

$$\pi^\delta \sim \prod_{r=0}^{\delta-1} P^{\varkappa r} . \prod_{r=0}^{\delta-1} \left(\left(\frac{P}{P_{01}^{\delta}}\right)^{\delta-r}, \ \ldots \left(\frac{P}{P_{0m}^{\delta}}\right)^{\delta-r}\right)^{\varkappa}.$$

Hier kann aber das ganze zweite Product fortgelassen werden, da alle seine Factoren zu jedem der zu P_{01} conjugirten Divisoren, also auch gegen ihre Norm, d. i. gegen P relativ prim, also äquivalent Eins sind, und man erhält die Aequivalenz:

$$\pi^\delta \sim \prod_{r=0}^{\delta-1} P^{\varkappa r} \sim P^{\varkappa \sum_0^{\delta-1} r} \sim P^{\frac{1}{2}\varkappa\delta(\delta-1)};$$

jener herausgehobene Divisor ist also:

$$\pi \sim P^{\frac{1}{2}\varkappa(\delta-1)}.$$

Es seien nun $\pi_1, \ldots \pi_h$ die Divisoren, welche sich auf diese Weise aus den zu $P_1, \ldots P_h$ gehörigen Matrizen der Determinante $|\xi_{hk}|$ herausheben. Dann wird die ganze aus der Discriminante, d. h. aus dem Quadrate jener Determinante herausgehobene Potenz von P

$$(7.) \qquad (\pi_1 \ldots \pi_h)^2 \sim P^{\sum \varkappa_i(\delta_i - 1)} = P^{m-m_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots h)$$

sein, wenn man die schon im Anfang erwähnte Gleichung:

$$\varkappa_1\delta_1 + \cdots + \varkappa_h\delta_h = m$$

berücksichtigt und zugleich

$$\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_h = m_1$$

setzt.

Man denke sich nun diejenige Gleichung gebildet, der die Form $u_1\xi_{11} + \cdots + u_m\xi_{1m}$ nebst ihren conjugirten für unbestimmte $u_1, \ldots u_m$ genügt, so lehrt eine einfache Determinantenumformung, dass ihre Discriminante durch die in (3.) angegebene Determinante D^2 theilbar ist, dass auch sie also den Divisor P mindestens $(m-m_1)$ Male enthalten muss. Andererseits kann man aber leicht nachweisen, dass jene Gleichungsdiscriminante den Divisor P auch nicht öfter enthält, und hieraus ergiebt sich einmal, dass die Discriminante jener Gleichung einen jeden Divisor genau ebenso oft enthält als die Discriminante der Gattung, oder ein neuer Beweis des wichtigen Satzes von der Aequivalenz der Gattungsdiscriminante und der Discriminante der Fundamentalgleichung, dann aber auch, und darauf ist hier Gewicht zu legen, dass die auf dem vorhin angegebenen Wege aus den Verticalreihen herausgehobene Potenz von P auch die höchste in D^2 enthaltene Potenz dieses Divisors ist*).

Dass das System der Formen (4.), modulo P betrachtet, ein Fundamentalsystem ist, kann jetzt auch leicht direct bewiesen werden, und zwar mit Hülfe des folgenden allgemeinen Satzes, von dem wir bald Gebrauch machen werden:

---

*) Eine Ausnahme tritt nur in dem ganz singulären Falle ein, dass der Divisor P eine ***Zahl*** ist und zugleich in einem der Exponenten $\delta_1, \ldots \delta_h$ als Theiler vorkommt; von diesem Fall soll daher bei der folgenden allgemeinen Untersuchung abgesehen und seine Behandlung in einer späteren Arbeit gegeben werden. Dieser ganz specielle Fall bietet grössere Schwierigkeiten dar, besitzt aber deshalb ein besonderes Interesse, weil hier zum ersten Male eine Beziehung zwischen arithmetischen und algebraischen Eigenschaften der Gattungen hervortritt.

Es sei $\eta_{11}, \ldots \eta_{1m}$ ein System unabhängiger ganzer Formen der Gattung $\mathfrak{G}$, deren Determinante

$$D = |\eta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m)$$

also nicht verschwindet. Es seien nun

$$P^{\varrho_1}, \quad P^{\varrho_2}, \quad \ldots \quad P^{\varrho_m}$$

die grössten gemeinsamen Theiler von P mit den sämmtlichen Elementen der einzelnen Verticalreihen von D. Sind dann die Exponenten ϱ_i, wie in dem vorher behandelten Falle, sämmtlich echte Brüche, und ist ferner

$$\varrho = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i$$

der Exponent der höchsten Potenz von P, welche überhaupt in D enthalten ist, so ist das System $\eta_{11}, \ldots \eta_{1m}$ ein Fundamentalsystem für die Gattung $\mathfrak{G}$ und den Modul P und soll ein ***normales Fundamentalsystem*** für diesen Modul genannt werden.

Der Beweis dieses Satzes ist höchst einfach: das System der Formen $\eta_{11}, \ldots \eta_{1m}$ ist bekanntlich dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn die Form

$$u_1\eta_{11} + \cdots + u_m\eta_{1m}$$

den Divisor P nicht enthalten kann, ohne dass alle Coefficienten u_k durch P theilbar sind. Löst man aber die m Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \eta_{ik} = P\eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

welche die Bedingung aussprechen, dass jene Form nebst ihren Conjugirten P enthalte, nach den u_k auf, so ergiebt sich:

$$D.u_k = D_k,$$

wo D_k aus D dadurch hervorgeht, dass an Stelle der Elemente ihrer $k$ten Verticalreihe die Elemente $P\eta_1, \ldots P\eta_m$ gesetzt werden. Daraus folgt aber sofort, dass D_k den Divisor P öfter enthält als D, da hier die $k$te Colonne durch P, dort nur durch $P^{\varrho k}$ theilbar ist, während alle übrigen Theiler dieselben bleiben. Es muss also u_k, also jeder der Coefficienten mit P einen gemeinsamen Theiler haben, oder, da diese Coefficienten dem Bereiche $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$ angehören, für den P ein Primdivisor ist, so müssen alle Coefficienten

$u_1, \ldots u_m$ durch P theilbar sein, jenes System ist also ein Fundamentalsystem.

Dass das vorher speciell untersuchte System den Anforderungen des soeben bewiesenen Satzes entspricht, erkennt man sofort, wenn man berücksichtigt, dass hier die Divisoren $\wp_r$ in (5^a.) die grössten gemeinsamen Theiler aller Elemente einer Verticalreihe sind, und dass sich aus jener Gleichung

$$\wp_r^\delta \sim P^r \quad \text{oder} \quad \wp_r \sim P^{\frac{r}{\delta}} \qquad (r = 0, 1, \ldots \delta - 1)$$

ergiebt, wenn man sie wie vorher zur δten Potenz erhebt. In diesem Falle sind also die Exponenten $\varrho_1, \ldots \varrho_m$ alle echten Brüche, deren Nenner $\delta_1, \ldots \delta_h$ sind, und es mag noch für das Folgende bemerkt werden, dass für irgend einen der Nenner δ_i ein jeder der δ_i echten Brüche $\frac{r}{\delta_i}$ gleich oft, nämlich z_i Male vorkommt, wie die Betrachtung des Systemes (5.) lehrt.

Legt man der Untersuchung dieses specielle Fundamentalsystem modulo P zu Grunde, so kann man endlich noch einen sehr allgemeinen und interessanten Satz über die wesentlichen Theiler der Gattungsdiscriminante herleiten. Zu diesem Behufe denke man sich dasjenige Divisorensystem (D_s) gebildet, dessen Elemente die sämmtlichen Unterdeterminanten einer bestimmten $s$ten Ordnung der Discriminante der Gattung sind. Dasselbe ist unabhängig von der speciellen Wahl des Fundamentalsystems; ist nämlich (D_s^1) der ebenso gebildete Modul für ein anderes Fundamentalsystem, so lehrt der erweiterte Multiplicationssatz für Determinanten, dass die Elemente von (D_s) die von (D_s^1) enthalten, und umgekehrt, dass also jene Divisoren einander äquivalent sind. Sind es nur die Theiler, welche (D_s) mit P gemeinsam hat, welche in Betracht gezogen werden sollen, so erkennt man ganz ebenso, dass auch ein beliebiges Fundamentalsystem modulo P, also z. B. auch das soeben untersuchte zu Grunde gelegt werden kann. Ist endlich (Δ_s) der entsprechend gebildete Divisor für ein beliebiges System von m Formen jener Gattung nebst ihren conjugirten, so lehrt derselbe Satz, dass (D_s) ein Theiler von (Δ_s) ist; die bekannten Eigenschaften der Gattungsdiscriminante übertragen sich also wörtlich auf diese allgemeineren Divisorensysteme (D_s).

Mit Hülfe des speciellen Fundamentalsystems in (4.) erkennt man nun ohne alle Schwierigkeit, dass der Divisor (D_s, P) äquivalent Eins

ist, solange s gleich oder kleiner als m_1 ist, da man ja alsdann sogar eine Matrix finden kann, deren sämmtliche Determinanten $s$ter Ordnung, modulo P betrachtet, ein primitives Modulsystem bilden. Ist dagegen s grösser als m_1, so wird eine jede der Determinanten $s$ter Ordnung mindestens einen der in (5^a.) betrachteten Divisoren $\wp_r$ von P enthalten, welche einer gebrochenen Potenz von P äquivalent sind, der Modul (D_s, P) wird also jetzt nicht mehr primitiv sein. Kommt man überein, eine Determinante $m$ter Ordnung $|\eta_{ik}|$ modulo P vom Range ϱ zu nennen, wenn das aus ihren Unterdeterminanten ϱter Ordnung gebildete Modulsystem (D_ϱ, P) das letzte ist, welches primitiv ist, so lässt sich das hier abgeleitete Resultat in dem folgenden eleganten Satze aussprechen:

> Die Discriminante einer beliebigen Gattung $\mathfrak{G}$ ist genau durch P^{m-m_1} theilbar, wenn sie, modulo P betrachtet, vom Range m_1 ist.

Ist ferner ein System von m beliebigen ganzen Formen des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$ gegeben, und ist m_1' ihr Rang modulo P, so muss m_1' gleich oder kleiner als m_1 sein, da ja das System (Δ_{m_1+1}) ihrer Unterdeterminanten (m_1+1)ter Ordnung den Divisor (D_{m_1+1}) enthalten muss, welcher, modulo P betrachtet, nicht mehr primitiv ist; hieraus ergiebt sich der weitere Satz:

> Ist ein System von m beliebigen ganzen Formen des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$ modulo P vom Range m_1', so ist ihre Gattungsdiscriminante höchstens durch $P^{m-m_1'}$ theilbar.

Es mag beiläufig bemerkt werden, dass $m_1 = \varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_h$ die Anzahl der Formen eines Gattungsbereiches angiebt, welche für das Product aller verschiedenen Primdivisoren von P linear unabhängig sind, oder welche in dem Sinne modulo P unabhängig sind, dass eine homogene lineare Function von ihnen mit rationalen Coefficienten dann, und nur dann zu einer beliebigen ganzzahligen Potenz erhoben, den Divisor P enthält, wenn alle Coefficienten durch P theilbar sind. Diese m_1 Formen bilden also in einem weiteren Sinne ein Fundamentalsystem für P, welches bei höheren Untersuchungen besonders aus dem Grunde oft mit Vortheil benutzt werden kann, weil die aus ihnen und ihren mm_1 Conjugirten gebildete Matrix niemals den Divisor P enthält. Endlich mag an dieser Stelle nur erwähnt werden, dass es mit Benutzung unseres Fundamentalsystemes leicht ist, den Theiler, welchen der Modul (D_s) mit P gemeinsam hat, in jedem Falle zu bestimmen, wenn man nur die Zerlegung von P für die Gattung $\mathfrak{G}$ vollständig kennt.

II.

Die im ersten Theile dieser Arbeit gefundenen Resultate sollen nun zur Bestimmung des wesentlichen Theilers einer aus zwei Gattungen componirten dritten Gattung benutzt werden.

Es seien also $\mathfrak{G}_1$ und G_1 zwei beliebige Gattungen von den Ordnungen m und n, und es werde angenommen, dass die Ordnung der einen sich nicht reducirt, sobald die andere dem Rationalitätsbereiche adjungirt wird. Sind dann:

$$\xi_{11}, \quad \xi_{12}, \quad \ldots \quad \xi_{1m}; \quad \eta_{11}, \quad \eta_{12}, \quad \ldots \quad \eta_{1n}$$

Fundamentalsysteme für die Gattungen $\mathfrak{G}_1$ und G_1, so bilden die aus jenen gebildeten mn Grössen:

$$(8.) \qquad \xi_{1i} \cdot \eta_{1k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots m \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

für die aus $\mathfrak{G}_1$ und G_1 componirte Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ in der Weise ein vollständiges System linear unabhängiger Zahlen, dass eine Gleichung:

$$(9.) \qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \xi_{1i} \eta_{1k} = 0$$

mit rationalen Coefficienten u_{ik} nur dann bestehen kann, wenn sämmtliche Coefficienten verschwinden. Man überzeugt sich hiervon sehr leicht, wenn man mit (9.) diejenigen n aus ihr sich ergebenden Gleichungen verbindet, welche man erhält, indem man zu den n zu G_1 conjugirten Gattungen übergeht, und dabei beachtet, dass ihre Determinante $|\eta_{ik}|$ nicht verschwindet.

Indessen folgt hieraus noch keinesweges, dass jene mn Grössen (8.) ***ein Fundamentalsystem*** bilden, dass sie also auch für einen jeden Primdivisor linear unabhängig sind. Dieser Schluss wäre nur dann berechtigt, und könnte mit den vorhin benutzten Mitteln bewiesen werden, wenn mindestens eine der Discriminanten $|\xi_{hi}|^2$ und $|\eta_{ik}|^2$ den betrachteten Divisor gar nicht enthielte. Ist jene Voraussetzung erfüllt, so ist es demnach leicht, die Potenz von P zu bestimmen, welche als wesentlicher Theiler in der Discriminante der Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ auftritt. Nach einem Satze nämlich, den meines Wissens zuerst Herr ***Kronecker*** in seinen algebraischen Vorlesungen aufgestellt und bewiesen hat, und von dem ich einen anderen elementaren Beweis *) gegeben habe, besteht nämlich stets die folgende wichtige

*) Vgl. eine demnächst erscheinende Notiz „Zur Composition der Determinanten“ in den Acta mathematica.

Determinantenrelation:

$$(10.) \qquad |\xi_{hi}.\eta_{lk}| = |\xi_{hi}|^n.|\eta_{lk}|^m \qquad \binom{h,\ i=1,\ 2,\ \ldots\ m}{l,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ n},$$

und aus ihr lässt sich demnach jener wesentliche Theiler unmittelbar bestimmen. Sind nämlich m_1 und n_1 beziehungsweise der Rang, den die Determinanten $|\xi_{hi}|$ und $|\eta_{lk}|$, modulo P betrachtet, besitzen, so folgt aus jener Relation, dass P in der Discriminante des componirten Systems (8.) genau:

$$(11.) \qquad n(m-m_1)+m(n-n_1) = 2mn-nm_1-mn_1$$

Male enthalten ist, und es müsste daher stets $P^{(2mn-nm_1-mn_1)}$ als wesentlicher Theiler in der Gattungsdiscriminante enthalten sein, wenn (8.) für die componirte Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ stets ein Fundamentalsystem wäre.

Dass dies aber nicht, wenigstens nicht immer, der Fall ist, lehrt schon das folgende einfache Beispiel:

Es sei p eine beliebige reelle Primzahl, und:

$$p-1 = m\mu = n\nu$$

zwei Zerlegungen von $(p-1)$, in denen m und n keinen gemeinsamen Theiler haben. Ferner seien $\mathfrak{G}$ und G die beiden *Galois*schen Gattungen, welche durch die m μ-gliedrigen und durch die n ν-gliedrigen Perioden der $p$ten Einheitswurzeln constituirt werden. Dann folgt aus der Theorie der Kreistheilungsgleichungen, dass die aus $\mathfrak{G}$ und G componirte Gattung von der Ordnung mn sein wird; es ist dies nämlich die Gattung der mn $\frac{p-1}{mn}$-gliedrigen Perioden der $p$ten Wurzeln der Einheit. Ferner erkennt man in diesem einfachen Falle ohne Schwierigkeit, dass die Discriminanten jeder dieser drei Gattungen, modulo p betrachtet, vom Range Eins sind. Es werden also

$$m-1, \quad n-1, \quad mn-1$$

die Exponenten der in den drei Gattungsdiscriminanten enthaltenen Potenzen von p sein. Bestimmt man aber nach (11.) die höchste Potenz von p, welche in der Discriminante des aus den Fundamentalsystemen von $\mathfrak{G}$ und G componirten Systems enthalten ist, so ergiebt sich für den Exponenten der Werth:

$$2mn-n-m = (mn-1)+(m-1)(n-1),$$

also eine Zahl, welche dann und nur dann mit der vorher gefundenen übereinstimmt, wenn $\mathfrak{G}$ oder G von der Ordnung Eins ist. Der hier charak-

terisirte Fall tritt z. B. schon bei den drei- und viergliedrigen Perioden der dreizehnten Wurzeln der Einheit auf.

Es ist leicht, sich in diesem einfachen Falle Rechenschaft von dem Grunde dieser scheinbaren Anomalie zu geben. Die Primzahl p zerfällt nämlich hier für $\mathfrak{G}$ und G in der folgenden Weise in Primfactoren:

$$p \sim P^m \quad \text{und} \quad p \sim \Pi^n,$$

und die Formen:

$$1, \quad P, \quad \ldots \quad P^{m-1} \quad \text{und} \quad 1, \quad \Pi, \quad \ldots \quad \Pi^{n-1}$$

bilden, modulo p betrachtet, für $\mathfrak{G}$ und G Fundamentalsysteme. Betrachtet man jetzt das aus beiden componirte System der mn Formen der Gattung $(\mathfrak{G}, G)$:

$$P^i . \Pi^k \qquad \binom{i=0,\ 1,\ \ldots\ m-1}{k=0,\ 1,\ \ldots\ n-1},$$

so erkennt man, dass dasselbe schon aus dem Grunde kein Fundamentalsystem modulo p sein kann, weil einzelne seiner Elemente selbst durch p theilbar sind. Es ist nämlich:

$$(P^i \Pi^k)^{mn} \sim p^{ni+mk} \geqq p^{mn},$$

sobald $ni+mk \geqq mn$, oder also, sobald die ganzen Zahlen i, k der Bedingung:

$$\frac{i}{m}+\frac{k}{n} \geqq 1 \qquad \binom{i=1,\ 2,\ \ldots\ m-1}{k=1,\ 2,\ \ldots\ n-1}$$

genügen, wobei die Werthe $i=0$, oder $k=0$, die hier offenbar nicht in Frage kommen, fortgelassen sind. Beachtet man nun, dass einem jeden System (i, k), welches dieser Bedingung genügt, ein anderes nämlich $(m-i, n-k)$ entspricht, für welches jene Summe unter Eins liegt, so erkennt man, dass die Anzahl jener Fälle gleich der Hälfte der Anzahl der vorhin betrachteten Systeme (i, k), also gleich $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$ sein wird. Denkt man sich jetzt aus diesen Elementen p durch einfache Division entfernt, so wird man ein neues System von ganzen algebraischen Zahlen erhalten, dessen Discriminante die Primzahl p genau:

$$n(m-1)+m(n-1)-(m-1)(n-1) \;=\; mn-1$$

Male, d. h. genau so oft enthält, als dies vorher auf einem anderen Wege für die Discriminante der Gattung $(\mathfrak{G}, G)$ gefunden wurde. Jenes reducirte System ist also hier in der That ein Fundamentalsystem für die componirte Gattung $(\mathfrak{G}, G)$.

III.

Das hier befolgte Verfahren lässt sich nun auch in dem allgemeinen Falle zur Aufstellung eines Fundamentalsystems für die componirte Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$, sowie zur Bestimmung des wesentlichen Theilers ihrer Discriminante benutzen.

Es seien jetzt:

$$(12.) \qquad \xi_{h1}, \quad \ldots \quad \xi_{hm}; \quad \eta_{l1}, \quad \ldots \quad \eta_{ln} \qquad \begin{pmatrix} h=1, \ldots m \\ l=1, \ldots n \end{pmatrix}$$

die Elemente zweier normalen Fundamentalsysteme für die Gattungen $\mathfrak{G}_1$ und G_1 nebst ihren conjugirten. Sind dann:

$$(12^a.) \qquad \varrho_1, \quad \ldots \quad \varrho_m; \quad \sigma_1, \quad \ldots \quad \sigma_n$$

die Exponenten von P, welche aus den Verticalreihen der Discriminanten von $\mathfrak{G}_1$ und G_1 herausgehoben werden können, so werden

$$2\sum_{i=1}^{m}\varrho_i \quad \text{und} \quad 2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k$$

die Exponenten der in den Discriminanten von $\mathfrak{G}_1$ und G_1 enthaltenen Potenzen von P sein. Sind also diese Discriminanten $|\xi_{hi}|^2$ und $|\eta_{lk}|^2$, modulo P betrachtet, beziehlich vom Range m_1 und n_1, so ergiebt sich hiernach:

$$(13.) \qquad 2\sum_{i=1}^{m}\varrho_i = m-m_1, \quad 2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k = n-n_1.$$

Bildet man jetzt aus den Elementen jener beiden normalen Fundamentalsysteme das componirte System

$$(14.) \qquad \xi_{1i}\eta_{1k} \qquad \begin{pmatrix} i=1, \ldots m \\ k=1, \ldots n \end{pmatrix}$$

und bestimmt die in ihrer Discriminante $|\xi_{hi}.\eta_{lk}|^2$ enthaltene höchste Potenz von P, so ist ihr Exponent nach (11.)

$$n(m-m_1)+m(n-n_1).$$

Berücksichtigt man aber andererseits, dass aus der durch den Index (i, k) charakterisirten Verticalreihe der Determinante von $|\xi_{hi}.\eta_{lk}|$ offenbar der Factor $P^{\varrho_i+\sigma_k}$ herausgehoben werden kann, so erkennt man, dass der Exponent derjenigen Potenz von P, welche sich auf diese Weise aus der Discriminante heraushebt, gleich:

$$2\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\varrho_i+\sigma_k) = 2[n\Sigma\varrho_i+m\Sigma\sigma_k] = n(m-m_1)+m(n-n_1),$$

d. h. gleich dem Exponenten der überhaupt in ihr auftretenden Potenz von P ist.

Es ist also jenes componirte System (14.) ein System unabhängiger Formen, dessen Discriminante so beschaffen ist, dass der Divisor P aus seinen Verticalreihen so oft herausgehoben werden kann, als er überhaupt auftritt. Wären die Exponenten $(\varrho_i+\sigma_k)$ jener Potenzen lauter echte Brüche, wären also alle Zahlen $\varrho_i+\sigma_k$ kleiner als Eins, so wäre jenes System (14.) ein normales Fundamentalsystem für die componirte Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$. Man kann aber aus diesem Systeme ein anderes herleiten, bei welchem auch noch jene dritte Forderung erfüllt ist. Bedeutet nämlich $[\varrho_i+\sigma_k]$ die grösste in dem Bruche $(\varrho_i+\sigma_k)$ enthaltene ganze Zahl, d. h. in diesem Falle Null oder Eins, jenachdem $(\varrho_i+\sigma_k)$ kleiner ist als Eins oder nicht, so erkennt man sofort, dass das System:

$$(15.) \qquad \frac{\xi_{1i}.\eta_{1k}}{P^{[\varrho_i+\sigma_k]}}$$

die beiden vorher charakterisirten Eigenschaften des Systemes (14.) besitzt, da ja seine Elemente nur durch rationale Grössen dividirt sind; zugleich wird aber der Exponent derjenigen Potenz von P, welcher aus einer beliebigen durch die Indexcombination (i, k) charakterisirten Verticalreihe der Discriminante von (15.) heraustritt:

$$(16.) \qquad (\varrho_i+\sigma_k)-[\varrho_i+\sigma_k],$$

oder also ein echter Bruch. Nach dem am Ende der ersten Abtheilung dieser Arbeit abgeleiteten Satze bilden die Formen (15.) also ein normales Fundamentalsystem, und man erhält den Satz:

Sind:

$$\xi_{11},\ \xi_{12},\ \ldots\ \xi_{1m};\qquad \eta_{11},\ \eta_{12},\ \ldots\ \eta_{1n}$$

normale Fundamentalsysteme zweier Gattungen $m$ter und $n$ter Ordnung $\mathfrak{G}_1$ und G_1 für einen beliebigen Primdivisor P, und sind

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \ldots\ \varrho_m;\qquad \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots\ \sigma_n$$

die Exponenten der aus den Verticalreihen ihrer Discriminanten sich heraushebenden Potenzen von P, so ist das System:

$$(15.) \qquad \frac{\xi_{1i}.\eta_{1k}}{P^{[\varrho_i+\sigma_k]}} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ \ldots\ m \\ k=1,\ \ldots\ n \end{pmatrix}$$

ein normales Fundamentalsystem für die aus $\mathfrak{G}_1$ und G_1 componirte Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$, wenn $[\varrho_i+\sigma_k]$ die grösste ganze Zahl bedeutet, welche in $(\varrho_i+\sigma_k)$ enthalten ist.

Jetzt kann endlich mit Leichtigkeit die Potenz von P bestimmt wer-

den, welche als wesentlicher Theiler in der Discriminante der componirten Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ enthalten ist. Ist nämlich der Rang der Discriminante des Systems (15.) für den Modul P gleich μ, so ist nach den Resultaten des ersten Theiles dieser Arbeit $(mn-\mu)$ der Exponent jener Potenz von P. Da aber das vorher aufgestellte Fundamentalsystem für die Gattung $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ ein normales ist, so erkennt man sofort, dass der Rang μ der Discriminante gleich der Anzahl ihrer Verticalreihen ist, aus denen sich P gar nicht herausheben lässt, da die aus ihnen gebildete Matrix modulo P primitiv, jede höhere aber nicht mehr primitiv ist. Mit Berücksichtigung von (16.) ergiebt sich also die Zahl μ gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichungen:

$$(17.) \qquad \varrho_i+\sigma_k = [\varrho_i+\sigma_k] \qquad \binom{i=1, \ldots m}{k=1, \ldots n}.$$

Es seien nun:

$$P \sim P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \ldots P_h^{\delta_h} \quad \text{und} \quad P \sim \Pi_1^{\varepsilon_1} \Pi_2^{\varepsilon_2} \ldots \Pi_k^{\varepsilon_k}$$

die Zerlegungen des rationalen Divisors P in seine irreductiblen Primdivisoren für die Gattungen $\mathfrak{G}_1$ und G_1 und:

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_h; \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$$

die Ordnungszahlen jener einzelnen Primdivisoren. Es mögen dann $\varkappa$ und λ bezw. δ und ε die Ordnungs- bezw. Gradzahlen je eines Divisors der beiden Reihen bezeichnen. Betrachtet man dann zunächst nur diejenige Matrix der Discriminante, bei welcher jene beiden Divisoren auftreten, so sind

$$\frac{a}{\delta} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\varepsilon} \qquad \binom{a=0, 1, \ldots \delta-1}{b=0, 1, \ldots \varepsilon-1}$$

diejenigen echten Brüche, welche in (17.) an die Stelle von ϱ_i und σ_k zu setzen sind, und die Ergebnisse des ersten Paragraphen lehren, dass eine jede Combination (a, b) gleich oft, nämlich genau $\varkappa\lambda$ Male vorkommt. Jene Gleichung verwandelt sich daher in:

$$\frac{a}{\delta}+\frac{b}{\varepsilon} = \left[\frac{a}{\delta}+\frac{b}{\varepsilon}\right]$$

oder in

$$(17^a.) \qquad a\varepsilon+b\delta \equiv 0 \pmod{\delta.\varepsilon} \qquad \binom{a=0, 1, \ldots \delta-1}{b=0, 1, \ldots \varepsilon-1}.$$

Ist nun $d=(\delta, \varepsilon)$ der grösste gemeinsame Theiler von δ und ε und:

$$\delta = \delta_1 d, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 d,$$

so ergiebt sich aus der Congruenz $(17^a.)$:

$$a = \delta_1 \alpha, \quad b = \varepsilon_1 \beta,$$

wo α und β ganze Zahlen sind, welche der Bedingung

$$\alpha+\beta \equiv 0 \pmod{d} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots d-1)$$

genügen müssen. Die Anzahl der Lösungen dieser Congruenz ist aber offenbar $d=(\delta, \varepsilon)$, also ist $\varkappa\lambda(\delta, \varepsilon)$ die Anzahl der Lösungen von $(17^a.)$. Hieraus ergiebt sich also, wenn man eine jede Divisorencombination $(P_r \Pi_s)$ in der hier angegebenen Weise betrachtet, für den Rang μ der Determinante $|\xi_{hi}.\eta_{ik}|$ der Ausdruck:

$$\mu = \sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{k} \varkappa_r.\lambda_s.(\delta_r, \varepsilon_s)$$

und für den Exponenten $(mn-\mu)$ der in der Gattungsdiscriminante enthaltenen Potenz von P:

$$(18.) \qquad mn-\sum_{r,s} \varkappa_r\lambda_s(\delta_r, \varepsilon_s) = \sum_{r,s} \varkappa_r\lambda_s|\delta_r.\varepsilon_s-(\delta_r, \varepsilon_s)|,$$

wenn man noch die Gleichungen:

$$m = \varkappa_1\delta_1+\cdots+\varkappa_h\delta_h, \quad n = \lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_k\varepsilon_k$$

berücksichtigt. Man erhält also das folgende Schlussresultat:

> Sind $\mathfrak{G}_1$ und G_1 zwei Gattungen $m$ter und $n$ter Ordnung, $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ die aus ihnen componirte Gattung von der (mn)ten Ordnung, sind ferner:
>
> $$P \sim P_1^{\delta_1}\ldots P_h^{\delta_h} \quad \text{und} \quad P \sim \Pi_1^{\varepsilon_1}\ldots \Pi_k^{\varepsilon_k}$$
>
> die Zerlegungen eines beliebigen rationalen Primdivisors P in seine Primfactoren innerhalb $\mathfrak{G}_1$ und G_1, und sind endlich:
>
> $$\varkappa_1, \ldots \varkappa_h; \quad \lambda_1, \ldots \lambda_k$$
>
> die Ordnungszahlen jener Divisoren, so sind:
>
> $$m-\sum_{r=1}^{h} \varkappa_r = \sum_{r=1}^{h} \varkappa_r(\delta_r-1),$$
>
> $$n-\sum_{s=1}^{k} \lambda_s = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(\varepsilon_s-1),$$
>
> $$mn-\sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{k} \varkappa_r.\lambda_s(\delta_r, \varepsilon_s) = \sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{k} \varkappa_r.\lambda_s|\delta_r.\varepsilon_s-(\delta_r, \varepsilon_s)|$$
>
> die Exponenten derjenigen Potenzen von P, welche als wesentliche Theiler in den Discriminanten der Gattungen $\mathfrak{G}_1$, G_1 und $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ enthalten sind.

Als specielle Fälle dieses allgemeinen Satzes mögen die folgenden hervorgehoben werden:

1. Sind alle Exponenten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k$ gleich Eins, ist also P in der Discriminante von G_1 überhaupt nicht enthalten, so tritt P in der Discriminante von $(\mathfrak{G}_1, G_1)$

$$(m-m_1)n$$

Male auf, und man erkennt sofort, dass nur unter dieser Voraussetzung oder der entsprechenden für $\mathfrak{G}_1$ die in $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ enthaltene Potenz von P gleich $[(m-m_1)n+(n-n_1)m]$ ist.

2. Sind alle Exponenten $\delta_1, \ldots \delta_h$ allen Exponenten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k$ theilerfremd, sind also alle Zahlen $(\delta_r, \varepsilon_s)$ gleich Eins, so ist P in der Gattungsdiscriminante von $(\mathfrak{G}_1, G_1)$

$$mn-\Sigma\Sigma\varkappa_r\lambda_s = mn-m_1n_1$$

Male enthalten, wenn m_1 und n_1, wie überall in dieser Arbeit, den Rang der Discriminanten von $\mathfrak{G}_1$ und G_1 modulo P bedeuten.

Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale.

(Fortsetzung des auf S. 157 bis 159 abgedruckten Aufsatzes.)

(Von *L. Kronecker*.)

Auch die Integration der Function $\pi\cot z\pi f(z)$ längs zweier der Ordinatenaxe parallelen Linien ergiebt, wie oben in der Gleichung (*B.*) die Integration längs zweier der Abscissenaxe parallelen Linien, eine Darstellung von Reihen durch Integrale. Aber die beiden Darstellungen sind von wesentlich verschiedener Art.

Um die andere Darstellungsweise auseinanderzusetzen, bezeichne ich mit x_0, x_1 zwei beliebige Abscissenwerthe, mit y_0, y_1 zwei *positive* Ordinatenwerthe und nehme an, dass $x_0 < x_1$ und $y_0 < y_1$ sei. Ich nehme ferner an, dass das Rechteck mit den Eckpunkten:

$$(x_0,\ y_1),\quad (x_0,\ -y_1),\quad (x_1,\ -y_1),\quad (x_1,\ y_1)$$

innerhalb der „natürlichen Begrenzung“ des Integrationsbereichs der Function $f(z)$ liegt, so dass gemäss der Bedeutung, in welcher ich diesen Ausdruck eingeführt habe *), das längs jenes Rechtecks erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ gleich Null wird. Dies vorausgeschickt, ist:

$$(E.)\qquad \sum_k f(k) = \frac{1}{2\pi i}\int \pi\cot z\pi f(z)\,dz,$$

wenn die Summation links auf alle ***zwischen*** x_0 und x_1 liegenden ganzen Zahlen k und die Integration rechts in folgender Weise erstreckt wird:

von (x_0, y_1) ***bis*** (x_0, y_0) ***in gerader Linie, von*** (x_0, y_0) ***über*** $(x_0+y_0, 0)$ ***hinweg im Halbkreise bis*** $(x_0, -y_0)$, ***von*** $(x_0, -y_0)$ ***bis*** $(x_0, -y_1)$, ***von***

---

*) „Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln“ art. XII. (Monatsbericht der Berliner Akademie der Wissenschaften vom März 1869.)

$(x_0, -y_1)$ bis $(x_1, -y_1)$, von $(x_1, -y_1)$ bis $(x_1, -y_0)$ in gerader Linie, von $(x_1, -y_0)$ über $(x_1 - y_0, 0)$ hinweg im Halbkreise bis (x_1, y_0), von (x_1, y_0) bis (x_1, y_1), von (x_1, y_1) bis (x_0, y_1) in gerader Linie.

Dabei ist noch vorausgesetzt, dass weder zwischen x_0 und x_0+y_0, noch zwischen x_1-y_0 und x_1 eine ganze Zahl liege.

Mit abnehmendem y_0 nähert sich, wenn x_0 eine ganze Zahl ist, das Resultat der Integration über den ersteren Halbkreis dem Werthe $\frac{1}{2}f(x_0)$, andernfalls der Null. Ebenso ergiebt dann die Integration über den letzteren Halbkreis den Werth $\frac{1}{2}f(x_1)$ oder Null, je nachdem x_1 eine ganze Zahl ist oder nicht. Es wird daher:

$$(E'.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_{k} f(k) + \tfrac{1}{2}\sum_{k'} f(k') = \frac{1}{2\pi i}\int \pi \cot \pi z \, f(z)\, dz,$$

$$(x_0 < k < x_1;\ x_0 \leqq k' \leqq x_1)$$

wenn die Integration rechts nur über die oben angegebenen sechs geraden Linien erstreckt und dann y_0 der Null genähert wird.

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung $(E'.)$ kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$(F.) \qquad \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} \varepsilon i \cot(x+\varepsilon y_1 i)\pi f(x+\varepsilon y_1 i)\, dx - \tfrac{1}{2}\lim_{y_0=0} \int_{y_0}^{y_1} \sum_{a,\varepsilon} e^{a\pi i} \cot(x_a+\varepsilon y i)\pi f(x_a+\varepsilon y i)\, dy,$$

$$(a = 0,\ 1;\ \varepsilon = +1,\ -1)$$

und es resultirt daher, wenn:

$$(G_0.) \qquad \lim_{y_1=\infty} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} \varepsilon \cot(x+\varepsilon y_1 i)\pi f(x+\varepsilon y_1 i)\, dx = 0 \qquad (\varepsilon = +1,\ -1)$$

ist, die Summenformel:

$$(G.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_{k} f(k) + \tfrac{1}{2}\sum_{k'} f(k') = -\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \sum_{a,\varepsilon} (-1)^a \cot(x_a+\varepsilon y i)\pi f(x_a+\varepsilon y i)\, dy.$$

$$(x_0 < k < x_1;\ x_0 \leqq k' \leqq x_1) \qquad (a = 0,\ 1;\ \varepsilon = +1,\ -1)$$

Bezeichnet man zur Abkürzung den ersten Theil des Ausdrucks $(F.)$ mit P, so ist:

$$P = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} \frac{f(x+\varepsilon y_1 i)\, dx}{e^{2(y_1 - \varepsilon x i)\pi} - 1} + \tfrac{1}{2}\int f(z)\, dz \qquad (\varepsilon = +1,\ -1),$$

wo die Integration in Beziehung auf z oder $x+yi$ in gerader Linie von (x_0, y_1) nach (x_1, y_1) und von $(x_0, -y_1)$ nach $(x_1, -y_1)$ zu erstrecken ist. Die Integration in gerader Linie von $(x_0, \varepsilon y_1)$ nach $(x_1, \varepsilon y_1)$ kann aber nach dem *Cauchy*schen Theorem durch die Integration in geraden Linien von

$(x_0, \varepsilon y_1)$ nach $(x_0, \varepsilon y_0)$, von da nach $(x_1, \varepsilon y_0)$ und von da nach $(x_1, \varepsilon y_1)$ ersetzt werden, und wenn dies sowohl für $\varepsilon = +1$ als auch für $\varepsilon = -1$ geschieht, so wird P gleich:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} \frac{f(x+\varepsilon y_1 i)\,dx}{e^{2(y_1-\varepsilon x i)\pi}-1} + \tfrac{1}{2}\lim_{y_0=0} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} f(x+\varepsilon y_0 i)\,dx - \tfrac{1}{2} i \int_{y_0}^{y_1} \sum_{\alpha,\varepsilon} (-1)^{\alpha} \varepsilon f(x_0+\varepsilon y i)\,dy.$$

$(\alpha = 0, 1;\ \varepsilon = +1, -1)$

Setzt man diesen Ausdruck in $(F.)$ an Stelle von:

$$\tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} \varepsilon i \cot(x+\varepsilon y_1 i)\pi f(x+\varepsilon y_1 i)\,dx \qquad (\varepsilon = +1, -1)$$

ein, so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$(F'.) \qquad i\lim_{y_0=0} \int_{y_0}^{y_1} \sum_{\alpha,\varepsilon} (-1)^{\alpha} \varepsilon \frac{f(x_\alpha+\varepsilon y i)\,dy}{e^{2(y-\varepsilon x_\alpha i)\pi}-1} + \tfrac{1}{2}\lim_{y_0=0} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} f(x+\varepsilon y_0 i)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} \frac{f(x+\varepsilon y_1 i)\,dx}{e^{2(y_1-\varepsilon x i)\pi}-1},$$

und durch dieses Aggregat von Integralen findet sich also der Werth der Summe:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k} f(k) + \tfrac{1}{2}\sum_{k'} f(k') \qquad (x_0 < k < x_1;\ x_0 \leqq k' \leqq x_1)$$

dargestellt.

Hieraus resultirt erstens unter der Voraussetzung, dass:

$$(H_0.) \qquad \lim_{y_1=x} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} \frac{f(x+\varepsilon y_1 i)\,dx}{e^{2(y_1-\varepsilon x i)\pi}-1} = 0$$

ist, die Summenformel:

$$(H.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_{k} f(k) + \tfrac{1}{2}\sum_{k'} f(k') = i\int_{0}^{\infty} \sum_{\alpha,\varepsilon} (-1)^{\alpha} \varepsilon \frac{f(x_\alpha+\varepsilon y i)\,dy}{e^{2(y-\varepsilon x_\alpha i)\pi}-1} + \tfrac{1}{2}\lim_{y_0=0} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{\varepsilon} f(x+\varepsilon y_0 i)\,dx,$$

$(x_0 < k < x_1;\ x_0 \leqq k' \leqq x_1)$ $\qquad$ $(\alpha = 0, 1;\ \varepsilon = +1, -1)$

welche, wenn $\lim_{y=0} f(x+yi) = f(x)$ ist, in folgender einfacheren Weise dargestellt werden kann:

$$(H'.) \qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\sum_{k} f(k) + \tfrac{1}{2}\sum_{k'} f(k') - \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \\ (x_0 < k < x_1;\ x_0 \leqq k' \leqq x_1) \\ i\int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(x_0+yi)}{e^{2(y-x_0 i)\pi}-1} - \frac{f(x_0-yi)}{e^{2(y+x_0 i)\pi}-1} - \frac{f(x_1+yi)}{e^{2(y-x_1 i)\pi}-1} + \frac{f(x_1-yi)}{e^{2(y+x_1 i)\pi}-1} \right\} dy, \end{cases}$$

und welche, wenn überdies x_0 und x_1 ganze, beziehungsweise mit m und n zu bezeichnende Zahlen sind, die noch einfachere Gestalt annimmt:

$$(H''.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\cdots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_m^n f(x)dx \\ = i\int_0^\infty (f(m+yi)-f(m-yi)-f(n+yi)+f(n-yi))\frac{dy}{e^{2y\pi}-1}. \end{cases}$$

Wenn zweitens der Werth von y_1 demjenigen von y_0 genähert wird, so dass der erste der drei Theile des Ausdrucks $(F'.)$ gleich Null wird, so ergiebt sich die Summenformel:

$$(K.)\quad \frac{1}{2}\sum_{k\ (x_0<k<x_1;\ x_0\leqq k'\leqq x_1)} f(k)+\frac{1}{2}\sum_{k'} f(k')-\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \lim_{y=0}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{\varepsilon}\frac{f(x+\varepsilon yi)dx}{e^{2(y-\varepsilon xi)\pi}-1},$$

vorausgesetzt, dass wie oben $\lim_{y=0} f(x+yi)=f(x)$ ist.

Einige Anwendungen der obigen Summenformeln.

Um eine Anwendung von der Summenformel $(G.)$ zu geben, nehme ich:

$$f(z) = \frac{2e^{v^2z^2\pi i}}{1+e^{2z\pi i}},$$

wo v eine reelle Grösse bedeutet. Die Bedingungsgleichung $(G_0.)$ wird alsdann:

$$\lim_{y=\infty}\sum_{\varepsilon}\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\frac{e^{v^2(x+\varepsilon yi)^2\pi i}}{e^{2(x+\varepsilon yi)\pi i}-1}dx = 0 \qquad (\varepsilon=+1,\ -1),$$

und da der absolute Werth der Function unter dem Integralzeichen kleiner ist als:

$$\frac{\varepsilon e^{-2\varepsilon v^2xy\pi}}{1-e^{-2\varepsilon y\pi}} \qquad (\varepsilon=+1,\ -1),$$

so ist die Bedingungsgleichung erfüllt, sobald:

$$0\leqq x_0<x_1\leqq\frac{1}{v^2}$$

ist. Unter dieser Voraussetzung wird also gemäss der Formel $(G.)$:

$$(L.)\quad \frac{1}{2}\sum_{h\ (x_0<h<x_1;\ x_0\leqq k\leqq x_1)} e^{h^2v^2\pi i}+\frac{1}{2}\sum_{k} e^{k^2v^2\pi i} = -i\int_0^\infty \sum_{\alpha,\varepsilon\ (\alpha=0,\ 1;\ \varepsilon=+1,\ -1)}(-1)^\alpha\frac{e^{(x_\alpha+\varepsilon yi)^2v^2\pi i}}{e^{2(x_\alpha+\varepsilon yi)\pi i}-1}dy,$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite kann auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$i\sum_{\alpha}(-1)^\alpha e^{v^2x_\alpha^2\pi i}\int_0^\infty \frac{\cos 2(v^2x_\alpha-1)y\pi i-e^{-2x_\alpha\pi i}\cos 2v^2x_\alpha y\pi i}{\cos 2y\pi i-\cos 2x_\alpha\pi}e^{-v^2y^2\pi i}dy \qquad (\alpha=0,\ 1).$$

Nimmt man jetzt $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{1}{v^2}$, so wird dieser Ausdruck gleich:

$$i(1+e^{-\frac{\pi i}{v^2}})\int_0^\infty e^{-v^2y^2\pi i}dy + e^{-\frac{\pi i}{v^2}}\sin\frac{2\pi}{v^2}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2y^2\pi i}dy}{\cos 2y\pi i - \cos\frac{2\pi}{v^2}},$$

und wenn man hierin für das erste Integral seinen bekannten Werth einsetzt, im zweiten aber die Substitution $y = \frac{u}{v}$ anbringt, so verwandelt sich die Formel (*L.*) in folgende:

$$(L'.)\quad \sum_h e^{h^2v^2\pi i} + \sum_k e^{k^2v^2\pi i} = \frac{e^{\frac{1}{4}\pi i}}{v}(1+e^{-\frac{\pi i}{v^2}}) + 2\sin\frac{2\pi}{v^2}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi i}{v^2}}}{v}\int_0^\infty \frac{e^{-u^2\pi i}du}{\cos\frac{2u\pi i}{v} - \cos\frac{2\pi}{v^2}},$$

$$\left(0<h<\tfrac{1}{v^2};\ 0\leqq k\leqq\tfrac{1}{v^2}\right)$$

wo v die ***positive*** Quadratwurzel von v^2 bedeutet.

Ist n eine positive ganze Zahl, und setzt man $v^2 = \frac{2}{n}$, so resultirt aus der Formel (*L'.*) unmittelbar die Werthbestimmung der *Gauss*schen Reihen:

$$\sum_h e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} + \sum_k e^{\frac{2k^2\pi i}{n}} = \frac{i+i^{1-n}}{i+1}|\sqrt{n}|\ ^*).$$

$$(0<h<\tfrac{1}{2}n;\ 0\leqq k\leqq\tfrac{1}{2}n)$$

Setzt man ferner $v^2 = \frac{m}{n}$, wo m und n positive ganze Zahlen bedeuten, so kommt:

$$(L''.)\quad \begin{cases} \left|\sqrt{\frac{m}{n}}\right|\left\{\sum_h e^{\frac{mh^2\pi i}{n}} + \sum_k e^{\frac{mk^2\pi i}{n}}\right\} & \left(0<h<\frac{n}{m};\ 0\leqq k\leqq\frac{n}{m}\right) \\ = e^{\frac{1}{4}\pi i}(1+e^{-\frac{n\pi i}{m}}) + \sin\frac{2n\pi}{m}\,e^{-\frac{n\pi i}{m}}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-u^2\pi i}du}{\cos 2u\pi i\sqrt{\frac{n}{m}} - \cos\frac{2n\pi}{m}}, \end{cases}$$

und also, wenn $m = 4$ und n ungerade ist:

$$(L'''.)\quad \frac{1}{|\sqrt{n}|}\cdot\sum_k e^{\frac{4k^2\pi i}{n}} = \tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}(1+e^{-\frac{n\pi i}{4}}) + e^{\frac{1}{4}(n-2)\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-u^2\pi i}du}{e^{u\pi|\sqrt{n}|} + e^{-u\pi|\sqrt{n}|}}.$$

$$(-\tfrac{1}{4}n<k<\tfrac{1}{4}n)$$

Hieraus ergeben sich die bemerkenswerthen Formeln:

$$(M.)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{t^2\pi}{n}}{\cos t\pi i}dt = \left(\cos\frac{n+1}{4}\pi + \cos\frac{2n+1}{4}\pi\right)|\sqrt{n}| + 2\sum_k \sin\left(\frac{n}{4} - \frac{4k^2}{n}\right)\pi, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{t^2\pi}{n}}{\cos t\pi i}dt = \left(\sin\frac{n+1}{4}\pi + \sin\frac{2n+1}{4}\pi\right)|\sqrt{n}| - 2\sum_k \cos\left(\frac{n}{4} - \frac{4k^2}{n}\right)\pi, \end{cases}$$

*) Vgl. meine auf S. 267 abgedruckte Notiz.

in denen sich die Summation rechts auf alle ganzzahligen zwischen $-\frac{1}{4}n$ und $+\frac{1}{4}n$ liegenden Werthe von k bezieht und die Zahl n als ungerade vorausgesetzt ist.

Um die mit (*H.*) bezeichnete Summenformel anzuwenden, nehme ich:

$$f(z) = e^{2wz\pi i}$$

und hierbei für w eine complexe Grösse, deren reeller Theil seinem absoluten Werthe nach kleiner als 1 ist. Die Bedingungsgleichung (H_0.) ist alsdann erfüllt, und es wird also gemäss der Formel (*H.*):

$$(N.)\qquad \frac{1}{2}\sum_{k}^{(x_0<k<x_1;\ x_0\leqq k'\leqq x_1)} e^{2wk\pi i}+\frac{1}{2}\sum_{k'} e^{2wk'\pi i} = i\int_0^{\infty}\sum_{a,\varepsilon}(-1)^a\varepsilon\frac{e^{2w(x_a+\varepsilon yi)\pi i}dy}{e^{2(y-\varepsilon x_a i)\pi}-1}+\int_{x_0}^{x_1} e^{2wx\pi i}dx.$$

Der erste Theil des Ausdrucks auf der rechten Seite verwandelt sich, wenn man unter dem Integral- und Summenzeichen nach Potenzen von $e^{-2y\pi}$ entwickelt, in folgenden:

$$i\lim_{n=\infty}\sum_{a,\varepsilon}(-1)^a\varepsilon\int_0^{\infty}\sum_{h=1}^{h=n} e^{-2(h+w\varepsilon)(y-\varepsilon x_a i)\pi}dy \qquad (a=0,\ 1;\ \varepsilon=+1,\ -1),$$

welcher ferner, wenn die Integration ausgeführt wird, in:

$$-\frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\sum_{a,\varepsilon}(-1)^a\sum_{h=1}^{h=n}\frac{e^{2(w+h\varepsilon)x_a\pi i}}{w+h\varepsilon}-\frac{1}{2\pi i}\sum_a(-1)^a\frac{e^{2wx_a\pi i}}{w}$$

übergeht. Die Gleichung (*N.*) nimmt hiernach, wenn w von Null verschieden ist, folgende einfache Gestalt an:

$$(N'.)\qquad \frac{1}{2}\sum_{k}^{(x_0<k<x_1;\ x_0\leqq k'\leqq x_1)} e^{2wk\pi i}+\frac{1}{2}\sum_{k'} e^{2wk'\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\sum_{h=-n}^{h=+n}\frac{e^{2(w+h)x_1\pi i}-e^{2(w+h)x_0\pi i}}{w+h},$$

in welcher sie offenbar eine Darstellung der unendlichen Reihen:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{h=-n}^{h=+n}\frac{e^{2(w+h)x\pi i}}{w+h}$$

in endlicher Form liefert. Dabei ist zu bemerken, dass die Gleichung (*N'.*) zwar unter der Voraussetzung, dass w von Null verschieden sei und dass der reelle Theil von w zwischen -1 und $+1$ liege, abgeleitet worden ist, aber da die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung ungeändert bleiben, wenn $w+1$ an Stelle von w gesetzt wird, so folgt, dass die Gleichung (*N'.*) für *alle* complexen Werthe von w, nur reelle ganzzahlige ausgenommen, gültig ist.

Setzt man in der Formel (*N'.*) $x_0=0$ und lässt dann den Index von x_1 fort, so wird der Ausdruck auf der rechten Seite:

$$\tfrac{1}{2}i\cot w\pi+\frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\sum_{h=-n}^{h=+n}\frac{e^{2(w+h)x\pi i}}{w+h},$$

und die Formel (*N'*.) geht alsdann, wenn x nicht einen ganzen ganzzahligen Werth hat, in folgende über:

$$(N''.)\qquad \frac{e^{2w[x]\pi i}}{1-e^{-2w\pi i}}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\sum_{h=-n}^{h=+n}\frac{e^{2(w+h)x\pi i}}{w+h},$$

wo $[x]$ in üblicher Weise die grösste ganze Zahl bedeutet, welche kleiner als x ist. Diese Formel stimmt vollständig mit derjenigen überein, welche oben (S. 157) mit (*A*.) bezeichnet ist; sie wird mit derselben identisch, wenn man $x-[x]=v$ und $-i$ an Stelle von i setzt.

Die erwähnte Formel (*A*.):

$$\frac{2\pi ie^{2v w\pi i}}{e^{2w\pi i}-1}=\lim_{n=\infty}\sum_{k=-n}^{k=+n}\frac{e^{2kv\pi i}}{w-k}\qquad (0<v<1),$$

welche ich mehrfach angewendet habe, und welche Herr *Lipschitz* bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die allgemeinere Reihe:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=-n}^{k=+n}\frac{e^{2kv\pi i}}{(w-k)^{\sigma}}$$

entwickelt hat, kommt, wie ich erst jetzt bemerkt habe, schon früher in der Literatur vor. Die von Herrn *Schlömilch* in seinem Aufsatz: „Développement de deux formules sommatoires“ benutzten beiden Gleichungen *):

$$(P.)\qquad \begin{cases}\lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{k=-n}^{k=+n}\dfrac{t\cos kx}{k^2+t^2}=\pi\cdot\dfrac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} & (\pi\geqq x\geqq 0),\\ \lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{k=-n}^{k=+n}\dfrac{k\sin kx}{k^2+t^2}=\pi\cdot\dfrac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} & (\pi>x>0)\end{cases}$$

führen, wenn man sie addirt und $x=2v\pi$, $t=-wi$ setzt, unmittelbar zu jener Formel (*A*.). Freilich erscheint hierbei der Geltungsbereich der Formel (*A*.) zu eng; denn v wird dabei als zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegend und, da in dem citirten Aufsatze t eine reelle Grösse bedeutet, w als rein imaginär angenommen; aber die allgemeinere Gültigkeit der Formel (*A*.) ist eine Folge jener speciellen.

Herr *Schlömilch* bezeichnet a. a. O. die angeführten Gleichungen als „bekannte Formeln“; und sie finden sich in der That schon bei *Cauchy*, nach einer gelegentlichen Bemerkung von *Dirichlet* **) auch schon bei *Euler*. Auf S. 367 seiner Exercices de Mathématiques von 1827 (Seconde année)

*) Bd. XLII dieses Journals, S. 130.

**) Dieses Journal, Bd. XXIV, S. 365 und *G. Lejeune Dirichlets* Werke, Bd. I, S. 612.

entwickelt *Cauchy* in den zwei Gleichungen (126.) und (127.) e^{sx} einerseits nach cosinus und andrerseits nach sinus ganzer Vielfacher von x. Nun stellt, wie gleich im Anfange dieses Aufsatzes S. 157 gezeigt worden ist, die Formel (*A.*) nichts Anderes dar als die Entwickelung von e^{sx} nach cosinus *und* sinus ganzer Vielfacher von x; aber auch aus jenen beiden *Cauchy*schen Gleichungen resultirt die Formel (*A.*) fast unmittelbar. Addirt man sie nämlich und setzt $s = 2wi$, $x = v\pi$, so kommt:

$$(Q.) \qquad 2\pi i e^{2wv\pi i} = (e^{2w\pi i}-1)\sum_{k}\frac{e^{2kv\pi i}}{2w-2k}+(e^{2w\pi i}+1)\sum_{k}\frac{e^{(2k+1)v\pi i}}{2w-2k-1}.$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots)$$

Wenn man ferner eine der beiden *Cauchy*schen Gleichungen von der andern subtrahirt und $s = -2wi$, $x = v\pi$ setzt, so ergiebt sich eine Relation, welche zeigt, dass die beiden Theile auf der rechten Seite der Gleichung (*Q.*) einander gleich sind, und hieraus folgt offenbar jene Formel (*A.*).

Nimmt man in der oben mit (*N.*) bezeichneten Gleichung $w = 0$, so erhält man:

$$x_1 - x_0 + \sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{\sin 2hx_1\pi - \sin 2hx_0\pi}{h\pi}$$

als *einheitlichen Ausdruck* für die Anzahl aller in dem Intervalle (x_0, x_1) liegenden ganzen Zahlen, vorausgesetzt, dass man jede etwa in einer der Grenzen des Intervalls liegende ganze Zahl als nur einhalb mal vorkommend rechnet.

Literarische Notizen über obige Summenformeln.

Die Summenformel (*E'.*), welche die Grundlage der vorstehenden Entwickelungen bildet, geht unmittelbar aus einer allgemeinen *Cauchy*schen Formel hervor. Man braucht nämlich nur in jener Gleichung, welche auf S. 98 der Exercices de Mathématiques vom Jahre 1826 mit (11.) bezeichnet ist, an Stelle von $f(x+yi)$ das Product:

$$\cot(x+yi)\pi . f(x+yi)$$

zu setzen, um sogleich die obige Summenformel (*E'.*) zu erhalten.

Die Summenformel (*G.*) geht, wenn:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \infty, \quad \cos z\pi f(z) = \varphi(z)$$

gesetzt wird, in folgende über:

$$(G'.) \qquad \tfrac{1}{2}\varphi(0)+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\varphi(k) = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \sum_{\varepsilon}\frac{\varphi(\varepsilon yi)\,dy}{\sin \varepsilon y\pi i} \qquad (\varepsilon = +1,\ -1),$$

welche sich schon in einer *Abel*schen Abhandlung vom Jahre 1823 (Bd. I, S. 27 der zweiten Ausgabe von *Abel*s Werken) findet *). Doch ist a. a. O. die Bedingung:

$$-\lim_{x_1=\infty}\int_0^x \sum_\varepsilon \frac{\varphi(x_1+\varepsilon yi)dy}{\sin(x_1+\varepsilon yi)\pi} + i\lim_{y_1=\infty}\int_0^x \sum_\varepsilon \varepsilon \frac{\varphi(x+\varepsilon y_1 i)dx}{\sin(x+\varepsilon y_1 i)\pi} = 0 \qquad (\varepsilon=+1,-1),$$

an welche die Gültigkeit der Gleichung (*G'*.) gemäss den obigen Entwickelungen geknüpft ist, nicht angegeben.

Die beiden Summenformeln, welche Herr *Schlömilch* in dem schon citirten Aufsatze hergeleitet hat**), gehen aus jener *Abel*schen Formel (*G'*.) hervor, wenn man für $\varphi(z)$ beziehungsweise:

$$\cos(x+\pi)z.f(z), \quad \sin(x+\pi)z.f(z)$$

setzt. Herr *Schlömilch* hat aber Gültigkeitsbedingungen hinzugefügt, welche freilich enger als die oben angegebenen sind.

Nimmt man in der mit (*H*.) bezeichneten Summenformel für x_1 eine ganze Zahl und setzt:

$$F(v-hx_1+hz) = f(z), \quad v-hx_1+hx_0 = v_0,$$

wo h und v beliebige Grössen bedeuten, so erhält man, je nachdem der Werth von x_0 ganzzahlig ist oder nicht, für die erste oder die zweite der beiden Summen:

$$\tfrac{1}{2}F(v_0)+\sum_k F(v-hk), \quad \sum_k F(v-hk) \qquad \left(0<k<\tfrac{v-v_0}{h}\right)$$

einen Ausdruck $\Phi(v)+\Psi(v)$, in welchem:

$$\Phi(v) = -\tfrac{1}{2}F(v)+\frac{1}{h}\int_{v_0}^{v}F(v)dv+\frac{1}{i}\int_0^\infty \sum_\varepsilon \varepsilon F(v+\varepsilon hyi)\frac{dy}{e^{2y\pi}-1} \qquad (\varepsilon=+1,-1),$$

und, wenn zur Abkürzung $z=\frac{v_0}{h}+\varepsilon yi$ gesetzt wird:

$$\Psi(v) = \int_{y=0}^{y=\infty}\sum_\varepsilon \frac{F(hz)dz}{e^{2\varepsilon\left(\frac{v}{h}-z\right)\pi i}-1}$$

ist. Für das Aggregat $\Phi(v)+\Psi(v)$ besteht daher die Relation:

$$\Phi(v+h)-\Phi(v)+\Psi(v+h)-\Psi(v) = F(v),$$

---

*) Der betreffende letzte Theil der citirten Abhandlung fehlt in der ersten Ausgabe von *Abel*s Werken. Die Formel kommt übrigens auch in einer *Abel*schen Abhandlung vom Jahre 1825 auf S. 50 des zweiten Bandes der ersten Ausgabe vor, jedoch nur als ein „vielleicht einem *Abel*schen Manuscript entnommener Zusatz des Herausgebers *Holmboe*". Vgl. die Bemerkung auf S. 291 des zweiten Bandes der zweiten Ausgabe.

**) Vgl. die Formeln (12.) und (13.) auf S. 130 des 42sten Bandes dieses Journals.

und da offenbar $\Psi(v+h) = \Psi(v)$ ist, so genügt $\Phi(v)$ der Differenzengleichung:

$$\Phi(v+h) - \Phi(v) = F(v).$$

Wird demgemäss $\Phi(v)$, als summatorische Function von $F(v)$, in üblicher Weise durch $\Sigma_h F(v)$ bezeichnet, so ist diese, abgesehen von einer Constanten, durch die Gleichung:

$$\Sigma_h F(v) = -\tfrac{1}{2}F(v) + \frac{1}{h}\int^{v} F(v)\,dv + \frac{1}{i}\int_0^{\infty} \sum_{\varepsilon} \varepsilon F(v+\varepsilon h y i)\,\frac{dy}{e^{2y\pi}-1} \qquad (\varepsilon = +1, -1)$$

bestimmt. Dieses Resultat findet sich schon in einer 1820 im 25. Bande der „Memorie della reale Accademia delle scienze di Torino“ erschienenen Abhandlung von *Plana*, welche den Titel hat: „Note sur une nouvelle expression analytique des nombres *Bernoulliens*, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites“ *). Dasselbe Resultat findet sich ferner in einer 1823 von *Abel* publicirten Abhandlung mit der Bemerkung: „Cette expression de l'intégrale finie d'une fonction quelconque me paraît très remarquable, et je ne crois pas qu'elle ait été trouvée auparavant“ **). Es scheint mir deshalb von Interesse, dass sich oben das *Cauchy*sche Theorem als die unmittelbare allgemeine Quelle aller dieser Resultate erwiesen hat, und da dieses Theorem nur in seiner ursprünglichen einfachsten Fassung, in welcher es schon in der Abhandlung vom Jahre 1814 „Mémoire sur les intégrales définies“ vorkommt, bei der Ableitung jener Resultate gebraucht wird ***), so zeigt sich, dass *Cauchy* schon lange, bevor *Plana* und *Abel* aus der *Euler*schen Summenformel ihre erwähnten Resultate abgeleitet haben, im Besitze der naturgemässen Hülfsmittel zu deren Erlangung gewesen ist.

---

*) Die bezügliche Formel steht a. a. O. auf S. 407 und ist mit (α.) bezeichnet. Herr *Bertrand* hat darauf hingewiesen, dass diese Formel vor *Abel* von *Plana* entwickelt worden ist (S. 290 des II. Bandes der zweiten Ausgabe von *Abels* Werken).

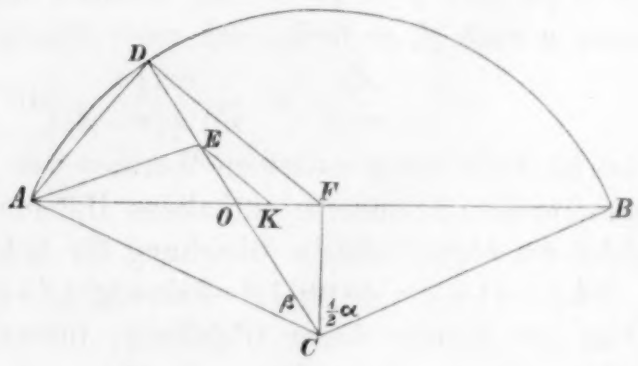
**) Bd. II, S. 227 der ersten und Bd. I, S. 23 der zweiten Ausgabe von *Abels* Werken. Auf die angeführte Stelle der ersten Ausgabe hat mich Herr *Lipschitz*, als ich ihm meine im III. Heft abgedruckten Bemerkungen mittheilte, aufmerksam gemacht und dadurch zur obigen Fortsetzung jener Bemerkungen angeregt.

***) In jener ursprünglichen Fassung besagt das *Cauchy*sche Theorem nur, dass $\int f(x+yi)\,d(x+yi) = 0$ ist, wenn die Integration längs der vier Seiten eines innerhalb der natürlichen Begrenzung liegenden Rechtecks erstreckt wird; das allgemeinere *Cauchy*sche Theorem kann aber aus diesem specielleren erschlossen werden. (Vgl. meine Notiz „Ueber den *Cauchy*schen Satz“ im Stück XXXVIII des Jahrgangs 1885 der Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften.)

Ueber eine Maximalaufgabe zur angeblichen Dreitheilung eines Winkels von *Averdieck*.

(Von Herrn *E. Lampe*.)

Im Programme des Gymnasiums zu Coesfeld vom Jahre 1886 theilt Hr. *Schwering* die folgende, vom verstorbenen Volksschullehrer *Averdieck* angegebene Construction zur Dreitheilung eines Winkels mit. Um den Scheitelpunkt C des zu theilenden Winkels beschreibe man mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, der die Schenkel in A und B treffe. Man ziehe die Sehne AB, ferner das Loth CF von C auf AB. Auf dem Kreisbogen AB nehme man D *beliebig* an, ziehe CD, DF, AD. Ein Kreisbogen um A mit AD als Radius schneide CD in E (also $AD = AE$); die Parallele durch E zu DF treffe AB in K; dann soll AK die zum Drittel des Winkels ACB als Centriwinkel gehörige Sehne sein.



Die Construction, besonders wenn sie den Punkt D in passender, noch näher zu bezeichnender Lage verwendet, liefert überraschend genaue Lösungen und verdient daher in weiteren Kreisen bekannt zu werden. Hr. *Schwering* zeigt, dass die Construction für zwei unten angegebene Werthe von β genau ist, lässt jedoch die Frage nach dem grössten Betrage der Abweichung offen und bestimmt diesen Betrag nur angenähert für den Fall, dass der Winkel $ACB = \frac{1}{2}\pi$ ist. Um diese Maximalaufgabe zu lösen, wiederholen wir, zum Theil in anderer Weise, die von Hrn. *Schwering* angestellten Rechnungen.

Man setze $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, $AC = r$; dann ist $AK = AO + OK = AF - OF + OK$ und $OK : OE = OF : OD$, mithin

$$AK = AF - OF + \frac{OE.OF}{OD} = AF - \frac{OF.DE}{OD}.$$

Hieraus findet man leicht:

$$(1.) \qquad AK = r\left\{\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin(\tfrac{1}{2}\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta}{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}\right\}.$$

Wenn AK die zum Centriwinkel $\frac{1}{3}\alpha$ gehörige Sehne ist, so muss $AK = 2r\sin\frac{1}{6}\alpha$ sein. Setzt man diesen Werth in (1.) ein und ersetzt $\sin\frac{1}{2}\alpha$ noch durch $3\sin\frac{1}{6}\alpha - 4\sin^3\frac{1}{6}\alpha$, so folgt

$$(2.) \qquad \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{6}\alpha = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin(\tfrac{1}{2}\alpha-\beta)}{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Die Lösung dieser Gleichung nach β bewirkt Hr. *Schwering* durch einen eleganten Kunst-

griff. In elementarer Weise kann man wie folgt verfahren. Man erkennt sofort, dass $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ eine Lösung von (2.) ist; daher werde $\beta = \frac{1}{3}\alpha - x$ gesetzt, so erhält man durch weitere Umrechnung schliesslich:

$$(3.) \quad \sin x(\sin x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{6}\alpha) = 0.$$

Ein richtiges Resultat fliesst also aus der Construction, a) wenn $x = 0$, d. h. $\beta = \frac{1}{3}\alpha$, b) wenn β der Gleichung genügt:

$$(3^a.) \quad \sin(\tfrac{1}{3}\alpha - \beta) = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{6}\alpha.$$

Ist α kein grosser Winkel (z. B. nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$), so erhält man aus $(3^a.)$ eine *angenäherte* Lösung durch Vertauschung des Sinus und der Tangente mit den bez. Bogen, also $\frac{1}{3}\alpha - \beta = \frac{1}{12}\alpha$, d. h. $\beta = \frac{1}{4}\alpha$. ***Da nun $\frac{1}{4}\alpha$ leicht zu zeichnen ist, so erhält man aus $\beta = \frac{1}{4}\alpha$ eine nahezu genaue Lösung der Aufgabe.*** Liegt β zwischen $\frac{1}{3}\alpha$ und dem in der Nähe von $\frac{1}{4}\alpha$ befindlichen, aus $(3^a.)$ folgenden Werthe, so weicht der construirte Winkel von $\frac{1}{3}\alpha$ um einen Betrag ab, dessen Maximum in der Nähe von $\beta = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{4}\alpha) = \frac{7}{24}\alpha$ liegt.

Zur Bestimmung des Maximums der Abweichung betrachte man in (1.) $AK = y$ als Function von β und suche den grössten oder kleinsten Werth von y. Zwischen $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ und $\beta = \frac{1}{4}\alpha$ ist AK nämlich nahezu constant (gleich $2r\sin\frac{1}{6}\alpha$). Differentiirt man y nach β, so findet sich nach einigen Vereinfachungen:

$$\frac{dy}{r\,d\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\{\sin^2\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-3\beta)\}.$$

Ist im Falle eines extremen Werthes von y das Differential $dy = 0$, so muss die in den geschweiften Klammern enthaltene Differenz verschwinden. Durch Umrechnung derselben folgt die biquadratische Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$:

$$(4.) \quad (1+\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha)\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\beta - 2\sin\alpha\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}\beta + (1-3\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 0.$$

Von der Lösung dieser Gleichung, insbesondere von ihrer stets vorhandenen positiven Wurzel, hängt die verlangte Bestimmung der grössten Abweichung ab.

In dem von Hrn. *Schwering* behandelten Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ geht (4.) über in:

$$(4^a.) \quad 3\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\beta - 4\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}\beta + 2\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\beta + 4\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat die beiden reellen Wurzeln:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta_1 = \quad 0{,}2332656, \quad \tfrac{1}{2}\beta_1 = \quad 13^\circ 7'49'',24; \quad (\beta_1 = 26^\circ 15'38'',48).$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta_2 = -0{,}771152, \quad \tfrac{1}{2}\beta_2 = -37^\circ 38'15'',67.$$

Zu β_1 gehört $AK = 0{,}5116294r$; der dieser Sehne entsprechende Centriwinkel ist $29^\circ 38'39'',44$, weicht also von 30° um $21'20'',56$ ab, und dies ist die *grösste* Abweichung zwischen $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ und $\frac{1}{4}\alpha$. Aus Gleichung $(3^a.)$ folgt $\beta = 22^\circ 18'2'',41$, während $\frac{1}{4}\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ$ ist. Angenähert liegt das Maximum der Abweichung bei $\beta = \frac{7}{24}\cdot 90^\circ = 26\frac{1}{4}^\circ$.

Als ein zweites Beispiel diene der grössere spitze Winkel α des Pythagoreischen Dreiecks mit den Seiten 3, 4, 5 (also $\cos\alpha = 0{,}8$ etc.). Die Gleichung (4.) giebt:

$$(4^b.) \quad 9\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\beta - 8\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}\beta - 4\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\beta + 8\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta - 1 = 0.$$

Sie hat die beiden reellen Wurzeln $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_1 = 0{,}1364620$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_2 = -0{,}8900632$. Mithin ist $\frac{1}{2}\beta_1 = 7^\circ 46'14'',53$, $AK = 0{,}3036607$. Der zu AK gehörige Centriwinkel ist $17^\circ 27'57'',70$, während $\frac{1}{3}\alpha = 17^\circ 42'36'',12$ beträgt; die maximale Abweichung ist folglich $14'38'',42$. Die Lösung der Gleichung $(3^a.)$ liefert $\beta = 13^\circ 14'32'',67$ als genauen Werth, für den die Construction richtig ist, während $\frac{1}{4}\alpha = 13^\circ 16'57'',09$. Endlich ist $\frac{7}{24}\alpha = 15^\circ 27'16'',6$ und $\beta_1 = 15^\circ 32'29'',06$.

Die negative Wurzel der Gleichung (4.) gehört zu dem Winkel $2\pi - \alpha$.

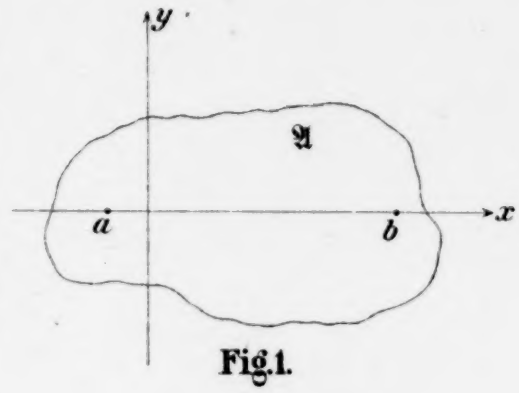


Fig. 1.

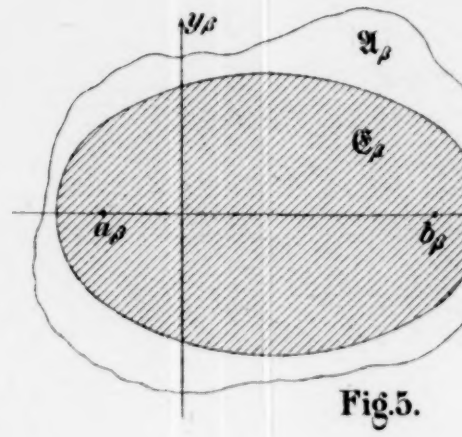


Fig. 5.

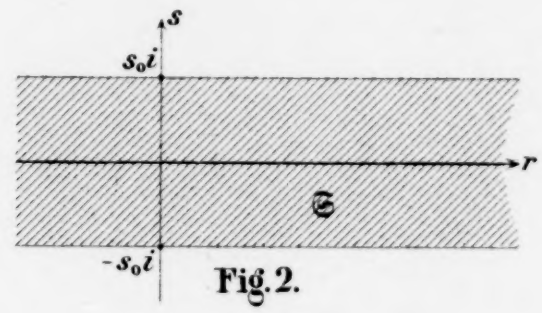


Fig. 2.

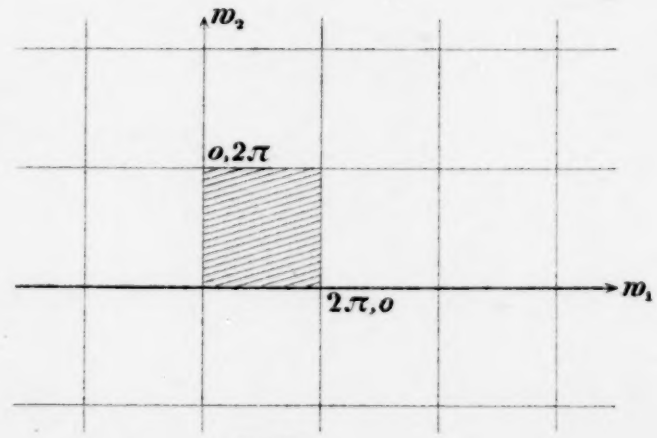


Fig. 3.

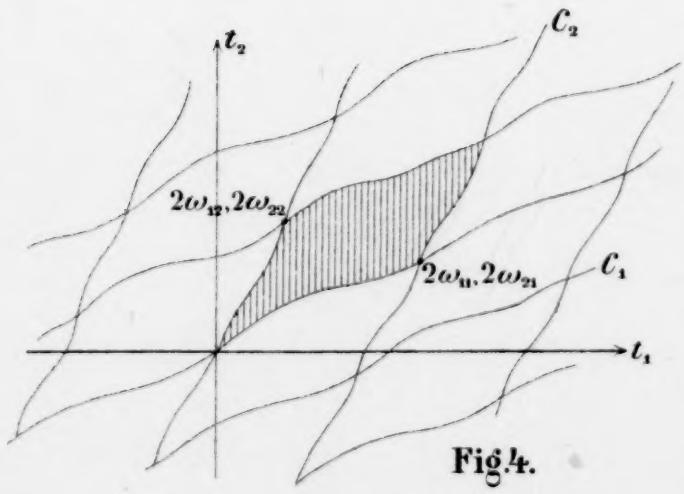


Fig. 4.

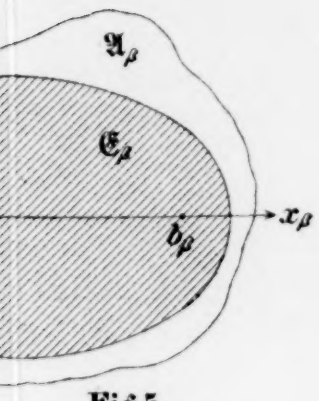


Fig.5.

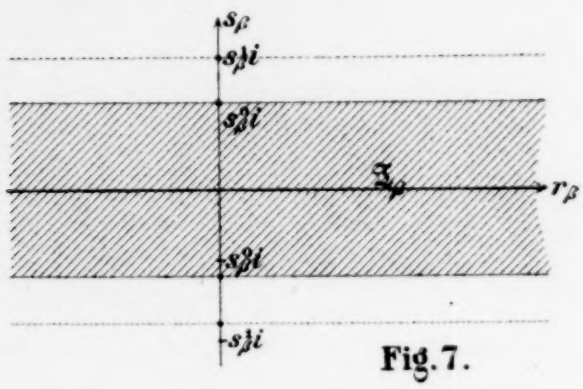


Fig.7.

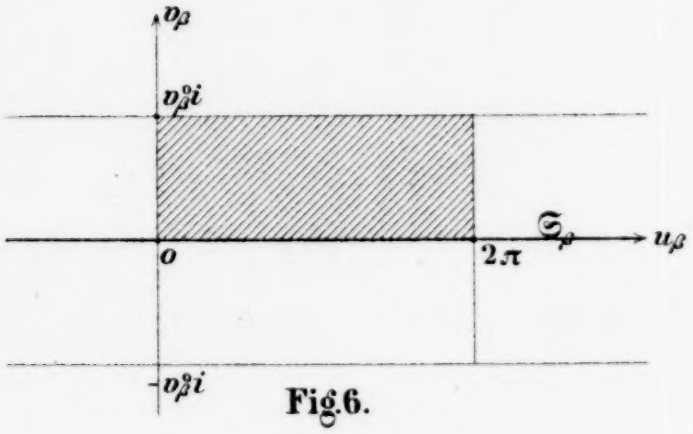


Fig.6.

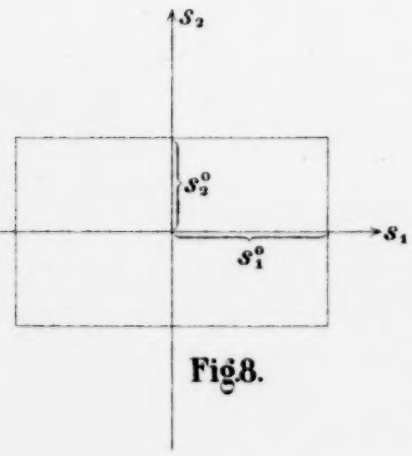


Fig.8.

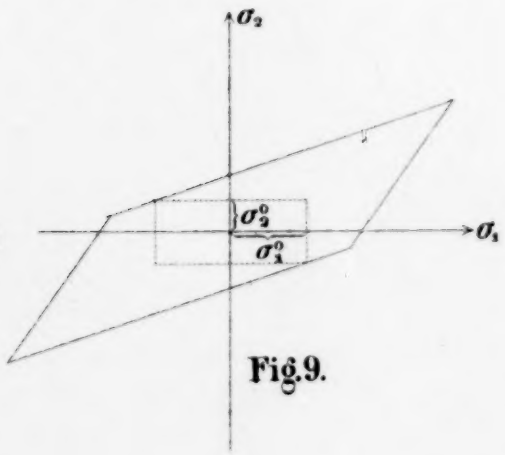
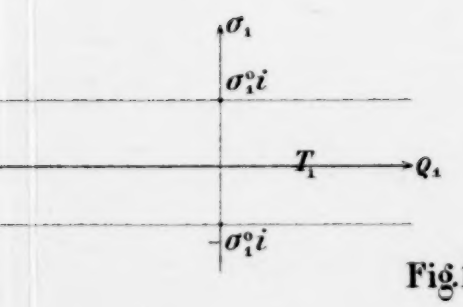


Fig.9.



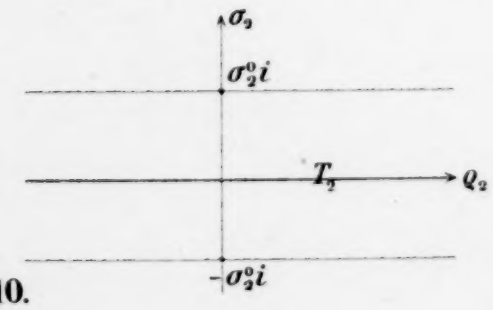


Fig.10.

Lith. Anst. v. Leop. Kraatz, Berlin.

thematik

Fuchs

er Behörden.

Leipzig.

Band IV

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass, von Helmholtz, Schroeter, Fuchs

von

L. Kronecker.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 105.

Heft IV.

Mit einer Figurentafel.

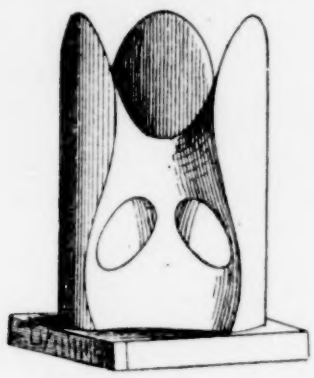
Ausgegeben den 4. November.

Berlin, 1889.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

☞ **Mit einer Beilage von Joh. Ambr. Barth in Leipzig.**

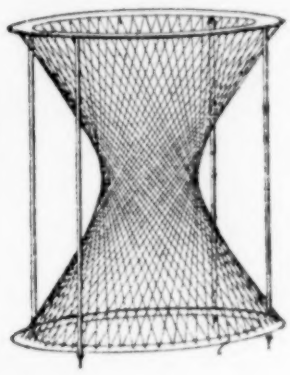
Verlag v. Modellen f. d. höheren math. Unterricht v. L. Brill i. Darmstadt.



Modelle

aus Gips, Messinggestellen mit Seidenfäden, aus Draht, Messingblech etc.

16 Serien.



Die Modelle von sieben dieser Serien sind angefertigt nach den im math. Institut der kgl. techn. Hochschule in München hergestellten Originalen unter Leitung der Hrn. Proff. Dr. *Brill*, Dr. *Klein* und Dr. *Dyck*. Ferner je eine Serie von den Hrn. Proff. Dr. *Kummer* in Berlin, Dr. *Neovius* in Helsingfors, Dr. *Rodenberg* in Hannover, Dr. *Rohn* in Dresden; Oberlehrer Dr. *Schlegel* in Hagen i. W., Geh. Hofrath Prof. Dr. *Wiener* in Karlsruhe, Privatdocent Dr. *Wiener* in Halle u. a. m.

Von zwei Serien abgesehen, sind sämmtliche Nummern einzeln beziehbar. Dem weitaus grössten Theil der Modelle ist ein erläuternder Text beigefügt. — Die Preise verstehen sich excl. Emballage u. Versendungskosten.

Prospecte auf Verl. gratis u. franco. — Von den insgesammt 217 Nummern des Modell-Verlags sind 158 Modelle aus Gips hergestellt, 19 in Seidenfäden, 40 aus Draht etc. Sie berühren fast alle Gebiete math. Wissens: synthet. u. analyt. Geometrie, Krümmungstheorie, math. Physik, Funct. Theorie etc.

Verlag von **Arthur Felix** in **Leipzig.**

Lehrbuch der Kinematik.

Für Studirende

der Maschinentechnik, Mathematik und Physik

geometrisch dargestellt

von

Dr. **L. Burmester,**

Professor an der kgl. sächs. technischen Hochschule zu Dresden.

Erster Band: **Die ebene Bewegung.**

Mit einem Atlas von 57 lithographirten Tafeln.

In gr. 8. XX, 942 Seiten. 1888. brosch. Preis: 57 *M.*

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a. S.

Thomae, Hofrat Prof. Dr., **Abriss e. Theorie der Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte** erheblich verm. Aufl. Mit in den Text eingedr. Holzschn. u. 1 lithogr. Tafel. gr. 4°. geh. 10 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente d. projectivischen Geometrie.** Auf Grund neuer vom Prof. K. Küpper (Prag) herrührender Definitionen u. Beweise leichtfasslich zusammengestellt. Mit vielen in den Text eingedr. Holzschn. gr. 8°. geh. 2 Mark 50 Pf.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

GEODÄTISCHE LITERATUR

AUF WUNSCH DER

PERMANENTEN COMMISSION

DER

INTERNATIONALEN ERDMESSUNG

ZUSAMMENGESTELLT VON

PROF. DR. O. BŒRSCH.

PREIS: 10 MARK.

Band 105. Heft IV.

Inhaltsverzeichniss.

F. Schottky. Eine algebraische Untersuchung über Thetafunctionen von drei Argumenten. . . . . Seite 269

O. Staude. Ueber bedingt periodische Functionen eines beschränkt veränderlichen complexen Argumentes und Anwendungen derselben auf Mechanik. Hierzu Figurentafel I. . . . . — 298

K. Hensel. Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen. . . . . — 329

L. Kronecker. Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. (Fortsetzung des auf S. 157 bis 159 abgedruckten Aufsatzes.) . . . . — 345

E. Lampe. Ueber eine Maximalaufgabe zur angeblichen Dreitheilung eines Winkels von *Averdieck*. . . . . — 355

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

362/